1

No. ANALISI 2

Date 26 11 19

Forme diff. → slide

CAMPI VETT	FORME DIFF.
∇F ⟷	dF

IL CAMPO ω È IL GRADIENTE DI F CIOÈ IL CAMPO È CONSERVATIVO ⟷ ω FORMA ESATTA

$\Updownarrow$

$\omega = dF$

CAMPO IRROTAZIONALE ⟷ ω si dice chiusa

$\Updownarrow$

$\nabla \times \omega = 0$

Se γ è una curva e F è una forma differenziale allora

$$\int_\gamma F = \int_a^b F_1(x,y)\,dx + \int_a^b F_2(x,y)\,dy = \int_a^b F_1(x(t),y(t))\,dx(t) +$$

$$+ \int_a^b F_2(x(t),y(t))\,dy(t) = \int_a^b F_1(X(t),Y(t))\,X'(t)\,dt +$$

$$+ \int_a^b F_2(x(t),y(t))\,y'(t)\,dt = \int_a^b F(x(t),y(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

↪ INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO

$rot F = 0$

es Integra di $F = (2x+y)dx + (2y+x)dy$

su $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$

dominio stellato

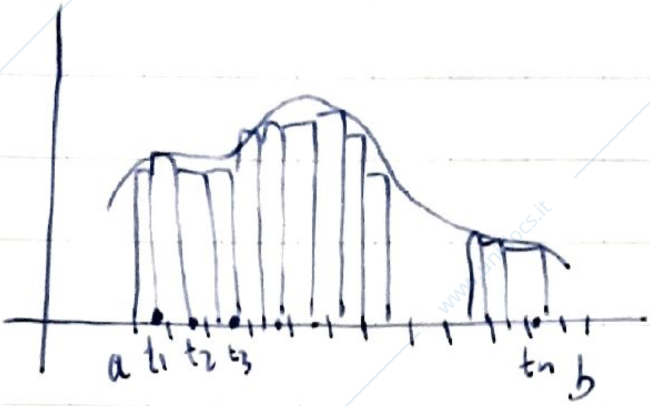
$$\int_\gamma F = \int (2x+y)dx + \int (2y+x)\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos(t) + \sin(t))\, d(\cos(t)) + \int_0^{2\pi} (2\sin(t) + \cos(t))\, d(\sin(t))$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos(t) + \sin(t))(-\sin(t))\, dt + \int_0^{2\pi} (2\sin(t) + \cos(t))\cos(t)\, dt = 0$$

INTEGRALE DOPPIO

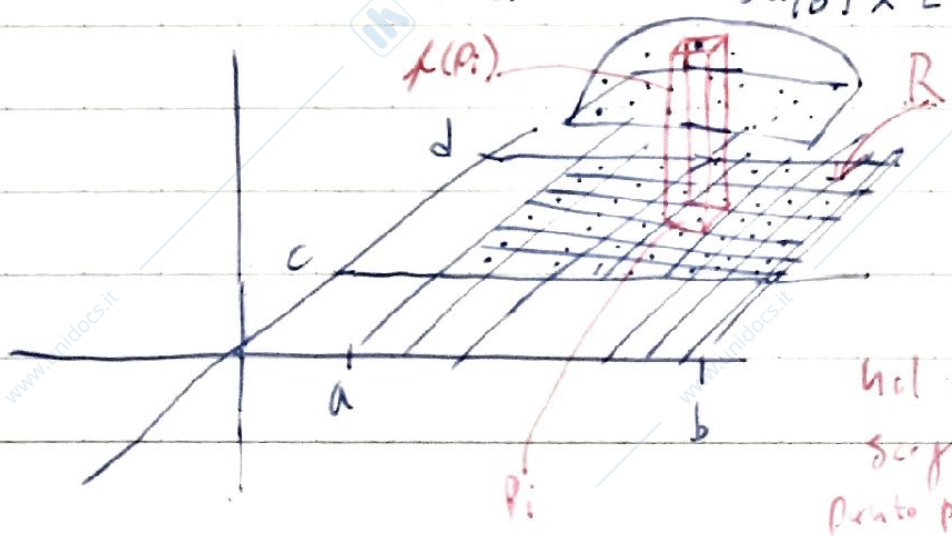
da Analisi 1
con limite delle somme di Riemann



