Analisi Matematica 2
V esercitazione

1. Calcolo della soluzione particolare

1. PROBLEMA Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni

(1) $y'' + y' - 2y = 1$.
(2) $4y'' + y = 1$.
(3) $y'' - 2y' + 2y = x$.
(4) $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$.
(5) $y'' + 4y = 4\cos x$.
(6) $y'' + 3y = 4x\cos 2x$.

2. PROBLEMA Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni

(1) $y'' - y' = x^2$.
(2) $y'' + 4y = 4\cos 2x$.
(3) $y'' - 3y' = 1$.
(4) $y'' - 3y' = x^2 + 1$.
(5) $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos(2x)$.
(6) $y'' - y = \sinh x$.

3. PROBLEMA Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni

(1) $y'' + 4y' + 4y = -e^{-2x}$.
(2) $y'' - 2y' + y = e^x + xe^x$.
(3) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x}$.
(4) $y'' + 4y' + 4y = x + e^{-2x}$.
(5) $4y'' - 4y' + y = \sqrt{e^x}$.
(6) $y'' - 2y' + y = \cosh(x)$.

2. Problemi di Cauchy

4. PROBLEMA Calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

(1) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

(3) $\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.

(4) $\begin{cases} y'' + y = \cos x \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = -1 \end{cases}$.

(5) $\begin{cases} y'' + 9y = 6 \sin 3x \\ y(\pi/6) = 1/3 \\ y'(\pi) = \pi/2 \end{cases}$.

(6) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$.

No. Es. ANALISI 2

Date 07 · 11 · 19

1.1 $y'' + y' - 2y = 1$

1 Calcolo integrale generale della omogenea

$y'' + y' - 2y = 0 \qquad k^2 + k - 2 = 0$

$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$

$y(z) = Ae^{-2x} + Be^{x}$

2 Calcolo la soluzione particolare della non omogenea

forzante = costante

$y_p = C \qquad y_p' = 0 \qquad y_p'' = 0$

$-2C = 1 \qquad y_p = C = -\frac{1}{2}$

$y(x) = y(z) + y_p = Ae^{-2x} + Be^{x} - \frac{1}{2}$

1.2 $4y'' + y = 1$

$4k^2 + 1 = 0 \qquad k = \pm \frac{i}{2}$

$y(z) = A \cdot \cos \frac{1}{2}x + B \sin \frac{1}{2}x$

$y_p = C \qquad C = 1$

$y(x) = A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} + 1$

1. 6 $y'' + 3y = 4x \cos 2x$

$k^2 + 3 = 0 \qquad k = \pm i\sqrt{3}$

$y(x) = A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x$

$y_p = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (D_1 + D_2 x)\sin 2x$

$y_p' = C_2 \cos 2x - 2(C_1 + C_2 x)\sin 2x + D_2 \sin 2x + 2(D_1 + D_2 x)\cos 2x$

$y_p'' = -2C_2 \sin 2x - 2C_2 \sin 2x - 4(C_1 + C_2 x)\cos 2x + 2D_2 \cos 2x +$

$2D_2 \cos 2x - 4(D_1 + D_2 x)\sin 2x =$

$-4C_2 \sin 2x + 4D_2 \cos 2x - 4(C_1 + C_2 x)\cos 2x - 4(D_1 + D_2 x)\sin$

$-4C_2 \sin 2x + 4D_2 \cos 2x - 4(C_1 + C_2 x)\cos 2x - 4(D_1 + D_2 x)\sin x +$

$+ 3(C_1 + C_2 x)\cos 2x + 3(D_1 + D_2 x)\sin 2x = 4x \cos 2x$

$-(4C_1 - 4D_2 - 3C_1)\cos 2x - (4C_2 + 4D_2 - 3D_1)\sin 2x$

$+(-4C_2 + 3C_2)x \cos 2x + (-4D_2 + 3D_2)x \sin 2x = 4x \cos x$

$$\begin{cases} 4D_2 - C_1 = 0 \\ 4C_2 + D_1 = 0 \\ -C_2 = 4 \\ D_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} C_1 = 0 \\ D_2 = 0 \\ C_2 = -4 \\ D_1 = 16 \end{matrix}$$

$y(x) = A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x - 4 \cos 2x + 16 \sin 2x$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. 5. ANALISI 2

Date 07.11.16

1.3 $y'' - 2y' + 2y = x$

$k^2 - 2k + 2 = 0 \qquad k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$

$y(z) = A e^x \cos x + B e^x \sin x$

$y_p = C + Dx \qquad y' = D \qquad y'' = 0$

$-2D + 2C + 2Dx = x$

$\begin{cases} D = \frac{1}{2} & C = \frac{1}{2} \\ -D + C = 0 \end{cases}$

$y(x) = A e^x \cos x + B e^x \sin x + \frac{1}{2} + \frac{x}{2}$

1.4 $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$

$k^2 + 2k + 3 = 0 \qquad k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-3} = -1 \pm \sqrt{2}\, i$

