Lezione 11/10

Derivate seconde

Esempio

- Supponiamo che in una carta topografica l'altezza sul livello del mare nel punto (x,y) sia data dalla funzione

$$h(x,y)=2x^2+xy+y^2$$

- Se ci si trova nel punto (1,1) e ci si muove in direzione nord-est si sale o si scende?

Controesempio

- Se la funzione non è differenziabile la formula del gradiente non vale: sia

$F: R^2 \rightarrow R$ la funzione definita ponendo

$$F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

e sia $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

In questo caso $D_v F(0,0)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ mentre

$$\nabla F(0,0)\cdot v=0$$

Massima salita e massima discesa

- Possiamo riscrivere la formula del gradiente usando l'interpretazione geometrica del prodotto scalare: se θ è l'angolo tra il versore v e $\nabla F(x_0, y_0)$ allora la formula del gradiente dice che

$$D_v F(x_0, y_0) = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \|v\| \cos\theta = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \cos\theta$$

Siccome $-1 \le \cos\theta \le 1$ abbiamo che la massima derivata direzionale si ha quando $\cos\theta = 1$ (cioè $\theta = 0$) e la minima derivata direzionale si ha quando $\cos\theta = -1$ (cioè $\theta = \pi$)

Quindi la massima salita si ha quando v ha la stessa direzione del gradiente e la massima discesa si ha quando v ha la direzione opposta al gradiente. Inoltre la massima salita (cioè il valore massimo di una derivata direzionale) è pari a $\|\nabla F(x_0, y_0)\|$ mentre la massima discesa (cioè il valore minimo di una derivata direzionale) è pari a $-\|\nabla F(x_0, y_0)\|$

Curve di livello

- Supponiamo che $r: I \to R^2$ $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))$ sia una curva il cui sostegno sia contenuto nella curva di livello F(x,y)=C della funzione F.
- Sia $(x_0,y_0)=\mathbf{r}(t_0)$. Chiaramente $\frac{d}{dt}F(r(t))=\frac{d}{dt}C=0$

D'altra parte, per la regola di derivazione di funzioni composte (II Caso)

$$(F\circ r)'(t_0))=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)x'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)y'(t_0)=\nabla F(x_0,y_0)\cdot r'(t_0)$$

- Quindi

$$\nabla F((x_0, y_0) \cdot r'(t_0) = 0$$

cioè IL GRADIENTE E' ORTOGONALE ALLE CURVE DI LIVELLO

Esercizio

- Calcolare l'equazione della tangente all'ellisse

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

nel punto (1,1).

Esercizio

- Calcolare i punti sull'iperbole di equazione

$$x^2 + 4\,xy + 2y^2 = -1$$

in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione x-2y=0

Derivate seconde

- Come per una funzione di una variabile, anche una funzione di due variabili può essere derivata più volte. Data una funzione di due variabili F definita su un insieme aperto D e derivabile in ogni punto di D possiamo considerare le derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x}$ $\frac{\partial F}{\partial y}$ come funzioni su D e calcolarne le loro derivate parziali.

Derivate seconde

- Si ottengono quattro derivate seconde di F:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

La notazione $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right),\dots\dots$ è piuttosto pesante e si preferisce scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

Esercizio

- Sia $F : R^2 \rightarrow R$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \cos(xy) + 3x^2 y^2$$

Calcolare $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

Teorema di Schwartz

- Teorema: Se le derivate $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ esistono

in un intorno di (x_0,y_0) e $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ è continua in (x_0,y_0) allora la derivata

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

esiste ed è uguale a $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

- Naturalmente il teorema continua a valere se si scambiano i ruoli di $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

Corollario

- Se D è un aperto e $F : D \to \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili tale che le sue derivate seconde esistono e sono continue in D allora

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Derivate successive

- Naturalmente si possono definire le derivate terze, quarte, n-esime: le derivate terze sono le derivate parziali delle derivate seconde e quindi sono

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x \partial y} \ldots$$

Definizione

- Una funzione $F: D \to \mathbb{R}$ con D aperto si dice di classe C^k se tutte le sue derivate fino all'ordine k sono continue in D.
- Si dice di classe C^∞ se le sue derivate di qualsiasi ordine sono continue in D.

Teorema

- Se F è di classe C^{∞} allora nelle derivate l'ordine di derivazione non conta.

Esempio

- Se F è di classe C^∞ allora ci sono solo quattro derivate terze:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$$

Sviluppo di Taylor con resto di Peano

- Sia D un aperto in $\mathbb{R}^2$ e sia $F: D \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili di classe C^2.
- Fissiamo un punto $P_0=(x_0,y_0)$ in D e un versore $v=(h,k)$.
- Consideriamo la funzione $g(t)=F(P_0+tv)$ definita in un intervallo $I=(-t_0,t_0)$.

Sviluppo di Taylor di g(t)

- Sappiamo che lo sviluppo di Taylor al II ordine con centro t=0 con resto di Peano di g(t) è

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(0)t^2+o(t^2)$$

- Vogliamo riscrivere questa formula in termini di F(x,y) e delle sue derivate.

Sviluppo di g(t) in termini di F(x,y)

- Per definizione $g(t)=F(P_0+tv)$ quindi

$$g(0)=F(P_0)$$

inoltre

$$g'(0)=D_v F(P_0)$$

- Siccome F è di classe C^2 possiamo usare la formula del gradiente e troviamo

$$g'(0)=\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)k$$

Calcolo di g''(0)

- Per calcolare g''(0) dobbiamo prima calcolare g'(t): siccome $g(t)=F(P_0+tv)$ e F è differenziabile, possiamo usare la formula di derivazione di funzione composta (Caso II) e troviamo

$$g'(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)k$$

quindi

$$g''(0)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv)\right)_{|t=0}h+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv)\right)_{|t=0}k$$

Calcolo g''(0)

- Osserviamo che $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv))_{|t=0} = D_v \frac{\partial F}{\partial x}(P_0)$

e

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv))_{|t=0} = D_v \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)$$

- Siccome F è di classe C^2 allora $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono differenziabili quindi possiamo applicare la formula del gradiente e troviamo $\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0+tv))_{|t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(P_0)k$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(P_0+tv))_{|t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(P_0)h + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k$$

Calcolo g''(0)

- Sostituendo si trova

$$g''(0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2$$

- Siccome F è di classe C^2 , possiamo applicare il teorema di Schwarz e troviamo

$$g''(0)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2$$

Sviluppo di Taylor con resto di Peano

- Sostituendo tutto nello sviluppo di Taylor

$$g(t)=g(0)+g'(0)t+\frac{1}{2}g''(0)t^2+o(t^2)$$

troviamo

$$F(P_0+tv)=F(P_0)+t\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)k\right)$$
$$+\frac{1}{2}t^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(P_0)h^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(P_0)hk+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(P_0)k^2\right)+o(t^2)$$

Questo è lo sviluppo di Taylor di F(x,y) di ordine 2 in P_0 con resto di Peano.