$$\text{AREA (TRAPEZOIDE)} = \sum \frac{b-a}{n} f(t_k)$$

$$\hookrightarrow \int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \left(\sum \frac{b-a}{n} f(t_k) \right)$$

nel caso dell'integrale doppio
↓
in due variabili $\quad R = [a,b] \times [c,d]$



ci sono n^2 rettangolini
frantumiamo i rett.
nel i-esimo rett. scegliamo un punto $P_i = (x_i, y_i)$

Volume (unione parallelepipedi) $= \sum_{i=1}^{n^2} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \cdot F(P_i)$

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} F(x_i, y_i)$$

Ma abbiamo definito l'integrale sulla base di un dominio rettangolare

$\downarrow$

definiamo allora per ogni funzione con dominio limitato

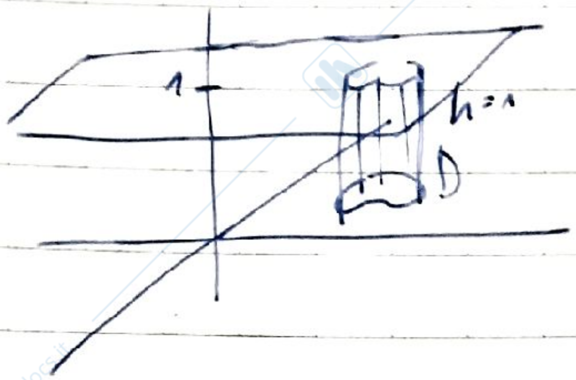
$$\tilde{F} : R \to B \cup \{0\}$$

$$\tilde{F}(x,y) = \begin{cases} F(x,y) \text{ se } (x,y) \in D \\ 0 \text{ se } (x,y) \notin D \end{cases}$$

Interpretazione geometrica

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \text{VOLUME}(\equiv) - \text{VOLUME}(|||)$$

Proprietà



$$\text{AREA}(D) = \iint_D dx\,dy = \text{VOLUME}(\Pi)$$
$$\parallel$$
$$\text{AREA}(D) \times h$$

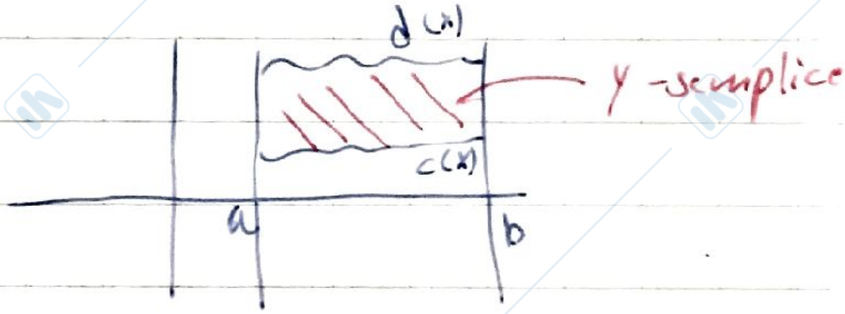
Metodo di: INTEGRAZIONE ITERATA

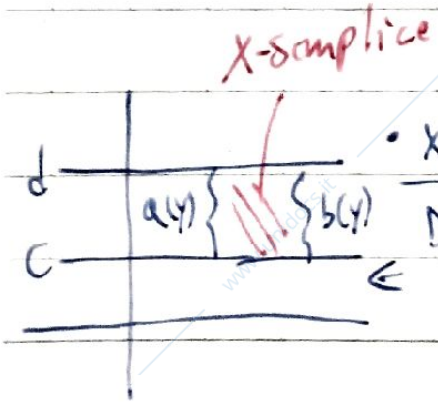
Si fa su domini regolari

→ Domini x-semplici e y-semplici:

- y-semplice

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c(x) \le y \le d(x)\}$$





- x-semplice

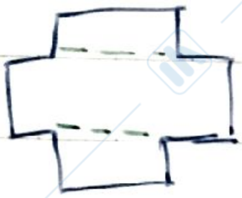
$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ a(y) \le x \le b(y)\}$$

Domini non sovrapposti :

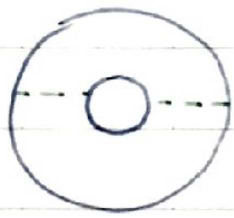
Due domini D_1 e D_2 si dicono non sovrapp. se si intersecano solo sul bordo, cioè $D_1 \cap D_2$ non ha punti interni.

$\Rightarrow$ Dominio regolare = unione finita di domini x-semplici e/o y-semplici non sovrapp.

es.



è regolare (unione di 3 y-semplici)



è regolare

→ Criterio di integrabilità :

Se D è regolare e $F: D \to \mathbb{R}$ è funz cont. allora F è integr.

$\Rightarrow \iint_D F(x,y)\,dx\,dy$ esiste finito

→ Integrazione iterata:

se D è un dominio y-semplice

↳ $$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\,dy \right) dx$$

se D è un dominio x-semplice

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} F(x,y)\,dx \right) dy$$

→ per domini regolari si spezza in domini x sempl. e y sempl.

CAMBIO DI VARIABILI (INTEGRALE DOPPIO)

- Se D è un dominio regolare e $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

- Se D' è un dom. reg. e $G: D' \to \mathbb{R}$ una trasf. regol.

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F(G(u,v)) \,|\det J_G(u,v)|\, du\, dv$$

Jacobiana

Si scrive anche come $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

es.

trasf.

$$G(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \qquad D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ dominio regolare}$$

$$D' = \{(\rho,\theta) \mid (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in D\}$$

$\det DG = \rho$

No. ANALISI 2

Date 29 · 11 · 19

$$\iint_D F(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

es

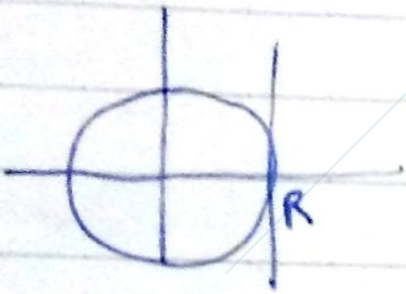
- Calc. area del disco di centro $(0,0)$ e raggio R

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$

Passiamo a coord. polari

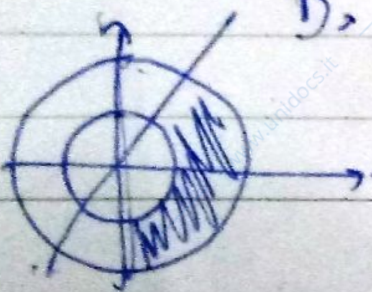
$\text{AREA}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \rho\,d\rho\,d\theta$

$D' = \{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$



- Calc. ~~area~~ di

$D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ x \ge y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4$



$\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \rho\,d\rho\,d\theta = \int_1^2$

3

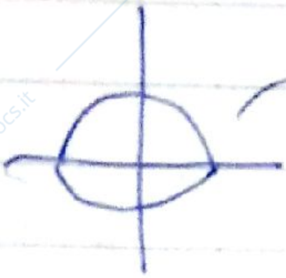
Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ANALISI 2

Date 29 11 19

- Calc. il volume della sfera di raggio R e centro (0,0,0)

Volume (sfera) = 2 Volume (calotta superiore)



