www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Lezione 10/12

Calcolo delle serie di Fourier

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Distanza e ortogonalità

- Usando la norma possiamo definire la distanza tra due funzioni f e g come

$$d(f,g)=\|f-g\|$$

Questa distanza viene chiamata “scarto quadratico medio”.

- Diremo inoltre che due funzioni f e g sono ortogonali se

$$\langle f, g \rangle = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esempio

- Se $h \neq k$ sono interi positivi allora $\cos(hx)$ e $\cos(kx)$ sono ortogonali.
- Se $h \neq k$ sono interi positivi allora $\sin(hx)$ e $\sin(kx)$ sono ortogonali.
- $\cos(hx)$ e $\sin(kx)$ sono ortogonali per ogni h,k.
- Inoltre $||\cos(hx)|| = ||\sin(hx)|| = \sqrt{\pi}$ se $h \neq 0$ e $||\cos(hx)|| = ||1|| = \sqrt{2\pi}$ se $h = 0$.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Approssimazione mediante polinomi trigonometrici

- Vogliamo approssimare le funzioni periodiche con polinomi trigonometrici.
- Per risolvere questo problema per prima cosa consideriamo le funzioni periodiche di periodo 2π
- I polinomi trigonometrici di periodo 2π sono quindi le funzioni del tipo

$$a_0 + \sum_{h=1}^{n} \left(a_h \cos(hx) + b_h \sin(hx) \right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Problema

- Data una funzione f in $L^2(2\pi)$ cerchiamo il polinomio trigonometrico p_n di ordine n che minimizza lo scarto quadratico medio con f.
- In altre parole cerchiamo il polinomio trigonometrico p_n di ordine n tale che

$$d(f, p_n) = \|f - p_n\| = \left(\int_0^{2\pi} (f(x) - p_n(x))^2 \, dx\right)^{1/2}$$

è minimo.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Principio di ortogonalità

- Osservazione: Sia V uno spazio vettoriale e sia < , > un prodotto scalare su V. Sia

W un sottospazio di V.

Allora, dato v in V, il vettore in W che minimizza la distanza da v è la proiezione ortogonale di v su W.

Dimostrazione: Sia w_v la proiezione ortogonale di v su W. Quindi $u_v = v - w_v$ è ortogonale a W.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Principio di ortogonalità

