

Lezione 6/12

Serie di Fourier

Esercizio (formule di Werner)

- Verificare che

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Esercizio

- Verificare che

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(p) + \cos(q))$$

$$\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(p) + \sin(q))$$

$$\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\cos(p) - \cos(q))$$

Funzioni a valori complessi

- Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Allora possiamo scrivere

$$f(x) = f_{\Re}(x) + i f_{\Im}(x)$$

dove $f_{\Re} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_{\Im} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni a valori reali.

Diremo che f è continua se f_{\Re} e f_{\Im} lo sono.

Integrale di funzioni a valori complessi

- Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione a valori complessi continua allora possiamo definire l'integrale di f come

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f_{\Re}(x) dx + i \int_a^b f_{\Im}(x) dx$$

Primitiva di una funzione a valori complessi

- Se $f(x) = f_{\Re}(x) + i f_{\Im}(x)$ è una funzione a valori complessi, allora una primitiva di f è una funzione $F(x) = F_{\Re}(x) + i F_{\Im}(x)$ tale che

$$F'_{\Re}(x) = f_{\Re}(x) \quad \text{e} \quad F'_{\Im}(x) = f_{\Im}(x)$$

- Chiaramente, se F è una primitiva di f , allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Esercizio

- Sia $k \in \mathbb{C}$. Calcolare

$$\int_a^b e^{kx} dx$$

- Siano k e h interi. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx$$

e

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{ihx} dx$$

Esercizio

- Siano k, h interi. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(hx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) \sin(hx) dx$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx) \sin(hx) dx$$

Funzioni periodiche

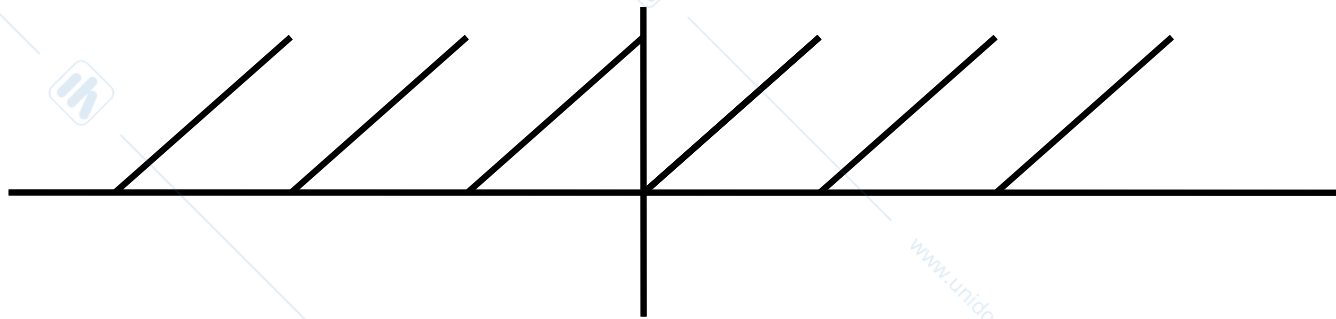
- Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se $f(x+T)=f(x)$ per ogni x .
- E' chiaro che una funzione periodica di periodo T è determinata dai suoi valori in un qualsiasi intervallo $[x_0, x_0+T)$.
- Ad esempio le funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$ sono periodiche di periodo 2π
- Ad esempio le funzioni $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ sono periodiche di periodo T .

Prolungamento periodico

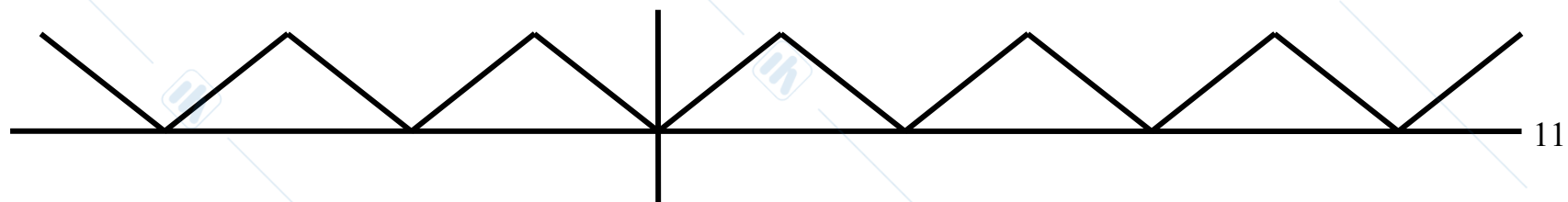
- Data una qualsiasi funzione $g : [x_0, x_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}$ esiste un'unica funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T che, ristretta a $[x_0, x_0 + T)$, coincide con g .
- Questa funzione f si ottiene replicando il grafico di g in ogni intervallo $[x_0 + kT, x_0 + (k+1)T)$ con k intero.
- Questa funzione è detta prolungamento periodico di g .

