

Lezione 17/9

Curve

Curve

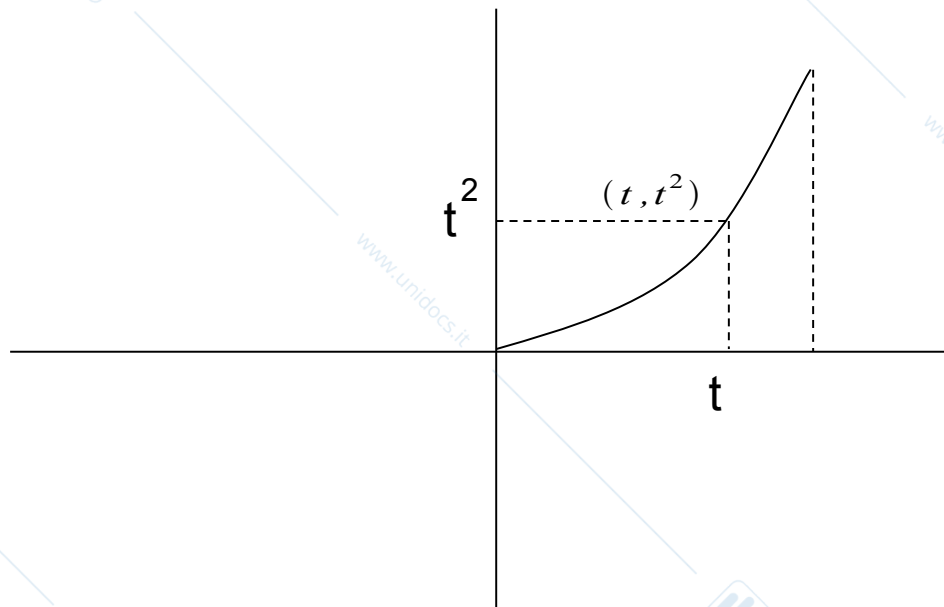
- Una curva è una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ dove I è un sottoinsieme di \mathbb{R} .
- Di solito I è un intervallo in \mathbb{R}
- Se $m=2$ allora si parla di curve piane
- Se $m=3$ allora si parla di curve nello spazio

Esempi di curve

- La curva $r: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$r(t) = (t, t^2)$$

traccia un tratto di parabola.