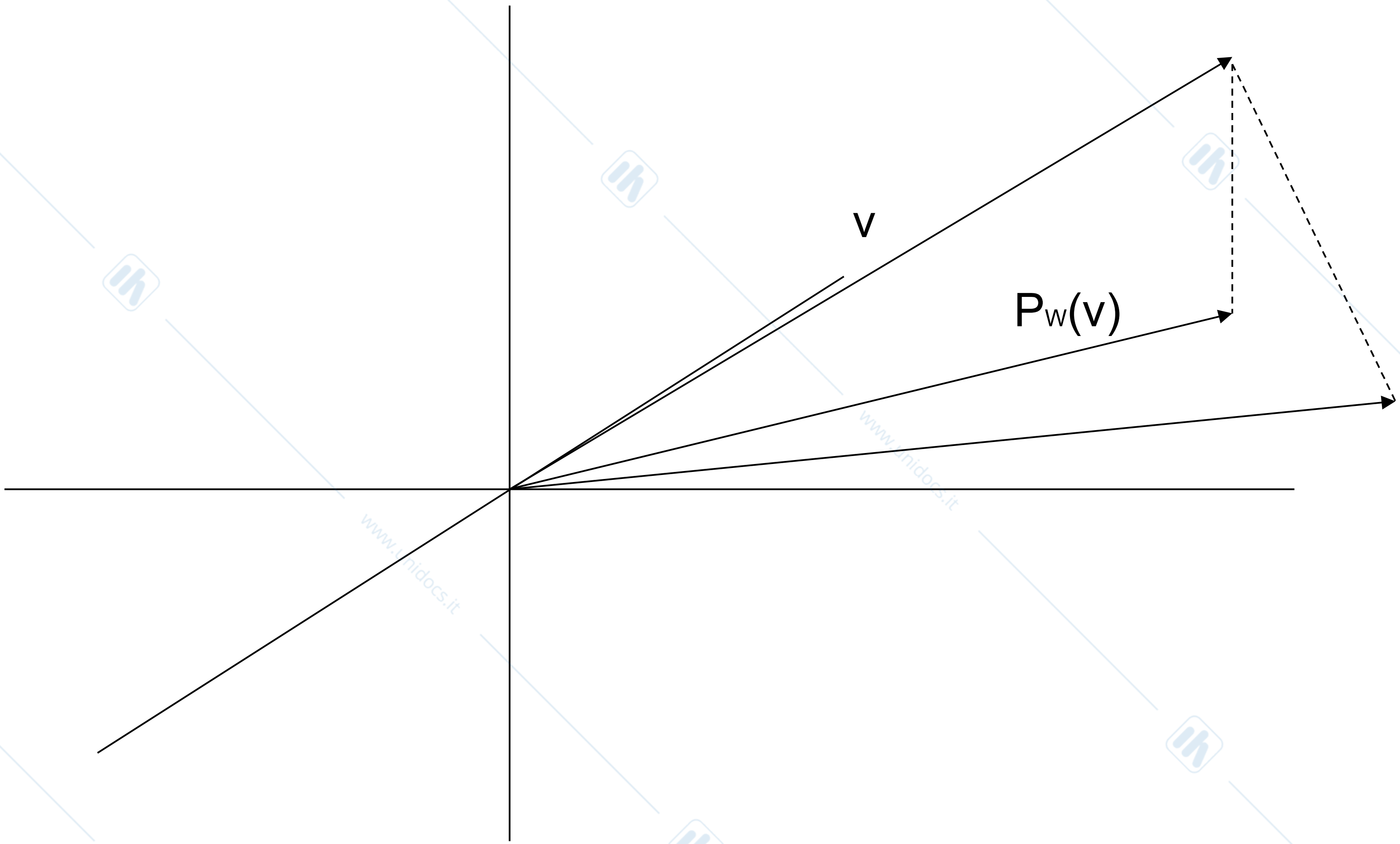
Se w è in W allora

$$\|v-w\|^2=\|v-w+w_v-w_v\|^2=\langle v-w_v-(w-w_v),v-w_v-(w-w_v)\rangle$$

$$=\langle v-w_v,v-w_v\rangle-2\langle v-w_v,w-w_v\rangle+\langle w-w_v,w-w_v\rangle$$

$$=\|v-w_v\|^2+\|w-w_v\|^2\geq\|v-w_v\|^2$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari



www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Proiezione ortogonale

- Se V è uno spazio vettoriale e < , > è un prodotto scalare su V, sia $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ un insieme ortogonale in W.
- Dato un vettore v in V la proiezione ortogonale di v su W è il vettore

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Applicazione a $L^2(2\pi)$

- Sia $V = L^2(2\pi)$ e W_n il sottospazio dei polinomi trigonometrici di ordine n. Data
- $f \in L^2(2\pi)$ e applicando l'osservazione troviamo che il polinomio trigonometrico p_n di ordine n che minimizza lo scarto quadratico medio è

$$p_n(x) = \frac{\langle f, 1\rangle}{2\pi} + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\langle f, \cos(hx)\rangle}{\pi} \cos(hx) + \frac{\langle f, \sin(hx)\rangle}{\pi} \sin(hx) \right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Coefficienti di Fourier

- Siano

$$a_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(hx)\,dx \qquad b_h = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(hx)\,dx$$

- I coefficienti a_h e b_h sono detti i coefficienti di Fourier della funzione f
- Osserviamo che

$$\frac{\langle f,1\rangle}{2\pi} = \frac{a_0}{2} \qquad \frac{\langle f,\cos(hx)\rangle}{\pi} = a_h \text{ se } h>0 \qquad \frac{\langle f,\sin(hx)\rangle}{\pi} = b_h \text{ se } h>0$$

e quindi

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{h=1}^{n}\left(a_h\cos(hx) + b_h\sin(hx)\right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Serie trigonometriche

- Una serie del tipo $$\frac{c_0}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}(c_h\cos(hx)+d_h\sin(hx))$$

è detta serie trigonometrica.

