1

No. ANALISI 2

Date 08 . 10 . 19

Esercitazione in aula 3.0.2

↳ Esercitatore: Prof. Davide Marangoni

Regole di derivazione parziale

1. Abbiamo $F: D \to I \subseteq \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^2$
e possiamo prendere
$f: I \to \mathbb{R}$
e poi fare $f \circ F : D \to \mathbb{R}$

qui si possono calcolare le derivate rispetto alle 2 variabili

2. Abbiamo $\overset{\text{curva}}{r}: I \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ $F: D \to \mathbb{R}$
e fare
$F \circ r : I \to \mathbb{R}$ — derivata rispetto a una variabile

3. Abbiamo $G: D_1 \to D_2$ $D_1 \subseteq \mathbb{R}^2$
e $F: D_2 \to \mathbb{R}$ $D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$

$F \circ G : D_1 \to \mathbb{R}$ — derivate parziali

↳ calcolo derivate su slide
(II caso → differenziabile per curva = avere vettore tangente)

deve essere differenziabile

es.

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad F(x,y) = x^2 + y^2$

$r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad r(t) = (e^t, e^{-t})$

$g = F \circ r \quad \to g(t) = e^{2t} + e^{-2t}$

$\hookrightarrow g'(t) = 2e^{2t} - 2e^{-2t}$

da $g'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$

dove $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$

$x'(t) = e^t \qquad y'(t) = -e^{-t}$

$x = x(t) = e^t \qquad y = y(t) = e^{-t}$

$\hookrightarrow g'(t) = 2e^t \cdot e^t + 2(e^{-t})(-e^{-t}) =$

$= 2e^{2t} - 2e^{-2t}$ ✓

<u>Controesempio</u>

$v: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad v(t) = (t, t)$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

non differenziabile

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(0+h, 0) - \overbrace{F(0,0)}^{=0}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 0}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \frac{h \cdot 0}{h^3} = 0$$

$$g'(0) = (F \circ v)'(0) = \overbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}^{=0}(x(0), y(0))\, x'(0) + \overbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}^{=0}(0,0)\, y'(0) = 0$$

ma $g(t) = F(v(t)) = \frac{1}{2} t \quad \forall t$

$\neq$

$\hookrightarrow \quad g'(0) = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow$ se non è differenziabile non posso applicare la regola di derivazione es.

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$F(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$D = [(\rho,\theta) \mid \rho > 0]$$

e $\Gamma : D \to \mathbb{R}^2$

$$\Gamma(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$G(\rho,\theta) = (F \circ \Gamma)(\rho,\theta) = F(\Gamma(\rho,\theta)) = F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$= e^{\rho^2\cos^2\theta} + e^{\rho^2\sin^2\theta} = e^{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = e^{\rho^2}$$

$$\hookrightarrow G(\rho,\theta) = e^{\rho^2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} = e^{\rho^2} \cdot 2\rho \qquad \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0$$

→ dalla regola di derivazione, dove:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x^2+y^2} 2x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$$

$$\frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial \rho} = \cos\theta \qquad \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial \rho} = \sin\theta$$

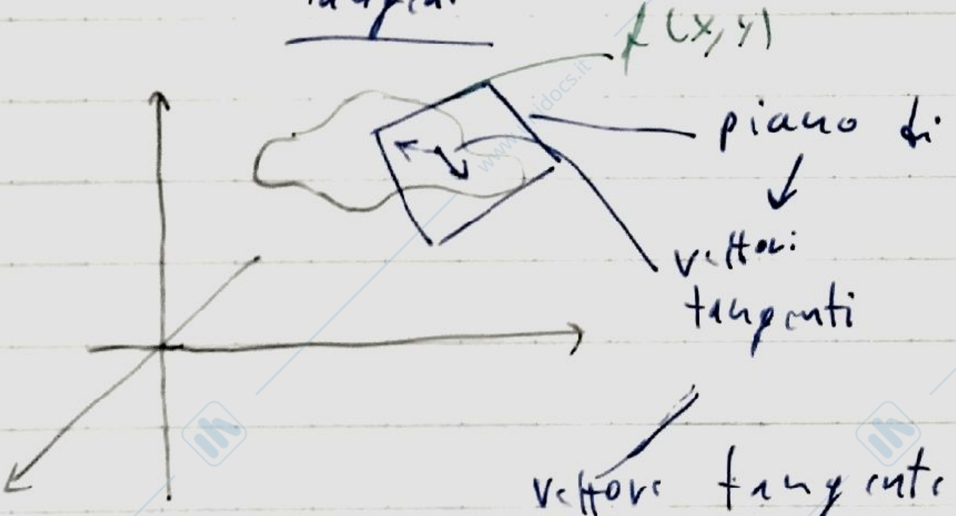
$$\frac{\partial(\rho\cos\theta)}{\partial\theta} = -\rho\sin\theta \qquad \frac{\partial(\rho\sin\theta)}{\partial\theta} = \rho\cos\theta$$