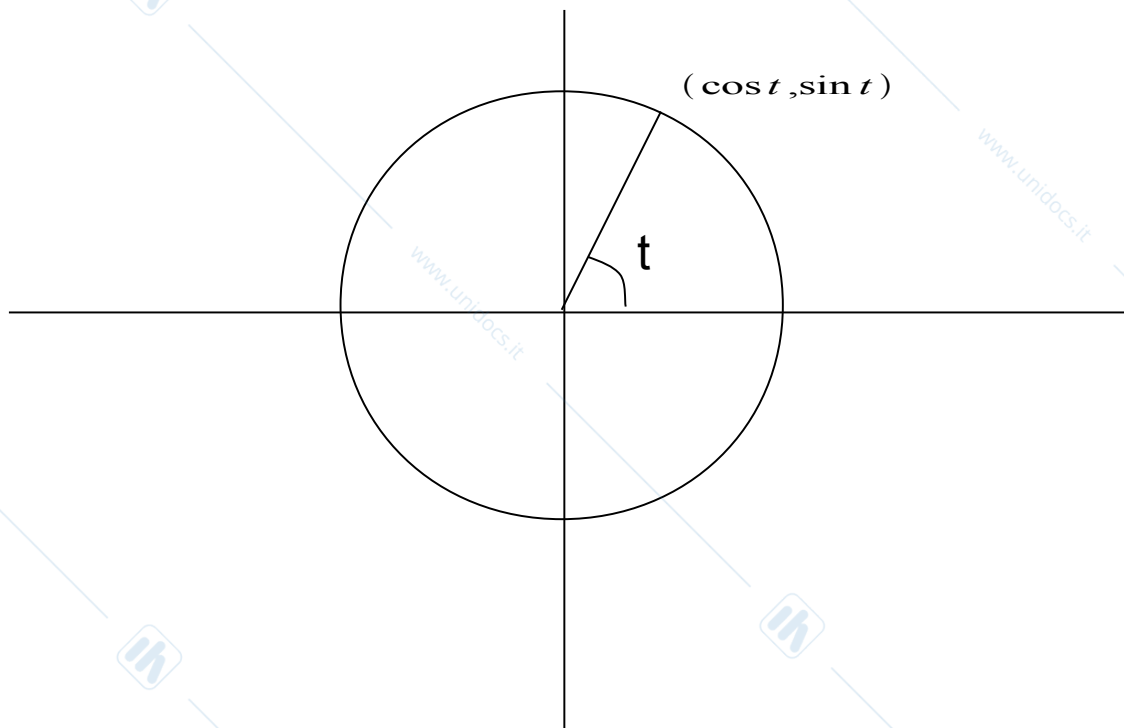


Esempi di curve

- La curva $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$r(t) = (\cos t, \sin t)$$

traccia una circonferenza di raggio 1.



Componenti di una curva piana

- In generale una curva piana sarà definita da un'espressione del tipo

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (x(t), y(t))$$

dove $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di una variabile reale dette componenti della curva.

- In forma vettoriale si può anche scrivere

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Componenti di una curva nello spazio

- In generale una curva nello spazio sarà definita da un'espressione del tipo

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

dove $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $z: I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di una variabile reale dette componenti della curva.

- In forma vettoriale si può anche scrivere

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Sostegno di una curva

- Se $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva allora l'immagine di r è detta il **sostegno** della curva, quindi il sostegno di

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (x(t), y(t))$$

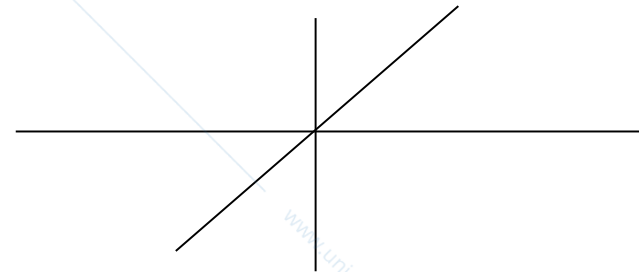
è $\{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$.

- In altre parole il sostegno è l'insieme di punti percorsi dalla curva.

Esempi

- $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (t, t)$

il sostegno di r è una retta e precisamente la retta di equazione $x=y$



- $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (t^3, t^3)$

il sostegno di r è di nuovo la retta di equazione $x=y$

Parametrizzazione

- Dato un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n si dice che A viene parametrizzato dalla curva $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se A risulta essere il sostegno di \mathbf{r}

Parametrizzazione delle rette

- Le rette: la maniera più semplice per parametrizzare una retta è quello di utilizzare l'equazione parametrica: se r è la retta nel piano avente direzione (l,m) e passante per (x_0,y_0) , allora la curva $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = (x_0 + lt, y_0 + mt)$$

è una parametrizzazione di r . Nel caso delle rette nello spazio una parametrizzazione è data da $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ $r(t) = (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + nt)$

Parametrizzazione di circonferenze

- La circonferenza nel piano di centro (x_0, y_0) e raggio R è parametrizzata dalle curve

