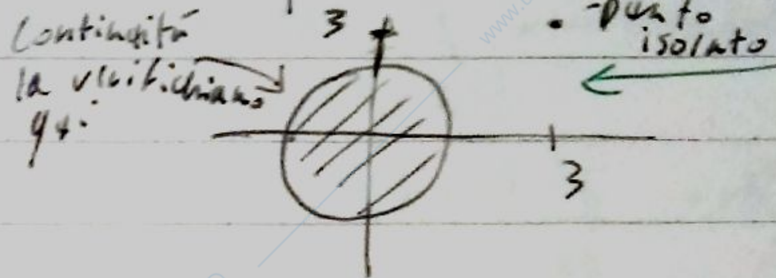
CALCOLO DEI LIMITI

La continuità nel dominio è la continuità sui punti di accumulazione del dominio

(es)

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{se } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } (x,y) = (3,3) \end{cases}$$ DOMINIO



Esercizio difficile

- Dato $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ si deve verificare se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

$$\rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$$

intorno (disco di raggio δ)

quindi $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; N_\delta(x_0,y_0) \mid |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$

se $(x,y) \in D \cap N_\delta(x_0,y_0)$ (con $(x,y) \neq (x_0,y_0)$)

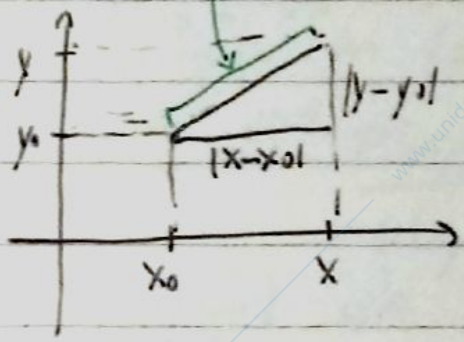
$\rightarrow$ Dato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare $N_\delta(x_0,y_0)$ tale che

(1) $|x - x_0| < \varepsilon$ se $\underbrace{(x,y) \in N_\delta(x_0,y_0)}_{\text{dato } \varepsilon \text{ dobbiamo trovare il } \delta \text{ giusto}}$

$(x,y) \in N_\delta(x_0,y_0)$ vuol dire

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta$$

(2) $\hookrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$



$$\rightarrow |x-x_0| \le \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

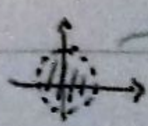
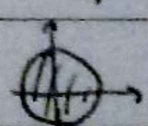
$\hookrightarrow \boxed{\delta = \varepsilon}$ così se vale (2) $\Rightarrow$ vale (1)

$\Longrightarrow f(x,y)=x$ è continua

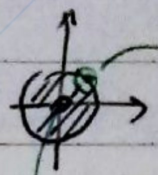
Sottoinsiemi aperti e chiusi

Aperto: tutti i suoi punti sono interni

Chiuso: se contiene tutti i suoi punti di frontiera

es
- $D=[(x,y) \mid x^2+y^2<1]$ è APERTO  "bordo" non incluso
- $D=[(x,y) \mid x^2+y^2\le 1]$ è CHIUSO 

• $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\}$ NÉ CHIUSO NÉ APERTO



punto di frontiera (non interno)

↓

non aperto

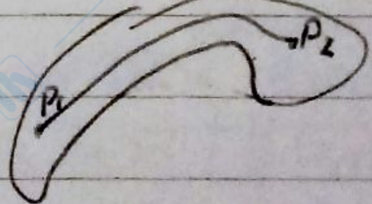
punto isolato: punto di frontiera ma non appartiene all'insieme

↓

non chiuso

Insieme limitato: si dice limitato se esiste un disco $N_R((0,0))$ che lo contiene

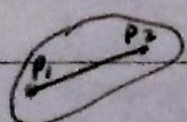
Insieme connesso: se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 in D esiste una curva continua che li congiunge il cui sostegno è contenuto nell'insieme.



— connesso ma non convesso

↓

Insieme convesso: se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 in D il segmento che li congiunge è contenuto in D



convesso $\Rightarrow$ connesso

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Analogamente valgono per le funzioni a più variabili le proprietà dei limiti di una funzione a una variabile.

es. Se $G(x_0,y_0) \neq 0$ e se $F(x,y)$ è continua in (x_0,y_0) e $G(x,y)$ è continua in (x_0,y_0)

$$\Rightarrow \frac{F(x,y)}{G(x,y)} \text{ è continua in } (x_0,y_0)$$

poiché

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0,y_0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = G(x_0,y_0)$$

allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y)} = \frac{F(x_0,y_0)}{\underbrace{G(x_0,y_0)}_{\neq 0}}$$

algebra dei limiti

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ANALISI 2

Date 24 09 17

Esercizio

da Esercizio difficile

- → $F(x,y) = \hat{x} + \hat{y}$ è continua perché è somma di funzioni continue

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0,y_0)$$

- $F(x,y) = e^{x^2+y^2}$ è continua?

↳ Teorema: Se $f: I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $L \in I$ e

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) \to L$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(F(x,y)) = f(L)$$

dunque $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(t) = e^t$

$F(x,y) = x^2 + y^2$

↳ continua poiché

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = F(x_0,y_0) = x_0^2 + y_0^2$$

CONTINUA

$$\hookrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(F(x,y)) = f(x_0^2+y_0^2) = e^{x_0^2+y_0^2}$$

$$\to \lim_{(x,y)} f(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} e^{x^2+y^2} = e^{x_0^2+y_0^2}$$

Esercizio

Calcolare:

1 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+x^2+y^2)$

$\to F(x,y) = 1+x^2+y^2 \quad f(F(x,y)) = \ln(1+x^2+y^2)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2+y^2) = 1$ → possiamo sostituire $1+x^2+y^2 = t$ e fare parametro

$\hookrightarrow \lim_{t\to 1} \ln(1+x^2+y^2) = 0$

2 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-(x^2+y^2)} = 1$

3 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$

↳ poiché possiamo prendere $t(x,y) = xy$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

es. $F(x,y) = \cos(x^2+e^{y^2})$ è continua poiché

x^2 e y^2 è continua (Esercizio difficile)

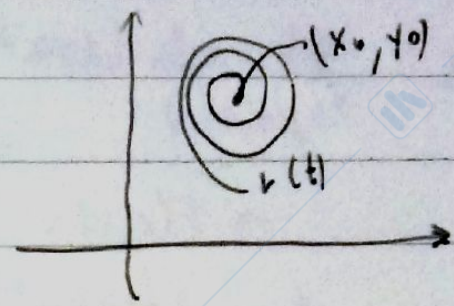
$\to e^{y^2}$ è continua per il Teorema precedente, $x^2+e^{y^2}$ è continua (somma)

$\to \cos(x^2+e^{y^2})$ è CONTINUA per il teorema

Forme indeterminate

Supponiamo che:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$$



$$F(r(t))$$

$$r(t) = (x(t), y(t))$$

$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0$ $\quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$ $\quad$ se $t\to t_0$ mi avvicino a (x_0,y_0)

Il teorema precedente dice che:

$$\lim_{t\to t_0} F(r(t)) = L$$

Se mi muovo su qualsiasi curva devo andare verso L

Restrizione a curve

es. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (*) verificare se esiste

→ restringiamo alle curve

1: $r(0,1)\to\mathbb{R}^2$ $\quad r(t) = (t,0)$

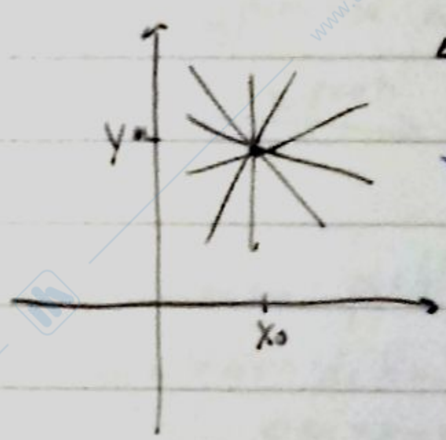
$$\lim_{t\to 0} F(r(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t^2\cdot 0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

2: $r_1(0,1)\to\mathbb{R}^2$ $\quad r_1(t) = (t,t)$

$$\lim_{t\to 0} F(r_1(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{1}{2}$$

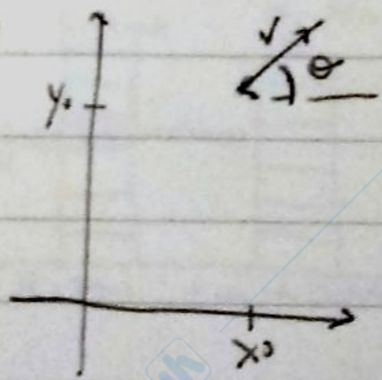
Avvicinandosi con queste 2 curve si ottengono due limiti diversi $\Rightarrow$ il limite (*) **NON** ESISTE

↳ funziona come CRITERIO NEGATIVO = TEST DELLE RETTE



Parametrizzo le rette

punto (x_0, y_0)



$v = (\cos\theta, \sin\theta)$
vettore direzione

$$r_\theta(t) = (x_0, y_0) + t(\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\hookrightarrow r_\theta(t) = (\underbrace{x_0 + t\cos\theta}_{x(t)}, \underbrace{y_0 + t\sin\theta}_{y(t)})$$

$$\lim_{t\to 0^+} x(t) = x_0 \qquad \lim_{t\to 0^+} y(t) = y_0$$

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y) = L$

$\lim_{t\to 0^+} F(\gamma_\theta(t)) = L \quad \forall\theta$

quindi non deve dipendere da θ

Se il limite dipende da $\theta \Rightarrow$ il limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)$ non esiste

è solo un test negativo