$$\rightarrow \frac{\partial G}{\partial\rho} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho} = e^{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\cdot 2\rho\cos^2\theta + e^{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\cdot 2\rho\sin^2\theta =$$

$$= 2\rho e^{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = 2\rho e^{\rho^2} \checkmark$$

$$\frac{\partial G}{\partial\theta} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = e^{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\cdot(\underbrace{-2\rho\cos\theta\sin\theta}_{\to 0}) + e^{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)}\cdot(\underbrace{2\rho\sin\theta\cos\theta}_{\to 0}) = 0 \checkmark$$

Equazione del piano tangente



vettore tangente $v'(t_0)$ di una curva $v(t)$ derivabile avente sostegno sul grafico

→ Calcolo equazione piano tangente:

i vettori tangenti in (x_0, y_0) sono fatti così:

$$r'(t) = x'(t)\cdot \hat{\imath} + y'(t)\cdot \hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t)\right)\hat{k}$$

↓ in particolare in (x_0, y_0)

$$r'(t_0) = a\,\hat{\imath} + b\,\hat{\jmath} + c\,\hat{k}$$

$$\rightarrow x'(t_0) = a$$

$$y'(t_0) = b$$

$$c = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,a + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\,b$$

↳ dunque l'eq del piano tangente

$$z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\,x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\,y$$

punto sul grafico

↓ impongo il passaggio per il punto $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$

$$z = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

||

Approssimazione lineare di F in (x_0, y_0)

GRADIENTE

Se $F: D \to \mathbb{R}$ è una funz. in 2 variabili e (x_0, y_0) è un punto interno di D in cui F è derivabile (ossia esistono le derivate parziali), allora il gradiente è:

nel punto (x_0, y_0)

$$\nabla F(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

es.

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$F(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

$$\downarrow$$

$$\nabla F = \left(2x e^{x^2+y^2}, 2y e^{x^2+y^2} \right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Derivate direzionali

Consideriamo:

$v = (l, m)$ $\qquad l^2 + m^2 = 1$

vettore → versore

la derivata direzionale è:

$$D_v F(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + hl, y_0 + hm) - F(x_0, y_0)}{h}$$

Come si calcolano le derivate direzionali?

↳ ci muoviamo sugli assi

prima con $v = \hat{i}$

e poi $v = \hat{j}$

dopo di che otteniamo

↳ $\boxed{D_v F(x_0, y_0) = \nabla F(x_0, y_0) \cdot v}$

Formula del gradiente

→ Dimostrazione "Formula del gradiente"

definizione di derivata direzionale

$$\frac{d F(x_0+tl, y_0+tm)}{dt}\Big|_{t=0} = \underbrace{\frac{d F(v(t))}{dt}\Big|_{t=0}}_{da}$$

$$v(t) = (x_0+tl, y_0+tm)$$

applico regole di derivazione

$$F(v(t)) = F(x_0+tl, y_0+tm)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\, x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\, y'(0) =$$