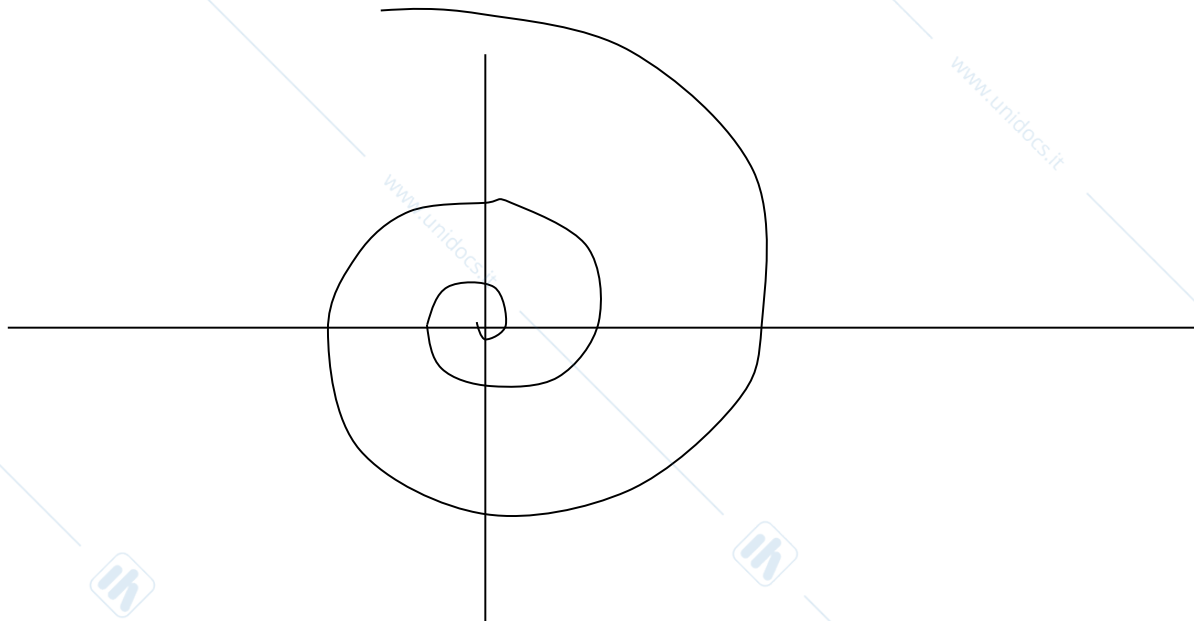
$$r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (x_0 + R \cos(\omega t), y_0 + R \sin(\omega t))$$

Spirale

- La curva $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$r(t) = (e^{at} \cos(\omega t), e^{at} \sin(\omega t))$$

con $a \neq 0$ e $\omega \neq 0$ ha come sostegno
una spirale

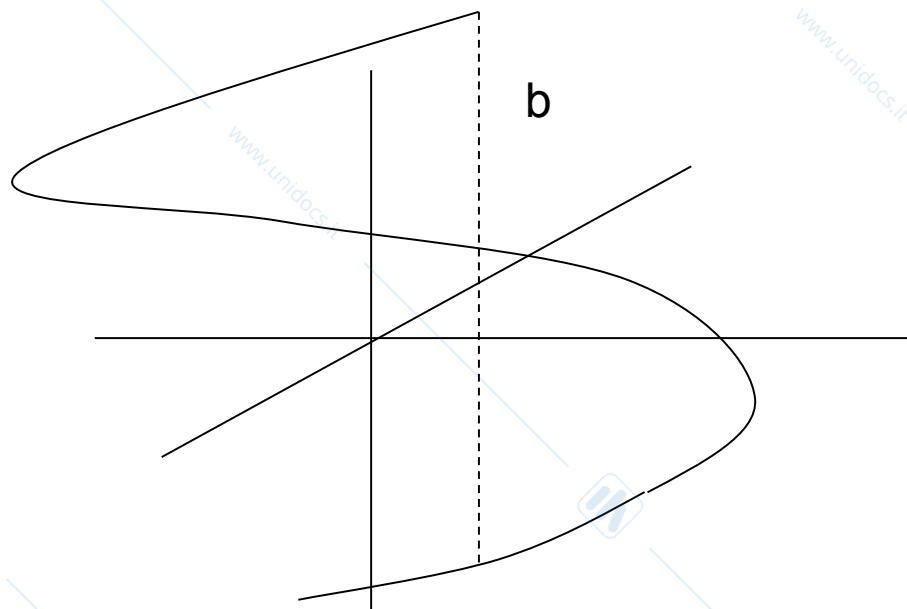


Elica

- Se $a > 0$ e $b \neq 0$, allora la curva nello spazio
 $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$r(t) = (a \cos(2\pi t), a \sin(2\pi t), bt)$$

viene chiamata elica cilindrica di raggio R e passo b



Curve continue e differenziabili

Una curva piana

$$r : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (x(t), y(t))$$

è detta

- continua in t_0 se le sue componenti sono continue in t_0
- differenziabile in t_0 se le sue componenti sono derivabili in t_0
- continua in I se le sue componenti sono continue in I
- differenziabile in I se le sue componenti sono derivabili in I

Osservazione

- Una curva differenziabile è anche continua.