$y(z) = A e^{-x} \cos \sqrt{2}x + B e^{-x} \sin \sqrt{2}x$

$y_p = C e^{3x} \qquad y_p' = 3Ce^{3x} \qquad y_p'' = 9Ce^{3x}$

$Ce^{3x}(9 + 6 + 3) = 2e^{3x}$

$18C = 2 \qquad C = \frac{1}{9}$

$y(x) = A e^{-x} \cos \sqrt{2}x + B e^{-x} \sin \sqrt{2}x + \frac{e^{3x}}{9}$

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 07. 11. 19

2.1

$$x'' - y' = x^2$$

$$k^2 - k \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$y(x) = A + Bc^x$$

$$y_p = C + Dx + Ex^2$$

↓

è anche sol. dell'omogenea

→ Moltiplichiamo $y_{p_1} = x\, y_p = Cx + Dx^2 + Ex^3$

$$y_{p_1}' = C + 2Dx + 3Ex^2$$

$$y_{p_1}'' = 2D + 6Ex$$

$$2D + 6Ex - C - 2Dx + 3Ex^2 = x^2$$

$$\begin{cases} 3E = 1 & E = \frac{1}{3} \\ 2D - C = 0 & D = -1 \\ 6E - 2D = 0 & C = -2 \end{cases}$$

$$y(x) = A + Bc^x - 2x - x^2 - \frac{x^3}{3}$$

5

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES ANALISI2

Date 07 11 19

2.2

$y'' + 4y = 4\cos 2x$

$k^2 + 4 = 0 \qquad k = \pm 2i$

$y(t) = A\cos 2x + B\sin 2x$

$y_p = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x \rightarrow x y_p = y_{p1} = C_1 x \cos 2x + C_2 x \sin 2x$

$y_{p1}' = -C_1\cos 2x - 2C_1 x \sin 2x + C_2 \sin 2x + 2C_2 x \cos 2x$

$y_{p1}'' = -2C_1 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x - 4C_1 x \cos 2x + 2C_2 \cos 2x + 2C_2 \cos 2x - 4C_2 x \sin 2x$

$\sin 2x(-4C_1) + x\sin 2x(-4C_2) + \cos 2x(4C_2) + 0 = 4\cos 2x$

$\begin{cases} 4C_2 = 4 \rightarrow C_2 = 1 \\ -4C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0 \end{cases}$

$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + x\sin 2x$

6

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 07 11 19

(2.6) $y'' - y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$k^2 - 1 = 0 \quad k = \pm 1$

$y(t) = A e^x + B e^{-x}$

prima faccio per $\frac{e^x}{2}$ poi per $-\frac{e^{-x}}{2}$ e poi sommo le 2 particolari

1° caso $\left(\frac{e^x}{2}\right)$: $y_1 = C e^x \rightarrow y_{p_1} = Cx e^x$

$y_{p_1}' = C e^x + Cx e^x$

$y_{p_1}'' = Ce^x + Ce^x + Cx e^x$

$2Ce^x = \frac{e^x}{2} \rightarrow C = \frac{1}{4}$

2° caso $\left(-\frac{e^{-x}}{2}\right)$ $y_p = De^{-x} \rightarrow y_{p_1} = Dx e^{-x}$

$y_{p_1}' = De^{-x} - Dx e^{-x}$

$y_{p_1}'' = -De^{-x} - De^{-x} + Dx e^{-x}$

$-2D e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{2} \hookrightarrow D = \frac{1}{4}$

$y_{p\,tot} = \frac{xe^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{4}$

$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{xe^x}{4} + \frac{xe^{-x}}{4}$

7

No. 2. ANALISI 2

Date 07 11 19

3.1 $y'' + 4y' + 4y = -e^{-2x}$

$k^2 + 4k + 4 = 0 \quad k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$

$y(x) = A e^{-2x} + Bx e^{-2x}$

$y_p = x^2 (C e^{-2x}) \quad y_p' = 2x\,Ce^{-2x} - 2x^2 C e^{-2x}$

$y_p'' = 2Ce^{-2x} - 4xCe^{-2x} - 4xCe^{-2x} + 4x^2 C e^{-2x}$

$x^2 e^{-2x}(4C - 8C + 4C) + xe^{-2x}(-8C + 8C) + 2Ce^{-2x} = -e^{-2x}$

$2C = -1 \qquad C = -\frac{1}{2}$

$y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} - \frac{x^2}{2} e^{-2x}$

Problema di Cauchy

1 $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

$k^2 + k - 2 = 0 \quad k_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$y(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}$

$y_p = C \quad y_p' = 0 \quad y_p'' = 0$

$\hookrightarrow C = -\frac{1}{2}$

$y(x) = Ae^{x} + Be^{-2x} - \frac{1}{2}$

$\begin{cases} A + B = \frac{1}{2} \\ A - 2B = 0 \end{cases} \quad 3B = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{6} \quad A = \frac{1}{3}$

$\rightarrow y(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{e^{-2x}}{6} - \frac{1}{2}$