Analisi Matematica 2
VII esercitazione

1. Teoremi di esistenza e unicità

1. PROBLEMA Determinare per quale dei seguenti problemi di Cauchy la soluzione esiste ed è unica in un intorno della condizione iniziale.

$$(1)\ \begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

$$(2)\ \begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

2. PROBLEMA Specificare l'intervallo massimale di definizione della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x}y = 2x+1 \\ y(1) = 0 \end{cases} .$$

3. PROBLEMA Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = y^2 + 2y + 1 \\ y(e) = 4 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimo di definizione della soluzione.

4. PROBLEMA Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^x}{ye^{-y^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

specificando l'intervallo massimo di definizione della soluzione e il comportamento della funzione agli estremi di tale insieme.

2. Campi conservativi

5. PROBLEMA Determinare se il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,x)\|^3}(x,y,z)$$

è conservativo e in tal caso calcolare un potenziale.

6. PROBLEMA Per ciascuno dei seguenti campi vettoriali, determinare se è un campo conservativo e in tal caso calcolarne un potenziale.

(1) $F(x,y,z) = (3x^2y^2z, 2x^3yz + z, x^3y^2 + y)$.
(2) $F(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \ln(1+x^2), \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$.
(3) $F(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$.
(4) $F(x,y) = (\sin y - y\sin x + x, \cos x + x\cos y + y)$.
(5) $F(x,y) = (\sin(xy) + xy\cos(xy), x^2 + \cos(xy))$.
(6) $F(x,y) = (2e^y - ye^x, 2xe^y - e^x)$.
(7) $F(x,y) = (2x + y^2, x + 2y)$.
(8) $F(x,y) = (\frac{1}{1+y^2}, -\frac{2xy}{(1+y^2)^2})$.
(9) $F(x,y) = (\frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}})$.
(10) $F(x,y) = (2xy^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$.