Vettore tangente

- Se la curva piana

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (x(t), y(t))$$

è differenziabile in t_0 allora il vettore

$$r'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

è detto vettore tangente a r in t_0 .

Interpretazione geometrica

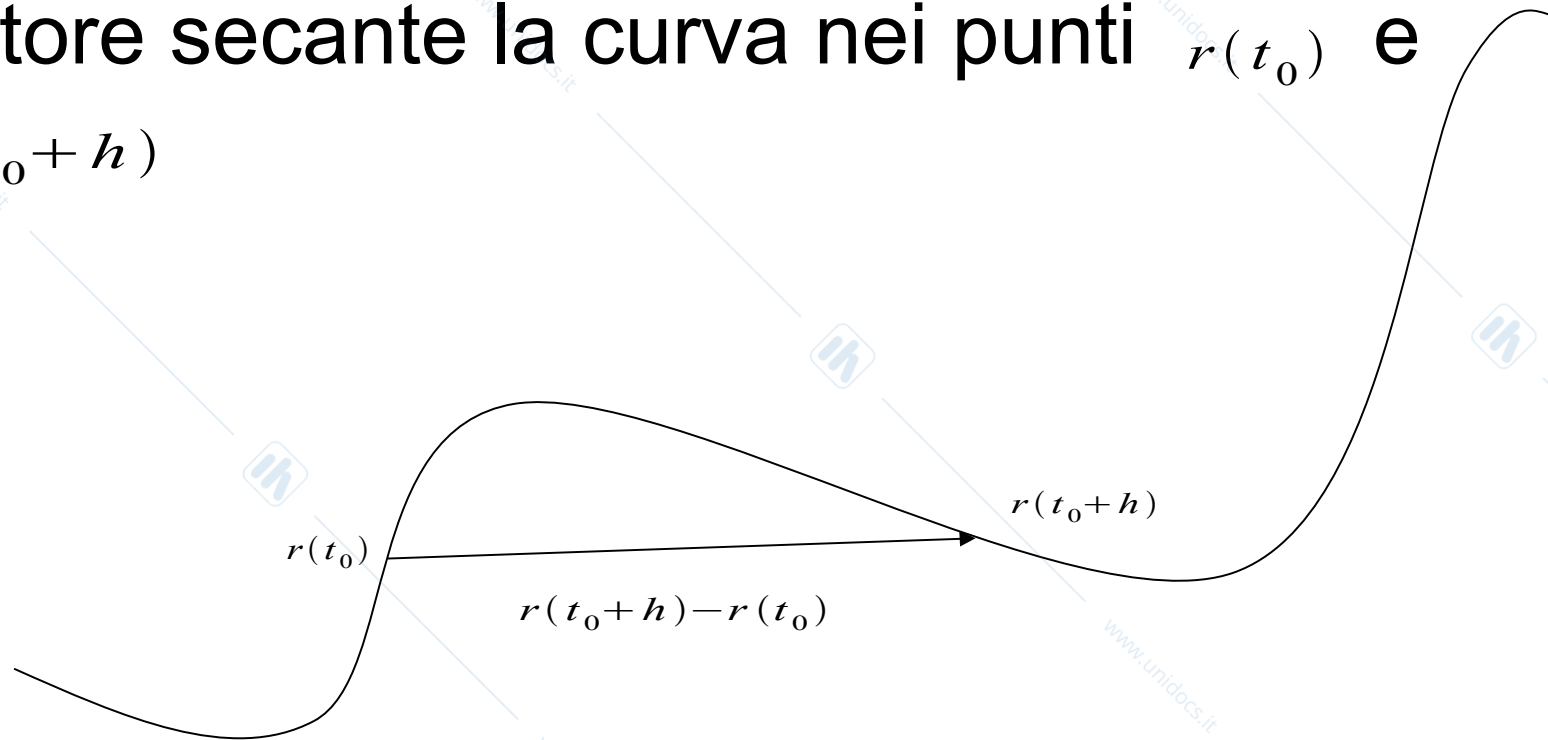
- Se $r(t) = (x(t), y(t))$ allora il vettore tangente, per definizione, è

$$r'(t_0) = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right)$$

Osserviamo che

$$\left(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right) = \frac{1}{h} [r(t_0+h) - r(t_0)]$$

$\frac{1}{h}[r(t_0+h)-r(t_0)]$ è un vettore parallelo al
vettore secante la curva nei punti $r(t_0)$ e
 $r(t_0+h)$



Mandando $h \rightarrow 0$ la secante tende alla
tangente.