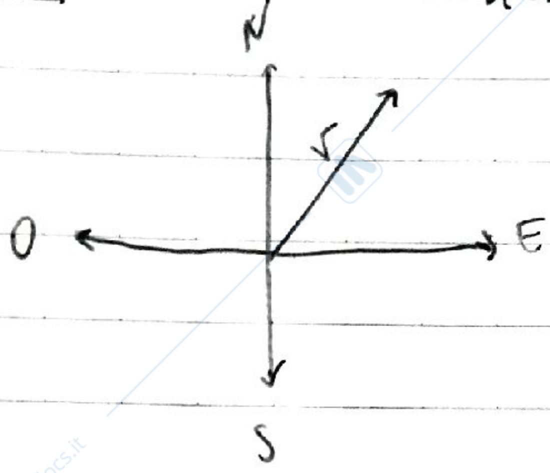
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\, l + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\, m =$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(l, m) =$$

$$= \nabla F(x_0, y_0) \cdot v$$

es.

$$h(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$$



$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$D_v h(1,1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x + y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = x + 2y$$

sono continue in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow h$ è differenz.

Applico la regola del gradiente $D_v h(1,1) = \nabla h(1,1) \cdot v$

$$\nabla h(1,1) = (5,3)$$

$$\hookrightarrow D_v h(1,1) = (5,3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \frac{8}{\sqrt{2}} > 0$$

Sale

vettore va verso l'alto

Controesempio

Se la funzione non è differenziabile

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e sia $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$D_v F(0,0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $\quad D_v F(x_0,y_0) = \dfrac{d}{dt} F(x_0+tl, y_0+tm)\Big|_{t=0}$

$\downarrow$ da

;

$$D_v F(0,0) = \frac{d}{dt} F\left(0+\frac{t}{\sqrt{2}}, 0+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\left(t^2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2}+\frac{t^2}{2}}\right) = \frac{d}{dt}\frac{t^{\cancel{3}}}{\cancel{t^2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ma

$\nabla F(0,0) = 0 \qquad \nabla F(0,0)\cdot v = 0 \neq$

non funziona perché non è diff.

Massima salita e discesa

Consideriamo

$$D_r F(x_0, y_0) = \nabla F(x_0, y_0) \cdot r = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \|r\| \cos\hat{\theta}$$

$\hat{\theta}$ = ANGOLO TRA r e $\nabla F(x_0, y_0)$

$$D_r F(x_0, y_0) = \|\nabla F(x_0, y_0)\| \cos\hat{\theta}$$

$$\underbrace{-\|\nabla F(x_0, y_0)\|}_{\text{minimo}} \leq D_r F(x_0, y_0) \leq \underbrace{\|\nabla F(x_0, y_0)\|}_{\text{massimo}}$$

Se $\hat{\theta} = 0 \rightarrow D_r F(x_0, y_0) = \|\nabla F(x_0, y_0)\|$

$$r = \frac{\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|}$$ — ha la stessa direzione del gradiente

↓

MASSIMA SALITA

Se $\theta = \pi \rightarrow D_r F(x_0, y_0) = -\|\nabla F(x_0, y_0)\|$

$$r = \frac{-\nabla F(x_0, y_0)}{\|\nabla F(x_0, y_0)\|}$$ — ha direzione opposta al gradiente

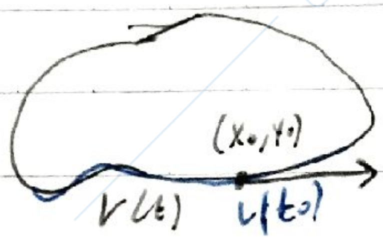
↓

MASSIMA DISCESA

Curve di livello

Consideriamo una curva di livello:

$F(x,y) = c \rightarrow$



parametrizzo la curva di livello (almeno vicino al punto (x_0,y_0))

$$\left.\frac{d}{dt} F(\gamma(t))\right|_{t=t_0}$$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} c = 0$$