è il grafico di

$F(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Volume (calotta superiore) $= \iint_D \sqrt{R-x^2-y^2}\,dx\,dy$ $\quad D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$

$= \iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$

R

$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\theta \right) d\rho$

$= 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho =$

$R^2-\rho^2 = t \qquad dt = -2\rho\,d\rho$

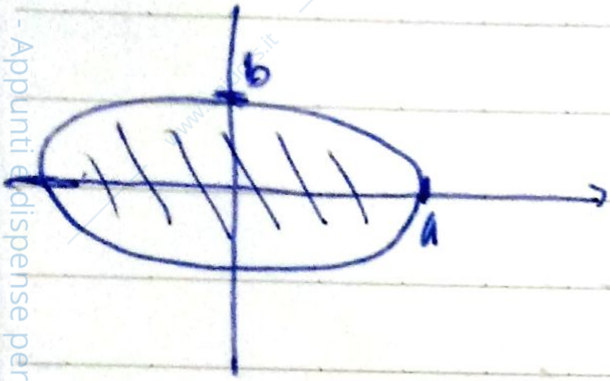
$\rho\,d\rho = -\frac{1}{2}\,dt$

VOLUME(SFERA) $= \frac{4}{3}\pi R^3$

infatti

$= \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}} \int_{\rho=0}^{\rho=R} \sqrt{t}\,dt = -\pi \frac{1}{1+\frac{1}{2}} t^{1+\frac{1}{2}} \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} = -\frac{2}{3}\pi(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}$

- Calc. l'area della regione racchiusa dall'ellisse di eq. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



$$D=\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}=$$

$$\left\{(u,v) \mid u^2+v^2\le 1\right\}$$

$u=\frac{x}{a}$ $\quad v=\frac{y}{b}$ $\quad x=au$ $\quad y=bv$

$G(u,v)=(au,bv)$ $\qquad DG(u,v)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

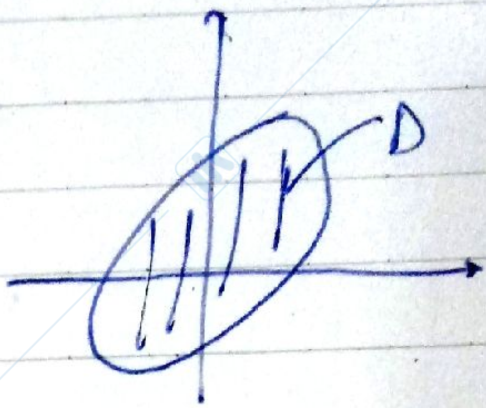
$$\iint_D dx\,dy=\iint_{D'} |\det DG(u,v)|\,du\,dv =$$

$$=\iint_{D'} ab\,du\,dv = ab\iint_{D'} du\,dv =$$

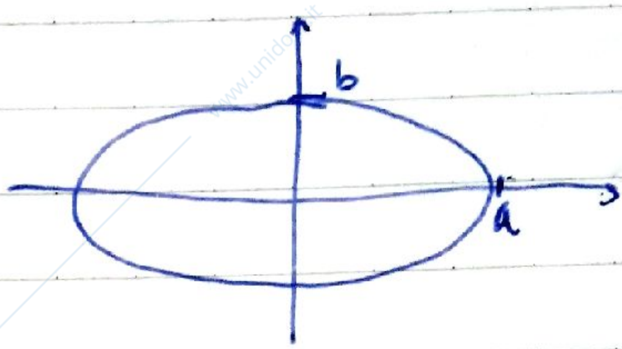
$=ab$ AREA (DISCO DI RAGGIO 1) $= ab\pi$

- Calc. area della regione racchiusa dall'ellisso di equaz.

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$



AREA (D) = AREA (D')



$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$ cerchiamo gli autovalori di A_0

λ_1, λ_2 dove $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$

$$\rightarrow ab = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{1}{\sqrt{\det A_0}}$$

$$\rightarrow \text{AREA}(D) = \frac{\pi}{\sqrt{\det A_0}}$$

es. Calc. la massa e il baricentro di una lamina circolare di raggio R e centro (0,0) avente densità di massa

$$\rho(x,y) = x^2+y^2$$

$$M = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$B = (\bar{x},\bar{y}) \qquad \bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

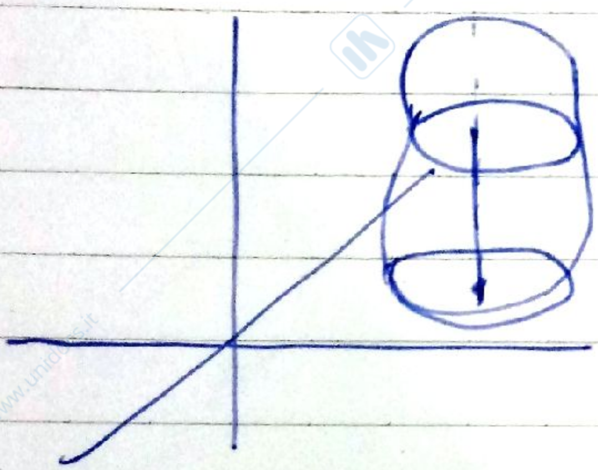
INTEGRALE TRIPLO

slide

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

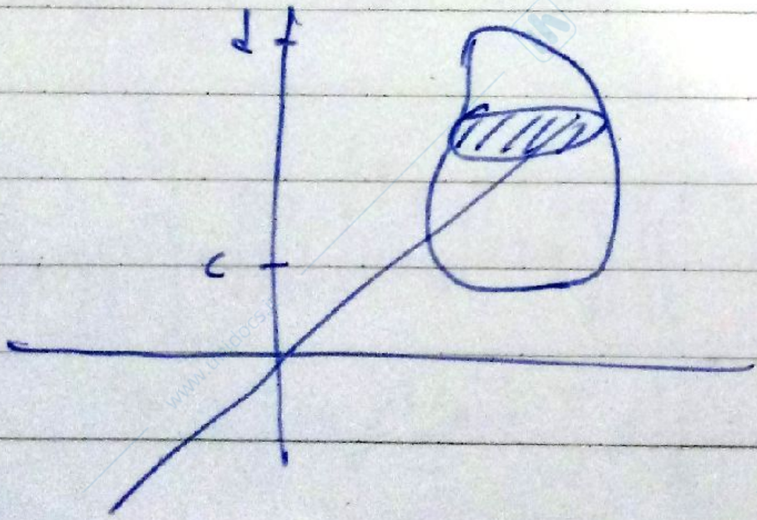
→ Integrazione iterata

Anche in questo caso dovremo determinare bene il dominio



Integrazione per fili

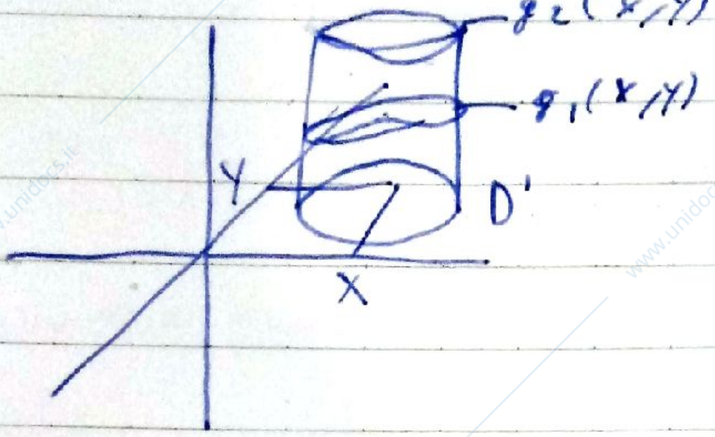
integra su una dimensione e poi si fa integrazione doppia sulla base



Integrazione per strati

Domini z semplici

$$D = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D', \; g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$$

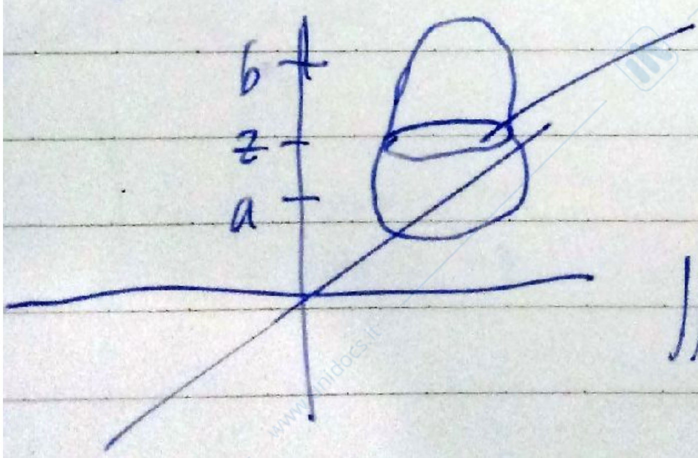


$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{D'} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

Integrazione per fili

Integrazione per strati

Dominio in z è regolare

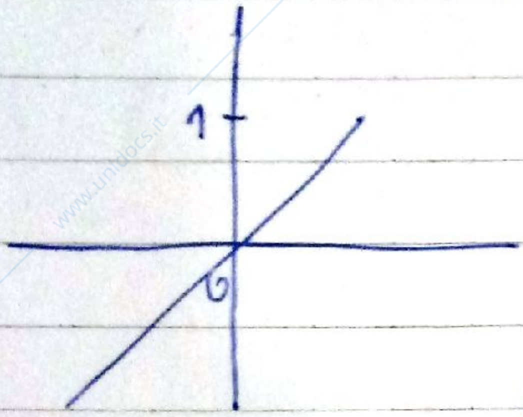


$$\iiint_D F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\iint_{D'(z)} F(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

es

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 1\}$$



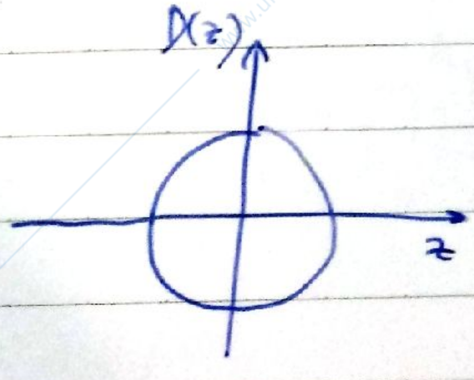
$$D(z)=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le z^2\}$$

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz=\int_0^1 \Big(\underbrace{\iint_{D(z)} (x^2+y^2)\,dx\,dy}\Big)\,dz$$

$$\iint_{D(z)} (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad D(z)=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le z^2\}$$

in coord. pol.

$$\iint_{D'} \rho^2\rho\,d\rho\,d\theta$$



$$D'=\{(\rho,\theta) \mid 0\le\rho\le z,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$$

$$=\int_0^z 2\pi\rho^3\,d\rho=\frac{\pi}{2}\rho^4\Big|_0^z=\frac{\pi}{2}z^4$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \frac{\pi}{2} z^4\,dz = \frac{\pi}{10} z^5 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}$$

→ Cambio variabili → slide

es. Calc. Volume sfera

$$\text{VOLUME(SFERA DI RAGGIO } R) = \iiint_S dx\,dy\,dz =$$

$$S = \left\{(\rho,\varphi,\theta) \,\middle|\, 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

coord. sferiche

$$\int_0^R \left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta\,d\theta\right) d\varphi\right) d\rho = \dots = \frac{4}{3}\pi R^3$$