No. ANALISI 2

Date 22. 10. 19

es. Classificare i punti staz. di:

$$F(x,y) = x^3 + xy + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y$$

$$3x^2 + y = 0 \quad \wedge \quad x + 2y = 0$$

$$\begin{cases} 12y^2 + y = 0 \\ x = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{12} \\ x = +\frac{1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

punti staz.

Calcoliamo la matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det H(x,y) = 12x - 1$$

$(0,0)$

$H(0,0) = -1 < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

$\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$

$H\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1 > 0 \Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO

$\hookrightarrow 6 \cdot \frac{1}{6} > 0$

es $F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \to 3x^2 + 4xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 + 2y$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4xy = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x(3x + 4y) = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(4x - 3) = 0 \\ y = -x^2 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x + 4y \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 4x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$$

$$\det H(0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 0$$ risultato indefinito

$$\det H\left(\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{9}{2} - 9 = -\frac{9}{2} < 0 \to$$ punto di sella

per $(0,0)$ restringiamo alla

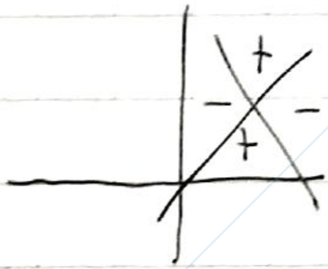
Asse $F(x,0) = x^3$

punto di flesso nè di max nè di min

PUNTO DI SELLA

potremmo anche andare a vedere la funzione

$$\underbrace{F(x,y) - F(x_0,y_0)}$$



se questo è il grafico di questa funz. significa che c'è un punto di sella

es.

Calcolare i punti di massimo assoluto della funz:

$$F(x,y) = (x^2+1)\,e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\,e^{-x^2-y^2} + (x^2+1)\,e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^2+1)\,e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$\begin{cases} 2x\,e^{-x^2-y^2}(1-x^2-1) = 0 \\ -2y(x^2+1)\,e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x(\cancel{1}-x^2-\cancel{1}) = 0 \\ -2y(x^2+1) = 0 \end{cases}$$

$e^{-x^2-y^2}$ sempre $\neq 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo: $\frac{\partial F}{\partial x} = -2x^3 e^{-x^2-y^2}$ $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y(x^2+1)\, e^{-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -6x^2 e^{-x^2-y^2} - 2x^3 e^{-x^2-y^2}(-2x)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2x^3 e^{-x^2-y^2}(-2y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2(x^2+1) e^{-x^2-y^2} - 2y(x^2+1) e^{-x^2-y^2}(2y)$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\det H(0,0) = 0$ indefinito

↳ Osservo che:

Se chiamiamo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

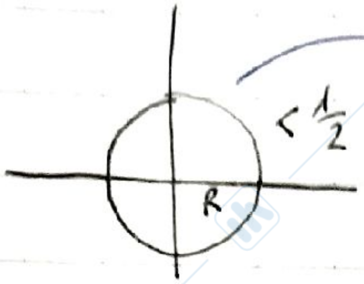
$$(x^2+1)\, e^{-\rho^2} \leq (\rho^2+1) e^{-\rho^2}$$

$$\downarrow \rho \to +\infty$$

$$0$$

Esiste un R t.c. se $\rho \geq R$

$|F(x,y)| \leq (\rho^2+1)\, e^{-\rho^2} < \frac{1}{2}$ ↗ qualsiasi numero < 1



è limitata e chiusa

↓

per Weierstrass ha massimo o minimo

$F(0,0) = 1$

c'è solo un punto stazionario

↳ non è sulla circonferenza, sul bordo del disco (poiché la funz è $< \frac{1}{2}$)

→ devono essere punti interni (ciò che significa che sono punti stazionari)

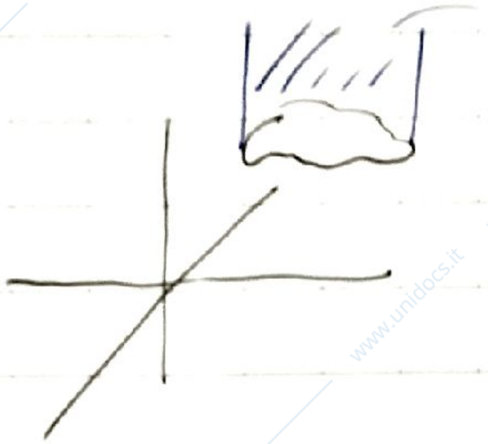
dunque $(0,0)$ è punto di massimo

↓

il massimo è 1

Epigrafico di una funzione

È la regione che sta sopra il grafico di una funzione



epigrafico

Funzioni convesse e concave

D convesso = Dati 2 punti P_1, P_2 in D
$\rightarrow$ il segmento che li congiunge
è in D

il segmento sta nell'epigrafico

D concava = se $-F$ è convessa

F convessa $\rightarrow F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0)(P-P_0)$
(la funzione sta sopra a tutti i piani tang.)

F concava $\rightarrow F(P) \leq F(P_0) + \nabla F(P_0)(P-P_0)$

Corollario (1)

forma quadr. → matrice hessiana

- Se il diff. secondo di F è semidef. pos. in tutto il dominio della funz. allora la funz. è convessa

- Se diff. secondo è semidef. neg. ⟹ funz. concava

→ Diff. secondo semidef. pos.

vuol dire che

$$(h,k)\, H(x,y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \geq 0 \quad \forall (h,k) \quad \forall (x,y)$$

perciò se consideriamo che:

$$F(P) = F(P_0) + \nabla F(P_0)\cdot(P-P_0) \underbrace{+\frac{1}{2}(P-P_0)H(z)(P-P_0)^T}_{\geq 0}$$

↳ $F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0)(P-P_0)$

def. di convessa

→ duale per concava

⟹ Ricaviamo che:
- Se F è convessa, ogni suo punto staz è un punto di MIN. ASS.
- Se F è concava, ogni suo punto staz è un punto di MAX. ASS.

Poichè essendo P_0 un punto staz.

$$F(P) \geq F(P_0) + \nabla F(P_0) \cdot (P - P_0)$$

$\nabla F(P_0) = 0$ $\quad \geq 0$

$$\Rightarrow F(P) \geq F(P_0) \qquad \text{MIN. ASS}$$

es.

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (y - y_i)^2$$

Calcolare punti di min. assoluto di F

↳ dobbiamo trovare il punto che minimizza la somma dei quadrati nel piano.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} 2(x - x_i) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \sum_{i=1}^{n} 2(y - y_i)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \cancel{2}(x - x_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \cancel{2}(y - y_i) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} nx - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ ny - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} \\ y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{y} \end{cases}$$

è la media dei valori

$P_1 = (\bar{x}, \bar{y})$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$$

$$\det H(\bar{x}, \bar{y}) = 4n^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2n > 0$$

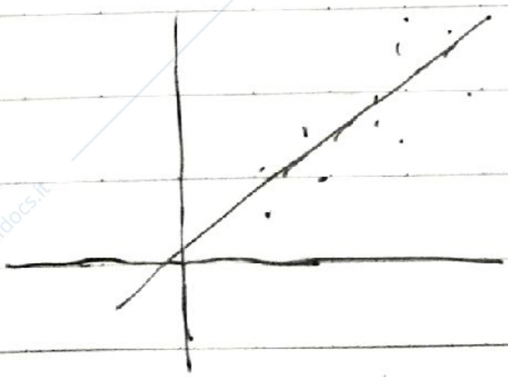
$\rightarrow$ il diff. secondo è sempre definito positivo

$\Leftarrow$ F convessa

$\hookrightarrow$ $P_1(\bar{x}, \bar{y})$ = punto di minimo assoluto

Retta di regressione

Ho tanti dati voglio trovare la retta che meglio approssima i dati



vogliamo minimizzare

$$\sum_{i=1}^{n} (a x_i + b - y_i)^2$$

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i - b - y_i)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)\cdot 1$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

MEDIA: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ $\quad \bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$

VARIANZA: $\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(\bar{x} - x_i)^2}{n}$

COVARIANZA: $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{n}$

Metodo di Kramer:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \qquad s_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix}}$$

$$s_1 = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}\left(\frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x}\bar{y}\right)}{\cancel{n^2}\left(\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right)} =$$

$$= \frac{\bar{p} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{q} - \bar{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = a$$

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad e \quad \bar{q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

$$\sum x_i a + nb = \sum y_i \rightarrow b = \frac{(-\sum x_i a + \sum y_i)}{n}$$

$$= -\bar{x}a + \bar{y}$$

↳ punto staz. $\Rightarrow P_1 = \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}, -\bar{x}\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} + \bar{y}\right)$

La matrice Hessiana è:

$$H(a,b) = \begin{pmatrix} \overbrace{\sum 2x_i^2}^{>0} & \sum 2x_i \\ \sum 2x_i & 2n \end{pmatrix}$$

PUNTO DI MIN. ASS.

$$\det H(a,b) = \sigma_x^2 > 0$$

1

No. ANALISI 2

Date 25 · 10 · 19

Estremi vincolanti

La frontiera è espressa come curva di livello

$g(x,y) = c$

vincolo di uguaglianza

cerchiamo massimo-minimo in questo insieme

F si dice funzione obiettivo

Metodi di risoluzione:

- Esplicitando il vincolo

es.
$$\begin{cases} \max xy \\ s.v. \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$ è il sostegno della curva

$r(t) : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$r(t) = (\cos t, \sin t)$

Il problema si riduce a calcolare il massimo di $F(r(t)) = F(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \frac{\sin 2t}{2}$

e poi calcoliamo il max assoluto di $F(t) = \frac{\sin 2t}{2}$ su $[0, 2\pi]$

$f'(t) = -\sin^2 t + \cos^2 t$

$f'(t) = 0$

$\cos^2(t) = \sin^2(t) \rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$

aggiungiamo $0, 2\pi$

$f(0) = 0 \quad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \quad f(\frac{3}{4}\pi) = -\frac{1}{2} \quad f(\frac{5}{4}\pi) = \frac{1}{2}$

$f(\frac{7}{4}\pi) = -\frac{1}{2} \quad f(2\pi) = 0$

$\Rightarrow$ PUNTI DI MAX $t = \frac{\pi}{4}, t = \frac{5}{4}\pi$

$\downarrow$

$$\begin{cases} \text{MAX } xy \\ \text{sub} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} = \frac{1}{2}$$

- Metodo di Moltiplicatori di Lagrange:

es

$$\begin{cases} \text{MAX } xy \\ \text{sub} \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

non così facile esplicitare il vincolo

Teorema Siano F e g due funzioni di classi C^1 e sia (x^*, y^*) un punto di estremo vincolato per F sotto 1 vincolo $g(x,y) = b$

3

No. ANALISI 2

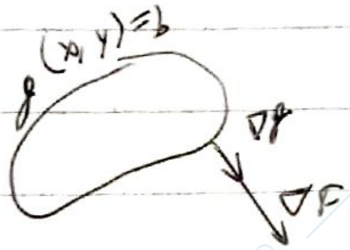
Date 25 · 10 · 19

che vuol dire che :

$$\nabla g(x^*, y^*) \neq \vec{0}$$

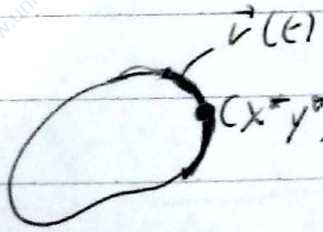
Allora esiste $\nabla F(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$

$\lambda^* \in \mathbb{R}$



Dimostrazione:

Parametrizziamo il vincolo con una curva regolare $\vec{r}$ tale che $\vec{r}(0) = (x^*, y^*)$



$f(t) = F(r(t))$

ha estremo relativo in 0

$\hookrightarrow f'(0) = 0 \qquad f'(0) = \nabla F(x^*, y^*) \cdot r'(0)$

$r'(0)$ è tangente a $g(x,y) = b$ in (x^*, y^*)

$\Rightarrow \nabla F(x^*, y^*)$ è ortogonale alla curva di livello $\Rightarrow$ anche $\nabla g(x^*, y^*)$ è ort. alla curva di livello

$\nabla g(x^*, y^*) \parallel \nabla F(x^*, y^*)$

Se sono proporzionali significa che:

$$\nabla F(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$$

↓

Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = F(x, y) - \lambda [g(x, y) - b]$$

Questa funzione, visto il teorema precedente, la possiamo vedere come:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \nabla F(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) - (g(x, y) - b)$$

se (x^*, y^*) è un estremo vincolato e $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0 \Rightarrow$ esiste λ^* t.c. $\nabla F(x^*, y^*) = \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)$

↳ $\nabla \mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = \underbrace{\nabla F(x^*, y^*) - \lambda^* \nabla g(x^*, y^*)}_{=0} - \underbrace{(g(x^*, y^*) - b)}_{=0} = \vec{0}$

Andremo praticamente a calcolare i punti stazionari della funzione Lagrangiana.

↳ Metodo:
- si trovano i punti non regolari di $g(x, y) = b$
- calcoliamo i punti staz. di $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$
- sostituiamo i punti in F e vediamo min. e max

ES.

$$\begin{cases} \max\ xy \\ \text{sub} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min\ xy \\ \text{sub} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

• Calcolo i punti non regolari del vincolo

$$g(x,y) = x^2+xy+y^2$$

$$\nabla g(x,y) = (2x+y\ ,\ x+2y)$$

Risolvo $\nabla g(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$(0,0)$ non è sul vincolo $\Rightarrow$ non ci sono punti non regolari

• Calcolo i punti staz. della Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda[x^2+xy+y^2-1]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = y-2\lambda x-\lambda y \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = x-\lambda x-2\lambda y \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(x^2+xy+y^2-1)$$

$$\begin{cases} y-2\lambda x-\lambda y=0 \\ x-\lambda x-2\lambda y=0 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\dfrac{2\lambda x}{1-\lambda} \\ x=\dfrac{2\lambda y}{1-\lambda} \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$$

$\rightarrow x\neq 0 \cap y\neq 0$

$\det\begin{pmatrix} -2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -2\lambda \end{pmatrix} = 0$

Se non è 0 ha un'unica soluzione $\rightarrow x=0,\ x=0$

$$\det\begin{pmatrix} -2\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -2\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 4\lambda^2 - (1-\lambda)^2 = 0$$

$$2\lambda = \pm(1-\lambda)$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{4}{3}} \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = -x \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ x = +\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad (1, -1, -1) \quad (-1, 1, -1)$$

punti staz

- Valutiamo F in quei punti (componenti x, y)

$$F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad F(1,-1) = -1 \quad F(-1,1) = -1$$

MAX ASS — MIN ASS

posso farlo poiché il vincolo è un insieme chiuso e limitato

No. ANALISI 2

Date 25 · 10 · 19

Estremi relativi

Se il vincolo non è chiuso e limitato

per trovare un estremo relativo possiamo considerare

$$F'(x,y) = F(x,y) - \lambda^*(g(x,y) - b)$$

se $g(x,y) = b$ allora $F(x,y) = F'(x,y)$

punto staz.

$$\nabla F'(x^*,y^*) = \nabla F(x^*,y^*) - \lambda^* \nabla g(x^*,y^*) = \vec{0}$$

Se (x^*,y^*) è estremo relativo libero per F' allora lo deve essere per F

EQUAZIONI DIFFERENZIALI → MOOC

È un'equazione che coinvolge le derivate di una funzione incognita

la risoluzione consiste nel trovare funzioni che con le loro derivate risolvono l'equazione

es. • $y' = 2y$

→ $y(x) = e^{2x}$ è una soluzione

• $y' = xy$ — EDO (Eq. Diff. Ordinaria)

se la funz. incognita y è una funz della sola variabile x.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ — EDP (Eq. alle Derivate Parz.)

→ noi facciamo solo EDO

L'ordine di una EDO è il massimo ordine delle derivate della funzione incognita

Edo II ordine

$$y'' = F(x, y, y')$$

es. $2y'' - y' + y = 0 \qquad y'' = -\frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = F(x, y, y')$

$3xy'' + y' = x+1 \qquad y'' = \frac{x+1-y'}{3x} = F(x, y, y')$

Si dice scrivere l'equazione in forma normale