1

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ANALISI 2

Date 10 12 19

Lez. ven. riassunto:

Distanza e ortogonalità:

$L^2(T)$ = INSIEME DELLE FUNZIONI PERIODICHE DI PERIODO T TALI CHE ESISTE FINITO $\int_0^T f(x)^2 dx$

In $L^2(T)$ ci sono le funzioni $\cos(kx)$ $\sin(kx)$

Si definisce prodotto scalare su $L^2(2\pi)$ ponendo

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

Distanza $d(f,g) = \| f - g \|$

Dove la norma $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

2 funzioni sono ortogonali

$$\langle f, g \rangle = 0$$

Consideriamo:

$$h \geq 0 \quad k \geq 0$$

- $$\int_0^{2\pi} \cos(hx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ \pi & \text{se } h = k \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } h = k = 0 \end{cases}$$

- $$\int_0^{2\pi} \cos(hx)\sin(kx) = 0 \quad \text{per ogni } h, k$$

- $$\int_0^{2\pi} \sin(hx)\sin(kx) = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ \pi & \text{se } h = k \neq 0 \\ 0 & \text{se } h = k = 0 \end{cases}$$

dunque abbiamo che

- $\langle \cos(hx), \cos(kx) \rangle = 0$ se $h \neq k$

sono ortogonali

$\|\cos(hx)\|^2 = \pi$ se $h \neq 0$

se $h = 0$ $\|\cos(hx)\|^2 = \|1\| = 2\pi$

- $\langle \cos(hx), \sin(kx) \rangle = 0 \quad \forall k, h$

- $\langle \sin(hx), \sin(kx) \rangle = 0$ se $h \neq k$ e $h = k = 0$

$$\|\sin(hx)\|^2 = \pi \quad \text{se } h \neq 0$$

Ora vogliamo trovare il polinomio trig. p_n di ordine n in modo che lo scarto quadratico medio con f sia minimo

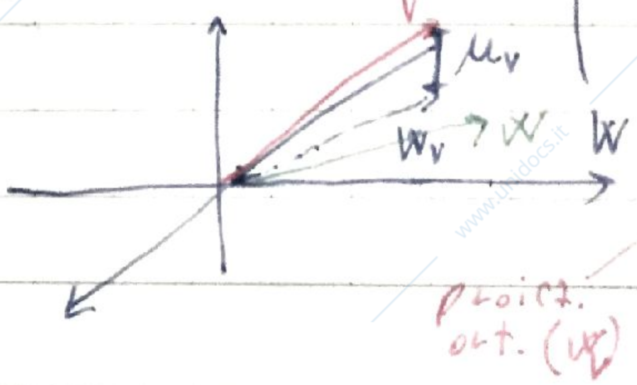
$$\hookrightarrow d(f, p_n) = \|f - p_n\| = \left(\int_0^{2\pi} (f(x) - p_n(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

sia minimo

Consideriamo:

Principio di ortogonalità → slide

giustificamento



spazio
Per trovare il punto più vicino a V proiettiamo sul piano V

$u_v = v - w_v$

ortogonale a ogni vettore in W

Voglio minimizzare

$$\|v - \underbrace{w}_{\text{vettore qualsiasi in } W}\|^2 = \| v - \underbrace{w_v + w_v}_{\text{aggiungo e tolgo}} - w\|^2 =$$

$$= \langle (v - w_v) + (w_v - w), (v - w_v) + (w_v - w) \rangle =$$

uguali

$$= \langle v - w_v, v - w_v \rangle + \langle v - w_v, w_v - w \rangle +$$

$$+ \langle w_v - v, v - w_v \rangle + \langle w_v - w, w_v - w \rangle =$$

$$= \langle v - w_v, v - w_v \rangle + \overbrace{2 \langle \underbrace{v - w_v}_{u_v}, w_v - w \rangle}^{= 0} + \langle w_v - w, w_v - w \rangle$$

diff fra 2 vettori W $\Rightarrow$ è W

positivo, se lo tolgo tutto diminuisce

$$= \|v - w_v\|^2 + \|w_v - w\|^2 \geq \|v - w_v\|^2$$

$$\|v - w\|^2 \geq \|v - w_v\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$d(v, w) \geq d(v, w_v)$$