Esempi

- $g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x)=x$ ha come prolungamento periodico la funzione il cui grafico è



- $g : [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x)=|x|$ ha come prolungamento periodico la funzione il cui grafico è



Disuguaglianza di Schwarz

- Sia $L^2(T)$ l'insieme delle funzioni f periodiche di periodo T e tali che esiste finito

$$\int_0^T f(x)^2 dx$$

Se $f, g \in L^2(T)$ allora vale la seguente disuguaglianza di Schwarz

$$\int_0^T |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_0^T f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T g(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Lo spazio vettoriale $L^2(T)$

- Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che se $f, g \in L^2(T)$ allora anche $f + g \in L^2(T)$, infatti

$$\begin{aligned} \int_0^T (f(x) + g(x))^2 dx &= \int_0^T f(x)^2 dx + 2 \int_0^T f(x)g(x) dx + \int_0^T g(x)^2 dx \\ &\leq \int_0^T f(x)^2 dx + 2 \left| \int_0^T f(x)g(x) dx \right| + \int_0^T g(x)^2 dx \\ &\leq \int_0^T f(x)^2 dx + 2 \int_0^T |f(x)g(x)| dx + \int_0^T g(x)^2 dx \\ &\leq \int_0^T f(x)^2 dx + 2 \left(\int_0^T f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^T g(x)^2 dx \right)^{1/2} + \int_0^T g(x)^2 dx \\ &= \left(\left(\int_0^T f(x)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^T g(x)^2 dx \right)^{1/2} \right)^2 < +\infty \end{aligned}$$

Lo spazio vettoriale $L^2(T)$

- Ne segue che $L^2(T)$ è chiuso rispetto alla somma. Ovviamente è anche chiuso rispetto al prodotto per una scalare e quindi è un sottospazio dello spazio vettoriale di tutte le funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} . Quindi $L^2(T)$ è uno spazio vettoriale.

Esempi di vettori in $L^2(T)$

- Le funzioni $\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ e $\sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$ sono elementi di $L^2(T)$.

- Più in generale, se h è un intero, le funzioni

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T}hx\right) \quad \sin\left(\frac{2\pi}{T}hx\right)$$

sono in $L^2(T)$.

Polinomi trigonometrici

- Siccome $L^2(T)$ è uno spazio vettoriale, le combinazioni lineari di queste funzioni sono ancora in $L^2(T)$. Quindi le funzioni del tipo

$$a_0 + \sum_{h=1}^n \left(a_h \cos\left(\frac{2\pi}{T} hx\right) + b_h \sin\left(\frac{2\pi}{T} hx\right) \right)$$

sono in $L^2(T)$

- Queste funzioni sono dette polinomi trigonometrici di periodo T e ordine n .

Prodotto scalare su $L^2(T)$

- Date due funzioni f, g in $L^2(T)$ si definisce il loro prodotto scalare $\langle f, g \rangle$ come

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x) g(x) dx$$

- Si usa la notazione $\langle f, g \rangle$ invece che la tradizionale notazione $f \cdot g$ perché quest'ultima si potrebbe confondere con il prodotto di funzioni.

Proprietà del prodotto scalare

- Valgono le seguenti proprietà: se $a, b \in \mathbb{R}$
e $f, g, h \in L^2(T)$ allora

$$\langle h, af+bg \rangle = a \langle h, f \rangle + b \langle h, g \rangle \quad (\text{bilinearità})$$

$$\langle af+bg, h \rangle = a \langle f, h \rangle + b \langle g, h \rangle$$

$$\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle \quad (\text{simmetria})$$

$$\langle f, f \rangle \geq 0 \quad (\text{positività})$$

Norma

- Definiamo la norma di $f \in L^2(T)$ come

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

- Dalla disuguaglianza di Schwarz ricaviamo che

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

e, come abbiamo già visto, che

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Quest'ultima è la disuguaglianza triangolare.

Distanza e ortogonalità

- Usando la norma possiamo definire la distanza tra due funzioni f e g come

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

Questa distanza viene chiamata “scarto quadratico medio”.

- Diremo inoltre che due funzioni f e g sono ortogonali se

$$\langle f, g \rangle = 0$$