Applicando la regola di derivazione:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)\, x'(t_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\, y'(t_0)$$

che possiamo scrivere come

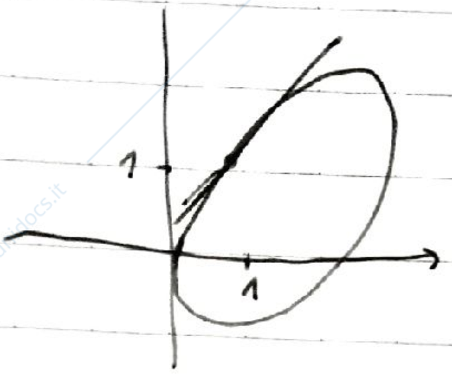
$$= \nabla F(x_0,y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\gamma'(t_0) \perp \nabla F(x_0,y_0)$$

es. Calcolare eq. tangente all'ellisse: $x^2+xy+y^2=3$ nel punto $(1,1)$

$F(x,y)=x^2+xy+y^2$



l'ellisse è una curva di livello di $F(x,y)$

$\nabla F(1,1)$ è ortogonale all'ellisse

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+y$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y}=x+2y$ $\quad \nabla F(1,1)=(3,3)$

La tangente ha equazione:

$$3x+3y=c$$

Imponiamo il passaggio per $(1,1)$

$$3\cdot 1+3\cdot 1=c \qquad c=6$$

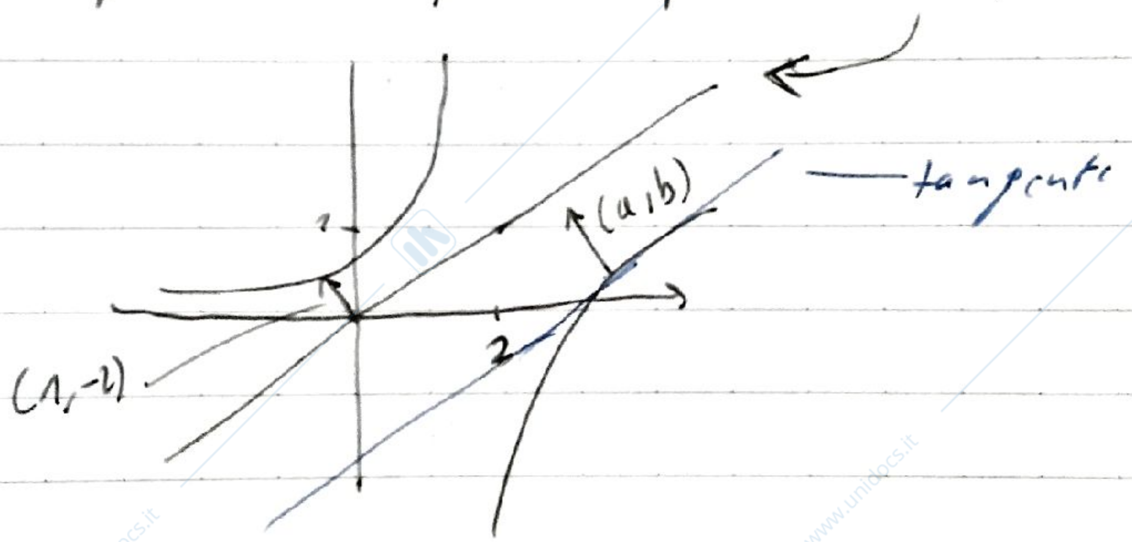
$$3x+3y=6$$

es. Calcolare i punti sull'iperbole di eq.:

$$x^2 + 4xy + 2y^2 = -1$$

in cui la retta tangente è parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$

Cerchiamo un punto (x_0, y_0) tale che la retta tangente in (x_0, y_0) è parallela a $x - 2y = 0$



per avere parallelismo dobbiamo avere che:

$(1, -2) \parallel (a, b)$

$$(a,b) = \nabla F(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 4y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 4x + 4y$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 + 4y_0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 4x_0 + 4y_0$$