Una serie trigonometrica è dunque una serie le cui ridotte parziali

$$s_n(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{h=1}^{n}\left(c_h\cos(hx)+d_h\sin(hx)\right)$$

sono polinomi trigonometrici.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Serie di Fourier

- Consideriamo ora la serie trigonometrica

$$S[f]=\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}(a_h\cos(hx)+b_h\sin(hx))$$

i cui coefficienti sono i coefficienti di Fourier di una funzione f in $L^2(2\pi)$

Questa serie è detta serie di Fourier della funzione f e si scrive

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}(a_h\cos(hx)+b_h\sin(hx))$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Convergenza in media quadratica

- Definizione: Sia f_n una successione di funzioni in $L^2(2\pi)$. Diremo che la successione tende a f in media quadratica se

$$\lim_{n \to +\infty} \| f_n - f \| = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Convergenza della serie di Fourier in media quadratica

- Si noti che le ridotte parziali della serie di Fourier di f sono esattamente i polinomi $p_n(x)$ che minimizzano lo scarto quadratico medio.
- Vale inoltre il teorema: Se $f \in L^2(2\pi)$, la serie di Fourier di f converge a f in media quadratica, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n \| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - p_n(x) \right)^2 dx = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Periodi diversi da 2π

- Definiamo il prodotto scalare su $L^2(T)$ ponendo

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(x) g(x) dx$$

- Se h è un intero, le funzioni $\cos(\frac{2\pi}{T} hx)$ e $\sin(\frac{2\pi}{T} hx)$ sono tra loro ortogonali in $L^2(T)$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Periodi diversi da 2π

- Il polinomio trigonometrico

$$p_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{h=1}^{n}\left(a_h\cos\left(\frac{2\pi}{T}hx\right)+b_h\sin\left(\frac{2\pi}{T}hx\right)\right)$$

che minimizza lo scarto quadratico medio ha come coefficienti i coefficienti di Fourier

$$a_h=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}hx\right)dx \qquad b_h=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}hx\right)dx$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Indipendenza dall'intervallo di integrazione

- Notiamo che se f è periodica di periodo T allora

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx$$

per ogni x_0. In particolare

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Funzioni pari

- Se f è pari allora $f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}hx)$ è dispari e quindi

$$b_h = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx = 0$$

- Inoltre $f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}hx)$ è pari e quindi

$$a_h = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Funzioni dispari

- Se f è dispari allora $f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}hx)$ è dispari e quindi

$$a_h=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx=0$$

- Inoltre $f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}hx)$ è pari e quindi

$$b_h=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx=\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi}{T}hx)\,dx$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio

- Calcolare la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f:[0,2\pi)\to R$

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ se } 0\le x<\pi \\ 0 \text{ se } \pi\le x<2\pi \end{cases}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio

- Si calcoli la serie di Fourier del prolungamento periodico di

$$f:[-1,1)\to \mathbb{R}$$

definita ponendo $\qquad f(x)=|x|$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Osservazione

- Se f è un polinomio trigonometrico allora è uguale alla sua serie di Fourier.
- Ad esempio la serie di Fourier di

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(3x)$$

è

$$2\sin(x) + 3\cos(3x)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Esercizio

- Calcolare la serie di Fourier di

$$\sin^2(x)\cos^2(x)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Disuguaglianza di Bessel

- Se W è un sottospazio di uno spazio V allora

$$0 \leq \|v - p_W(v)\|^2 = \langle v - p_W(v), v - p_W(v) \rangle$$

e quindi $$= \langle v - p_W(v), v \rangle = \|v\|^2 - \langle p_W(v), v \rangle$$

Esplicitando $\|v\|^2 \geq \langle v, p_W(v) \rangle$ e sostituendo

$$p_W(v) = \sum_{h=1}^{n} \frac{\langle v, w_h \rangle}{\|w_h\|} w_h$$

troviamo che

$$\|v\|^2 \geq \sum_{h=1}^{n} \frac{\left(\langle v, w_i \rangle \right)^2}{\|w_i\|^2}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Disuguaglianza di Bessel

- Applicando la disuguaglianza a f e $p_n(x)$ troviamo che

$$\|f\|^2 \geq \frac{(\langle f,1\rangle)^2}{T} + \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\left(\langle f,\cos(\frac{2\pi}{T}hx)\rangle\right)^2}{T/2} + \frac{\left(\langle f,\sin(\frac{2\pi}{T}hx)\rangle\right)^2}{T/2} \right)$$