$\downarrow$

principio di ortogonalità

Proiezione ortogonale

$$\langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \neq 0 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$\to$ formula generale:

$$P_W(v) = \sum \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

Se consideriamo gli esempi con $\cos(hx)$ e $\sin(hx)$ fatti in precedenza

Usiamo $\{w_1, \dots, w_T\} =$

$$= \{1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$$

Otteniamo

$$p_n(x) = \frac{\langle f, 1\rangle}{2\pi} + \sum_{h=1}^{n} \underbrace{\frac{\langle f, \cos(hx)\rangle}{\pi}}\cos(hx) + \frac{\langle f, \sin(hx)\rangle}{\pi}\sin(hx)$$

dove definiamo

$$a_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(hx)\,dx$$

e

$$b_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(hx)\,dx$$

coeff. di Fourier della funzione

$$\frac{\langle f, 1\rangle}{2\pi} = \frac{a_0}{2}$$

↳ $p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{n} \left(a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx)\right)$

Serie Fourier

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

della funzione f in $L^2(2\pi)$

$\downarrow$

Si può scrivere

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

↳ convergenza in media quadratica

Una successione f_k tende a f se

$$\lim_{k \to +\infty} \| f_k - f \| = 0$$

la Serie di Fourier converge in media quadr.

$$\lim_{x \to +\infty} \| f - p_k \| = 0$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \to +\infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - f_k(x))^2 \, dx = 0$$

Non ho il limite puntuale (+ complicato da trovare) ma ho il limite in media

in ogni punto

Oss

Se abbiamo periodi diversi da 2π imponiamo fase $\frac{2\pi}{T}$

Consideremo:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \quad e \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Notiamo inoltre che se f è periodica di periodo T allora

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx \quad \forall x_0$$

Se f è pari

$b_n = 0$

$\hookrightarrow f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ è dispari

$f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ è pari

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

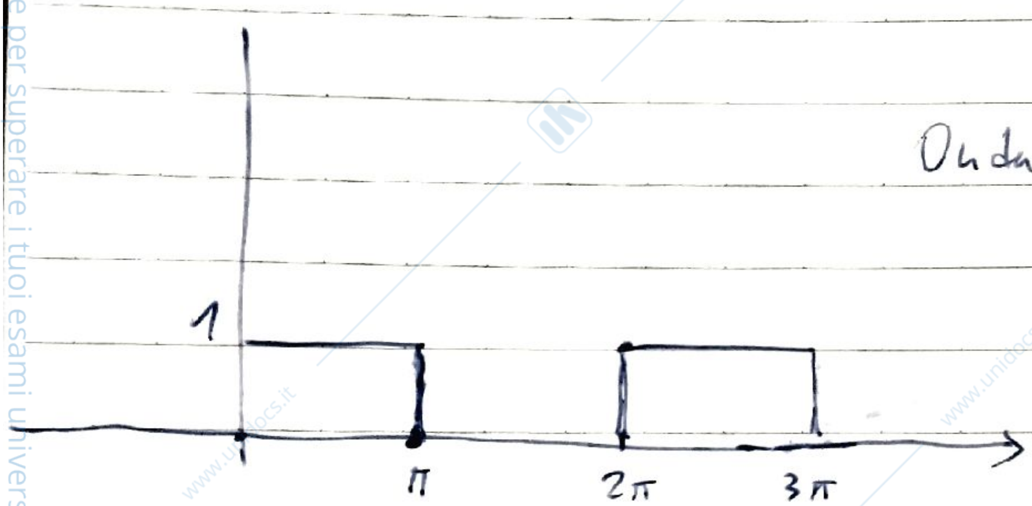
Se $f(x)$ è dispari

$a_h = 0$ . . .

es

$f: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ Calc. serie Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{se } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$



Onda quadra

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

tra π e 2π $= 0$

$$a_h = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(hx)\, dx = \int_0^{\pi} \cos(hx) dx = \frac{1}{hx} \sin(hx) \Big|_0^{\pi} = 0$$

$h \neq 0$

$$b_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(hx)\,dx = \frac{1}{h}\int_0^{\pi}\sin(hx)\,dx = -\frac{1}{hx}\cos(hx)\Big]_0^{\pi}$$

Se h è pari

$h=2k$

allora

$$b_h = -\frac{1}{h2k}\left(\cos(2\pi k) - \cos(0)\right) = 0$$

Se h è dispari

$h = 2n+1$

$$b_h = -\frac{1}{h(2n+1)}\left(\cos(2n+1)\pi - \cos(0)\right)$$

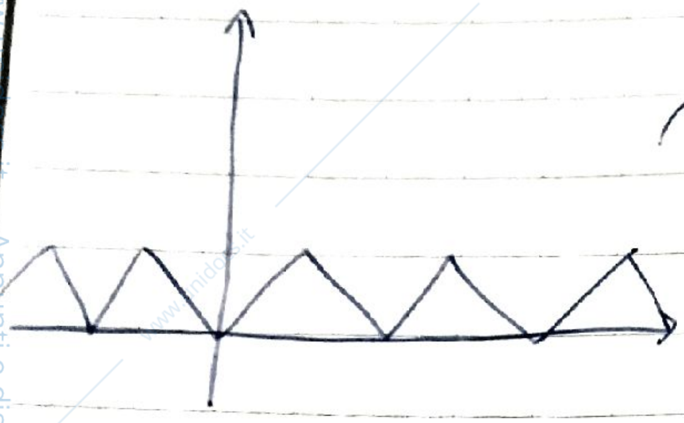
$$= \frac{2}{\pi(2n+1)}$$

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)} \sin[(2n+1)x]$$

Corrispond. all' $h=1 = 2n+1 = 0 \Rightarrow n=0$

es $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$f(x)=|x|$



funz pari

$b_h=0$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}|x|\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$T=2$ $[-1,1]$

$h>0$

$$a_h: \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi h x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(\pi h x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\cos(\pi h x)\,dx =$$

per parti

$$= 2\int_{0}^{1} x\cos(\pi h x)\,dx = 2\left(\frac{1}{\pi h}\sin(\pi x)x\right)\Big|_{0}^{1} - \frac{2}{\pi h}\int \sin(\pi h x)\,dx =$$

$$= 2\cdot 0 + \frac{2}{\pi^2 h^2}\cos(\pi h x)\Big|_{0}^{1} = \frac{2(\cos(\pi h)-1)}{\pi^2 h^2}$$

12

No. ANALISI 2

Date 10.12.19

- se $h = 2k$

$$a_k = 0$$

- se $h = 2k+1$

$$a_h = \frac{2\left(\cos(\pi(2k+1)) - 1\right)}{\pi^2 h^2} = -\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} = a_{2k+1}$$

$$f \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-4}{\pi^2(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

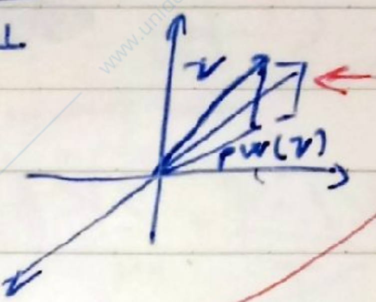
Disuguaglianza di Bessel

Se W è un sottospazio di uno spazio V

↳ $0 \le \|v - p_W(v)\|^2 = \langle v - p_W(v), v - p_W(v)\rangle =$

$= \langle v - p_W(v), v\rangle - \underbrace{\cancel{\langle v - p_W(v), p_W(v)\rangle}}_{=0} =$

$v - p_W(v) \in W^\perp$



$= \langle v - p_W(v), v\rangle = \|v\|^2 - \langle p_W(v), v\rangle$

↳ $\|v\|^2 \ge \langle v, p_W(v)\rangle$

$$p_W(v) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h\rangle}{\|w_h\|^2} w_h$$

$$\|v\|^2 \ge \sum_{h=1}^{n} \frac{(\langle v, w_h\rangle)^2}{\|w_h\|^2}$$

Se $\{w_1, \dots, w_n\}$ è base ortogonale di W

Consideriamo dunque:

$f \in L^2(T)$ W = sottospazio dei polinomi trigonometrici di ordine n

$\{1, \cos(\frac{2\pi}{T}x), \sin(\frac{2\pi}{T}x), \dots \cos(\frac{2\pi}{T}nx), \sin(\frac{2\pi}{T}nx)\}$

è base ortogonale di W

primo termine

$$\|f\|^2 \geq \frac{|\langle f, 1\rangle|^2}{T} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(\langle f, \cos(\frac{2\pi}{T}kx)\rangle)^2}{T/2} + \frac{(\langle f, \sin(\frac{2\pi}{T}kx)\rangle)^2}{T/2} \right)$$

$$\int_0^T f(x)^2 dx \geq \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

poiché

$$\langle f, 1\rangle = \int_0^T f(x)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$\langle f, 1\rangle = \frac{T}{2} a_0$$

Oss.

La disuguaglianza di Bessel implica che la serie $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge

si può utilizzare per vedere se è una serie di Fourier

se questa diverge non lo è

es. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(nx)$

infatti $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ => serie armonica diverge

$\Rightarrow$ non è di Fourier

Uguaglianza di Parseval

Se $f \in L^2(T)$ e

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right)$$

allora $\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n(f) \| = 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T (f(x) - p_n(f)(x))^2 \, dx = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f - p_n, f - p_n \rangle =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^T (f(x) - p_n(x))^2 \, dx$$

dove come abbiamo visto prima

$$\| f - p_n \|^2 = \| f \|^2 - \langle p_n(f), v \rangle =$$

$$\underbrace{= \| f \|^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)}_{\downarrow \; 0}$$

$$\frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2+b_k^2)\right)=\int_0^T f(x)^2dx$$

es Energia del segnale

$$f_k = a_k \cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)$$

$$E(f_k)=\frac{a_k^2+b_k^2}{2} \qquad E(f_0)=\frac{a_0^2}{4}$$

↳ Teorema di Riemann-Lebesgue

Sia $f \in L^2(T)$

$$\underbrace{\lim_{k\to+\infty}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx}_{\frac{T}{2}a_k} = \underbrace{\lim_{k\to+\infty}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}kx\right)dx}_{\frac{T}{2}b_k}=0$$

Dim. → slide

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

No. ANALISI 2

Date 13 . 12 . 19

Ci sono altri modi per scrivere la serie di Fourier.

1

- scriviamo (a_n, b_n) in coordinate polari

$$(a_n, b_n) = (\rho_n \cos(\theta_n), \rho_n \sin(\theta_n))$$

$$\rho_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \theta_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$\hookrightarrow$ $a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) =$

$$= \sqrt{a_n^2+b_n^2} \cos(\theta_n) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + \sqrt{a_n^2+b_n^2} \sin(\theta_n) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) =$$

$$= \sqrt{a_n^2+b_n^2} \left(\cos(\theta_n) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + \sin(\theta_n) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}_{A_n} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} nx - \theta_n\right)\right)$$

$A_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad \theta_0 = 0$

$(A_0, A_1 \dots A_n, \dots)$ ampiezza $\qquad (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots)$ spettro

$$\rightarrow \quad S[f] = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} nx - \theta_n\right)\right)$$

serie di Fourier

? Possiamo scrivere Fourier anche con gli esponenziali complessi

$L^2(T, \mathbb{C})$ = INSIEME DELLE FUNZIONI

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodiche di periodo T

tali che $\int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty$

$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\, dx$

non è un numero reale positivo

per risolvere il problema mettiamo

Infatti

$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^T f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_0^T |f(x)|^2 dx \geq 0$

Se abbiamo una costante c

dobbiamo portarlo fuori come coniugato

$\langle f, cg \rangle = \bar{c} \langle f, g \rangle$ non è bilineare

lineare a sinistra, a destra è mezzo lineare

Non è neanche simmetrica

$$\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$$

Funzioni esponenziali

$$\langle e^{(2\pi/T)ihx}, e^{(2\pi/T)ikx} \rangle = \int_0^T e^{(\frac{2\pi}{T}ihx)} \overline{e^{(\frac{2\pi}{T}ikx)}}$$

$$\int_0^T e^{(\frac{2\pi}{T}i)(h-k)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{se } h \neq k \\ T & \text{se } h = k \end{cases}$$ → ortogonali

↳ Scriviamo la serie di Fourier come:

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} \hat{f}(h) e^{(\frac{2\pi}{T})ihx}$$

No. ANALISI 2

Date 13 12 19

La relazione tra i 2 modi di scrivere la serie di Fourier è:

$$\boxed{h>0}$$

$$\hat{f}(h) = \frac{1}{2}(a_h - i b_h)$$

$$\hat{f}(-h) = \frac{1}{2}(a_h + i b_h)$$

$$\hat{f}(0) = \frac{a_0}{2}$$

e otteniamo anche le relazioni inverse:

$$a_h = \hat{f}(h) + \hat{f}(-h)$$

$$b_h = (\hat{f}(-h) - \hat{f}(h))(-i)$$

CONVERGENZA SERIE

Convergenza assoluta ⇒ convergenza semplice

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge ass.

se $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge puntualmente

dove se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni n, m con $n > N$ e $m > N$

$\left|\sum_{n=m} a_n\right| < \varepsilon$ allora la serie converge

Convergenza totale

→ Quando una funzione è maggiorata e la serie dei maggioranti converge