



1

No.

ANALISI 2

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

Date

01/10/19

es. "Applicatione test delle rette"

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ esiste?

$$f(t \cos \theta, t \sin \theta) = \frac{t \cos \theta + t \sin \theta}{t \cos \theta - t \sin \theta}$$

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \theta + t \sin \theta}{t \cos \theta - t \sin \theta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(\cos \theta + \sin \theta)}{t(\cos \theta - \sin \theta)} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

NON ESISTE $\Leftarrow$ dipende da θ

es. "Non sufficienza del test delle rette"

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ ESISTE?

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{t^4 \cos^4 \theta + t^2 \sin^2 \theta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \theta \sin \theta}{t^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = 0$$

$\hookrightarrow$ se $\sin \theta \neq 0$

Se $\sin \theta = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \theta \sin \theta}{t^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2 \cos^4 \theta} = 0$$

indipendente da θ

ma non
significativo
 $\hookrightarrow$ esiste

in questo caso
non esiste



2

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

No. ANALISI 2

Date 01.10.18

Non esiste poiché dovrebbe funzionare con qualsiasi curva

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t^2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

il limite
non
esiste



diverso dalle
altre curve

TEST DELLE COORDINATE POLARI

Se fallisce il test delle rette possiamo usare questo test.

Se esiste θ tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = L$$

Allora

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\sup_{\theta} |f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - L| \right] = 0$$



Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

No. ANALISI 2

Date 01.10.19

→ $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ ESISTE?

$(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$

→ SE SI CALCOLARLO

Applico test vett. → $\vec{v}$ indipendente da θ

Applico test coordinate polari

so a:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = L$$

(non dipende da θ)

Cerco una funzione $\epsilon(t)$

$$|f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - L| \leq \epsilon(t)$$

$$\text{tale che } \lim_{t \rightarrow 0^+} \epsilon(t) = 0$$

in questo caso:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

es. Verificare che:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

TEST RETTE

indip. da θ

$$\hookrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t \cos \theta, t \sin \theta) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{t^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$



4

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

No. ANALISI 2

Date 01.10.19

→ TEST COORD. POLARI:

$$|f(t \cos \theta, t \sin \theta) - L|$$

$$|t \cos^2 \theta \sin \theta - 0|$$

$$= |t \cos^2 \theta \sin \theta| \leq |t|$$

il problema
è trovare
questa

$$\lim_{t \rightarrow 0} |t| = 0$$

esiste

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

DERIVATE PARZIALI

Ipotesi: Calcoleremo le derivate parziali in un
punto interno del dominio. $(x_0, y_0) \in D$

teniamo y_0 fissata $\leftarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h}$

teniamo x_0 fissata $\leftarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h}$



5

No. ANALISI 2

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

Date 01.10.19

es.

$$F(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x \text{ in } (0,0) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{0+0} = 0$$

Oss.

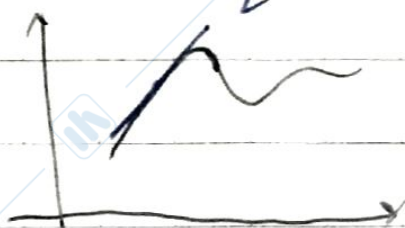
Se il dominio è aperto è sensato fare la derivata su tutti i punti del dominio.

Approssimazione lineare

In una variabile:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

← approssimazione lineare



Quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - L(x)|}{|x - x_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$



Approssimazione lineare in 2 variabili:

$$L(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\nearrow$
F deve essere derivabile in (x_0, y_0)

il che significa che esistono
 $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$

Se F è derivabile in (x_0, y_0)

si dice che F è differenziabile in (x_0, y_0) se:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{|F(x, y) - L(x, y)|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$



7

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

No. ANALISI 2

Date 01.10.19

Condizione più forte
rispetto al teorema
per una funzione a 1 variabile

Teorema: Se F è differenziabile in (x_0, y_0)
allora F è continua in (x_0, y_0)

↳ Dimostrazione: SU SLIDE

es. "Funzione derivabile, ma non differenziabile"

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ non esiste (da es. precedenti)

quindi $f(x, y)$ non continua
in $(0, 0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

e anche $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ esiste ed è $= 0$

ma non è continua in $(0, 0)$ quindi
non può ess. no differenziabile in $(0, 0)$



8

No.

ANALISI 2

Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

Date

01.10.19

Verifica di differenziabilità

→ Teorema del differenziale totale:

Se esistono le derivate parziali, di una funzione di due variabili dove (x_0, y_0) è un punto interno di D , in (x_0, y_0) e sono continue in (x_0, y_0) allora F è differenziabile in (x_0, y_0) .

→ Dimostrazione:

somma e tolgo

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \overbrace{F(x, y) - F(x_0, y)} + \overbrace{F(x_0, y) - F(x_0, y_0)}$$

per trovare
della
media
di Lagrange

$$F(x, y) - F(x_0, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y)(x - x_0)$$

+

$$F(x_0, y) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0)$$

e poi Slide



9

Mo	Xi	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

No. ANALISI 2

Date 01.10.19

es. Verificare che F è diff. in $(1,1)$:

$$F(x,y) = \sqrt{6-x^2-y^2}$$

non calcoliamo il limite
ma facciamo il problema del diff. totale

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{6-x^2-y^2}} (-2x) \quad \text{in } (1,1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}} \quad \text{denominatore} \neq 0$$

↓
esistono in un intorno di $(1,1)$

F è differenziabile

↳ sono anche
continue
(composte di
continue)

