# Lezione 29/11

Cambio di variabili e integrale triplo

# Cambio di variabili in una variabile

- Come si è visto in analisi 1 se x(t) è una funzione invertibile e derivabile e a'=x(a), b'=x(b) allora

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

- Esiste una formula analoga per il cambio di variabili nell'integrale doppio.

# Formula del cambio di variabili

- Sia D un dominio regolare e $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.
- Sia D' un dominio regolare e $G : D' \rightarrow D$ una trasformazione regolare:

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

Allora

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(G(u,v))|\det JG(u,v)|\,dudv$$

# Altre notazioni

- Se G(u,v)=(x(u,v),y(u,v)) è una trasformazione regolare allora la sua matrice jacobiana si indica anche con

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Con questa notazione la formula del cambio di variabili diventa

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(x(u,v),y(u,v)) \left|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

# Esempio:coordinate polari

- Se F è una funzione continua con dominio regolare D e

$$D' = \{(\rho, \theta) : (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in D\}$$

allora

$$\iint_D F(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

# Esercizio

- Calcolare l'area del disco di centro (0,0) e raggio R.
- Calcolare l'area di

$$D=\{(x\,,y)|\,x\geq 0,\;\; x\geq y\,,\;\; 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$$

# Esercizio

- Calcolare il volume della sfera di raggio R e centro (0,0,0).

# Esercizio

- Calcolare l'area della regione racchiusa dall'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

# Esercizio

- Calcolare l'area della regione racchiusa dall'ellisse di equazione

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

# Applicazioni fisiche dell'integrale

- Alcune grandezze fisiche si esprimono attraverso l'integrale doppio:
- Se D rappresenta una lamina materiale piana, $\rho(x, y)$ è la denistà superficiale e M è la massa totale della lamina allora il baricentro di D è il punto $(\bar{x}, \bar{y})$ dove

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\rho(x, y)dxdy \qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\rho(x, y)dxdy$$

# Momento d'inerzia

- Il momento d'inerzia della lamina rispetto ad un asse perpendicolare alla lamina è

$$I = \iint_D d^2(x, y)\rho(x, y)\,dxdy$$

dove d(x,y) è la distanza del punto (x,y) della lamina dall'asse.

# Esercizio

- Calcolare la massa e il baricentro di una lamina circolare di raggio R e centro (0,0) avente densità di massa

$$\rho(x, y) = x^2 + y^2$$

# Esercizio

- Calcolare il momento d'inerzia di una sezione di una trave rettangolare omogenea rispetto all'asse perpendicolare alla sezione e passante per il baricentro.

# Definizione di integrale triplo

- La definizione di integrale triplo

$$\iiint_P F(x,y,z)\,dxdydz$$

di una funzione F definita su un parallelepipedo

$$P=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$$

è simile a quella dell'integrale doppio ed è data come limite delle somme di Riemann.

# Definizione di integrale triplo

- Se F è definita su un dominio D limitato si racchiude D in un parallelepipedo P, si estende la funzione F ad una funzione $\tilde{F}$ definita su P ponendo $\tilde{F}$ uguale a zero al di fuori di D e si definisce l'integrale triplo di F come

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dxdydz := \iiint_P \tilde{F}(x,y,z)\,dxdydz$$

# Proprietà dell'integrale triplo

- L'integrale triplo gode delle stesse proprietà di cui gode l'integrale doppio.
- In particolare

$$\iiint_D dxdydz = Volume(D)$$

# Calcolo dell'integrale

- L'integrale triplo si calcola mediante integrazione iterata.
- Ci sono due tipi di integrazione iterata: l'integrazione per fili e l'integrazione per strati.

# Domini z-semplici

- L'integrazione per fili si utilizza quando il dominio della funzione integranda è z-semplice.
- Un dominio D è z-semplice se si può rappresentare nella forma

dove D' è un dominio regolare nel piano e $g_1, g_2$ sono funzioni continue definite su D' tali che

$$D=\{(x,y,z)|(x,y)\in D',\ \ g_1(x,y)\leq z\leq g_2(x,y)\}$$

02/12/19

$$g_1(x,y)\leq g_2(x,y)$$

# Integrazione per fili

- Se F è una funzione continua definita su un dominio z-semplice

$$D=\{(x,y,z)|(x,y)\in D',\ \ g_1(x,y)\le z\le g_2(x,y)\}$$

allora

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{D'}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

# Esempio

- Calcolare $\iiint_D (x+y-3z)\,dxdydz$ dove

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$$

# Esempio

- Calcolare $\iiint_D x\,dxdydz$ dove

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$$

# Integrazione per strati

- Supponiamo che il dominio D di F abbia la forma

$$D=\{(x,y,z) \mid a \leq z \leq b, (x,y) \in D'(z)\}$$

dove D'(z) è un dominio regolare nel piano che dipende da z.

Allora, se F è continua,

$$\iiint_D F(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left( \iint_{D'(z)} F(x,y,z)\,dxdy \right) dz$$

# Esempio

- Calcolare $\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz$ dove

$$D=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leq z^2,\, 0\leq z\leq 1\}$$

# Esempio

- Calcolare il volume del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare intorno all'asse x la parte di piano tra l'asse x e il grafico di una funzione positiva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

# Cambio di variabili

- La formula per il cambio di variabili è del tutto simile a quella per l'integrale doppio.
- Sia $T: D' \to D$ una trasformazione regolare: $T(u,v,w)=(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))$

Sia $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ la sua matrice Jacobiana. Allora, se F è una funzione continua definita su D,

$$\iiint_D F(x,y,z)dxdydz=\iiint_{D'} F(T(u,v,w))|det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}|dudvdw$$

# Coordinate sferiche

- La trasformazione tra coordinate sferiche e cartesiane è

$$x = \rho \cos\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad z = \rho \sin\theta.$$

con $\rho \in [0, +\infty)$ , $\phi \in [0, 2\pi)$ , $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \cos\theta$$

# Esempio

- Calcolare il volume della sfera di raggio R e centro l'origine.

# Coordinate cilindriche

- La trasformazione tra coordinate cilindriche e cartesiane è

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=t.$$

con $\rho\in[0,+\infty)$ , $\theta\in[0,2\pi)$ , $t\in(-\infty,+\infty)$

$$det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,t)}=\rho$$

# Esempio

- Calcolare

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz$$

dove D è il cilindro con base il disco sul piano xy di centro (0,0) e raggio R e altezza h.

# Esempio

- Calcolare il volume di un cono con base di raggio R e altezza h.

# Applicazioni fisiche

- Se un corpo occupa la regione di spazio D e ha densità $\rho(x, y, z)$ allora
- La sua massa totale è $M = \iiint_D \rho(x, y, z)\, dxdydz$
- Il suo baricentro è $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dove
$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_D x\, \rho(x, y, z)\, dxdydz$$
ecc.
- il suo momento d'inerzia rispetto ad un asse fissato è $\frac{1}{M} \iiint_D d^2(x, y, z)\, \rho(x, y, z)\, dxdydz$

dove d(x,y,z) è la distanza di (x,y,z) dall'asse