Retta tangente

- Se una curva $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile in t_0 e $T = r'(t_0) \neq 0$ allora la retta tangente alla curva nel punto $p_0 = r(t_0)$ è la retta passante per p_0 con vettore direzione T .
- Se $n=2$ la retta ortogonale alla curva in p_0 è la retta normale alla retta tangente passante per p_0 .
- Se $n=3$ il piano ortogonale alla curva in p_0 è il piano normale alla retta tangente passante per p_0 .

Esercizio

- Calcolare l'equazione parametrica e cartesiana della retta tangente e della retta ortogonale in p_0 ad una curva piana.
- Calcolare l'equazione parametrica della retta tangente e l'equazione cartesiana del piano ortogonale in p_0 ad una curva nello spazio.

Esercizio

- Calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente e della retta ortogonale alla curva

$$r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definita ponendo

$$r(t) = (t e^t, 1 - \arctan(2t))$$

nel punto $(0, 1)$.

Curve regolari

- Una curva $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice regolare se è differenziabile in I e il vettore tangente è diverso da zero in ogni punto t di I .

Esercizio

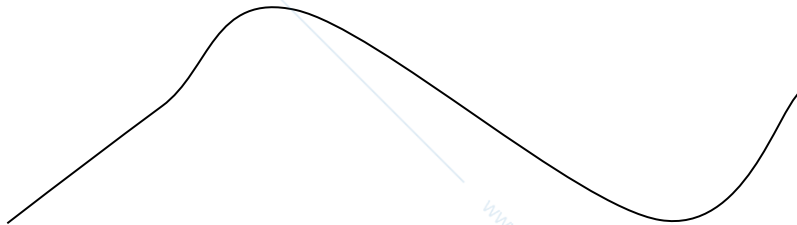
- Verificare che la curva $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$r(t) = \begin{cases} (e^{-1/t^2}, 0) & \text{se } t < 0 \\ (0, e^{-1/t^2}) & \text{se } t > 0 \\ (0, 0) & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

è una curva differenziabile, ma non regolare.
Disegnare il sostegno della curva.

Lunghezza d'arco

- Consideriamo una curva piana regolare
 $r:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^2$. Vogliamo calcolare la lunghezza del sostegno della curva.



Cominciamo con l'approssimare la curva con delle spezzate via via sempre più fitte.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.u



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it



Lunghezza delle spezzate

- Per calcolare la lunghezza dell'arco di curva possiamo calcolare la lunghezza delle spezzate e farne il limite.
- Per ottenere spezzate via via più fitte suddividiamo l'intervallo in n intervalli tutti uguali $[t_i, t_{i+1}]$ e consideriamo la spezzata formata dai segmenti $\overline{r(t_i)r(t_{i+1})}$. La lunghezza della spezzata è

$$L_n = \sum_i \|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|$$

- Per calcolare $\|r(t_{i+1}) - r(t_i)\|$ scriviamolo esplicitamente come

$$\sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

- Siccome, per il teorema di Lagrange,

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i)$$

troviamo che

$$\|r(t_{i+1}) - r(t_i)\| = (t_{i+1} - t_i) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}$$

quindi

$$L_n = \sum_i (t_{i+1} - t_i) \sqrt{x'(\xi_i)^2 + y'(\eta_i)^2}$$

Se $n \rightarrow +\infty$ allora $\xi_i \approx \eta_i$ e quindi il limite della lunghezza delle spezzate diventa il limite delle somme di Cauchy della funzione

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \|r'(t)\|$$

Il limite delle somme di Riemann è l'integrale della funzione e quindi la lunghezza dell'arco di curva è

$$L(r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

Esercizio

- Calcolare la lunghezza dell'arco di curva

$$r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r(t) = (1 - \cos(t), t - \sin(t))$$

Esercizio

Calcolare la lunghezza del grafico della funzione
 $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(t) = \cosh(t)$$