Voglio dire vuol dire che sono dipendenti

$(2x_0+4y_0,\ 4x_0+4y_0) \parallel (1,-2)$

$\hookrightarrow \det\begin{pmatrix} 2x_0+4y_0 & 4x_0+4y_0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$

perché sono dipendenti

$-4x_0 - 8y_0 - 4x_0 - 4y_0 = 0$

$8x_0 + 12y_0 = 0$

$\hookrightarrow$ mi serve un'altra eq. in modo da avere tutti e due i parametri

$$\begin{cases} 8x_0+12y_0=0 & x_0 = -\frac{3}{2}y_0 \\ x_0^2+4x_0y_0+2y_0^2=-1 \end{cases}$$

$\frac{9}{4}y_0^2 - 6y_0^2 + 2y_0^2 = -1$

$-7y_0^2 = -4 \qquad y_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{7}} \quad \ldots$

DERIVATE SECONDE

Consideriamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

se faccio le derivate seconde ho 4 possibilità:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

In realtà c'è della ridondanza poiché in generale sono solo 3.

es. Calcolare le derivate seconde di:

$$F(x,y) = \cos(xy) + 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\sin(xy)\cdot y + 6xy^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\sin(xy)\cdot x + 6x^2y$$

- $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\cos(xy)\cdot y^2 + 6y^2$

- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = -\cos(xy) \cdot x \cdot y - \sin(xy) + 12xy$

$$||$$

- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\cos(xy) \cdot y x - \sin(xy) + 12xy$

- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \cos(xy) x^2 + 6x^2$

TEOREMA DI SCHWARTZ:

Se esistono le derivate $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ in un intorno di (x_0, y_0) e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ è continua in (x_0, y_0) allora la derivata:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \text{ esiste ed è}$$

$$\text{uguale a } \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

Corollario

Se D è aperto e $F: D \to \mathbb{R}$ è una funz. di due variabili tale che le sue derivate seconde esistono e sono continue in D allora

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

teorema un po' più debole rispetto a quello di Schwartz poiché implica l'esistenza di tutte e 2 le derivate seconde

Oss.

Se le derivate terze di F sono continue in allora le derivate terze sono:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} \quad \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}$$

Classi di continuità

Se le derivate seconde di F sono continue la funzione è di classe C^2.

poiché significa che le derivate prime sono differenziabili e quindi anch'esse continue

✓

Teorema (di Schwartz)

Se F è di classe C^∞ allora nelle derivate l'ordine di derivazione non conta.

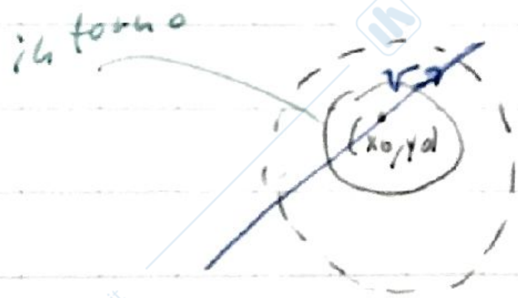
SVILUPPO DI TAYLOR

Consideriamo una funzione di due variabili di classe C^2

↳ $F : D \to \mathbb{R}$

D aperto in $\mathbb{R}^2$

e consideriamo un versore:



$v = (h, k) \qquad h^2+k^2=1$

$P_0 = (x_0, y_0)$

$$g(t) = F(x_0 + th, y_0 + tk) = F(P_0 + t v)$$

$g(t)$ è definita almeno su $I = (-t_0, t_0)$

Calcolo lo sviluppo di Taylor di $g(t)$ in $t=0$

Mo Tu We Th ~~Fr~~ Sa Su

No. ANALISI 2

Date 11.10.19

Sviluppo: $g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} g''(0) t^2 + o(t^2)$

dove:

- $g(0) = F(x_0 + 0 \cdot h, y_0 + 0 \cdot k) = F(P_0)$

- $g'(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} F(x_0 + th, y_0 + tk)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(P_0) h + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \cdot k$$

- $g''(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} F(x_0 + th, y_0 + tk)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) h}_{} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k}_{}\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0 + th, y_0 + tk) h + \frac{\partial F}{\partial y \partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot k \Bigg|_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)\right)\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0 + th, y_0 + tk) k + \frac{\partial F}{\partial x \partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) \cdot h \Bigg|_{t=0}$$

$\longrightarrow$ SLIDE