- Sostituendo i coefficienti di Fourier si trova

$$\int_0^T f(x)^2\,dx \geq \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{n}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

che è detta disuguaglianza di Bessel.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Osservazione

- Si noti che la disuguaglianza di Bessel

$$\int_0^T f(x)^2\,dx \geq \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{n}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

implica che la serie $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2+b_h^2\right)$ converge.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Uguaglianza di Parseval

- Come abbiamo già visto, se $f \in L^2(T)$, la serie di Fourier di f converge a f in media quadratica, cioè

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n(f) \| = 0$$

ovvero

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T \left(f(x) - p_n(f)(x) \right)^2 dx = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Uguaglianza di Parseval

- Abbiamo già visto che

$$\| f - p_n \|^2 = \| f \|^2 - \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{n} \left(a_h^2 + b_h^2 \right) \right)$$

- Siccome

$$\lim_{n \to +\infty} \| f - p_n \| = 0$$

$$\| f \|^2 = \int_0^T f(x)^2 \, dx = \frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} \left(a_h^2 + b_h^2 \right) \right)$$

Questa uguaglianza è detta uguaglianza di Parseval.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Energia di un segnale

- Se una funzione f(t), periodica di periodo T, rappresenta la variazione nel tempo dell'altezza di un segnale la sua energia è data da

$$E(f)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Energia delle armoniche che compongono un segnale

- Se calcoliamo l'energia dell'armonica n-esima di f troviamo che essa è

$$E_n = \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

se $n \neq 0$, mentre l'energia dell'armonica zero è

$$E_0 = \frac{a_0^2}{4} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\right)^2$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Interpretazione fisica dell'uguaglianza di Parseval

- L'uguaglianza di Parseval

$$\|f\|^2=\int_0^T f(x)^2\,dx=\frac{T}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{h=1}^{+\infty}\left(a_h^2+b_h^2\right)\right)$$

è equivalente all'equazione $E(f)=\sum_{n=0}^{+\infty} E_n$

che esprime il fatto che l'energia del segnale è la somma delle energie delle armoniche che lo compongono.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Teorema di Riemann-Lebesgue

- Corollario: Se $f \in L^2(T)$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx = 0$$

Dimostrazione: La serie $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{h=1}^{+\infty} \left(a_h^2 + b_h^2\right)$ converge e quindi il suo termine generico tende a zero.

Quindi $0 \leq \lim_{n \to +\infty} |a_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$ e

$$0 \leq \lim_{n \to +\infty} |b_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Forme diverse della serie di Fourier

- Ci due altri modi per scrivere la serie di Fourier di una funzione.
  - Come serie di soli coseni
  - Come serie trigonometrica complessa

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Serie di soli coseni

- Consideriamo il termine

$$a_h \cos(\frac{2\pi}{T} hx) + b_h \sin(\frac{2\pi}{T} hx)$$

Scriviamo (a_h, b_h) come $\sqrt{a_h^2 + b_h^2}(\cos(\phi_h), \sin(\phi_h))$

- Sostituendo troviamo

$$a_h \cos(\frac{2\pi}{T} hx) + b_h \sin(\frac{2\pi}{T} hx) =$$

$$= \sqrt{a_h^2 + b_h^2}\left(\cos(\phi_h)\cos(\frac{2\pi}{T} hx) + \sin(\phi_h)\sin(\frac{2\pi}{T} hx)\right)$$

$$= \sqrt{a_h^2 + b_h^2}\left(\cos(\frac{2\pi}{T} hx - \phi_h)\right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Serie di soli coseni

- Se chiamiamo $A_h = \sqrt{a_h^2 + b_h^2}$ per $h \neq 0$ e $A_0 = \frac{a_0}{2}, \phi_0 = 0$ allora la serie di Fourier di f si può riscrivere come

$$S[f] = \sum_{h=0}^{+\infty} A_h \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} hx - \phi_h\right) \right)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Spettro di ampiezza e spettro di fase

- Se $S[f] = \sum_{h=0}^{+\infty} A_h \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} hx - \phi_h \right) \right)$

allora la successione $A_0, A_1, A_2, \cdots, A_h, \cdots,$ è chiamata spettro di ampiezza di f

- La successione $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_h, \cdots,$ è chiamata spettro di fase di f.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari