(1) Determinare per quale dei seguenti problemi di Cauchy la soluzione esiste ed è unica in un intorno della condizione iniziale.

(1) $\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Se $f(x,y)$ è Lipschitziana allora il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Allora esiste un intorno J di x_0 e un'unica soluzione $y: J \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

Se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua $\Rightarrow$ è Lipschitziana

↳ in questo caso

$$f(x,y) = 2x\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{\sqrt{1-y^2}}$$

→ nel caso ① è continua in un intorno di $(0,0)$ ✓

$\underbrace{(0,0)}_{\text{cond. iniziale}}$

→ nel caso ②

$\frac{\partial f}{\partial y}$ non è continua in un intorno di $(0,1)$ → non possiamo applicare il criterio

dobbiamo risolvere l'equazione

↳ variabili separabili

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}$$

Abbiamo $y(x) = y_0 \ \forall x$ è soluz.

$y'=0 = a(x)b(y_0) = 0$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int 2x\,dx$$

$\arcsin(y) = x^2 + c$

$\arcsin(1) = 0 + c$

$\frac{\pi}{2} = c$

$$\Rightarrow y = \overbrace{\sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)}^{\cos(x^2)} \quad e \quad y = 0 \ — \ da \ \begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2 sol. → Sol. non unica

2) Risolvere il problema di Cauchy specificando l'intervallo massimo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+2y+1}{x} \\ y(e) = 4 \end{cases} \rightarrow x \neq 0$$

prendiamo il pezzo dove si sta la cond. iniz.

$D = (0, +\infty) \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x > 0\}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y+2}{x} \rightarrow$ continua nello stesso dominio

$\hookrightarrow x \neq 0$

$\Downarrow$

ha un'unica sol.

Risolvo

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(y+1)^2}{x}$ $\qquad \dfrac{dy}{(y+1)^2} = \dfrac{dx}{x}$

$\displaystyle\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int \frac{dx}{x}$ $\qquad -\dfrac{1}{y+1} = \ln x + c$

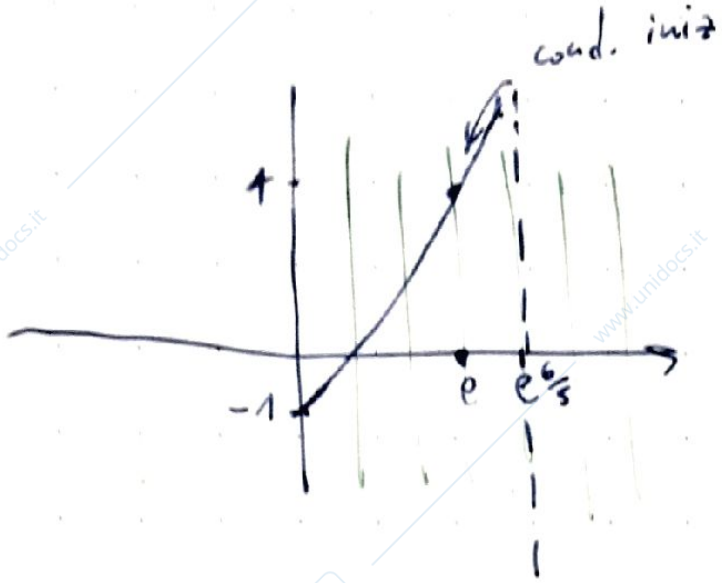
$-\dfrac{1}{5} = \ln e + c$

$c = -\dfrac{6}{5}$

$\Rightarrow y = \dfrac{-1}{\ln x - \frac{6}{5}} - 1 = \dfrac{1}{\frac{6}{5} - \ln x} - 1$

$\ln x \neq \frac{6}{5}$ $\qquad x \neq e^{\frac{6}{5}}$

Analizzando il dominio



intervallo max di def. $(0, e^{\frac{6}{5}})$

3

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^x}{y e^{-y^2}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$F: D \to \mathbb{R}$

$F(x,y) = \dfrac{e^x}{y e^{-y^2}} \to$ per $y \neq 0$

$D = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y e^{-y^2}}$$

$$\int y e^{-y^2} dy = \int e^x dx$$

$t = y^2 \quad dt = 2y\,dy$

$$-\frac{1}{2} e^{-y^2} = e^x + c \xrightarrow{\text{Cond. iniz.}} -\frac{1}{2e} - 1 = c$$

$$-\frac{1}{2} e^{-y^2} = 2e^x - \frac{1}{2e} - 2$$

$$y = +\sqrt{-\ln\left(\frac{1}{e} + 2 - 2e^x\right)}$$

scelgo sol. pos.

cond. di es.

$$0 < -2e^x + \frac{1}{e} + 2 < 1$$

$$\therefore \; e^x < \frac{1}{2e} + \frac{e}{2}$$

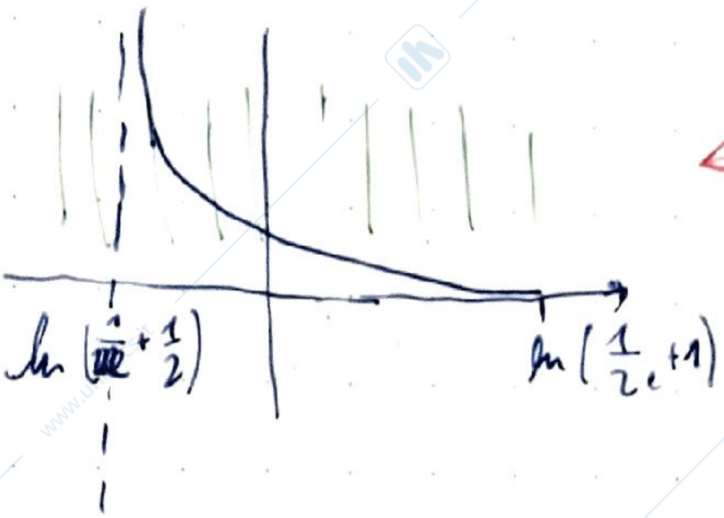
$$x < \ln\left(\frac{1}{2e} + 1\right)$$

$$\wedge$$

$$x > \ln\left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right)$$

intervallo max

$$\left(\ln\left(\frac{1}{2e}+\frac{1}{2}\right), \ln\left(\frac{1}{2e}+1\right)\right)$$



6

Mo Tu We ~~Th~~ Fr Sa Su

No. ES. ANALISI 2

Date 21. 11. 19

(4) Determinare se il campo

$$F(x,y,z) = \frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z) \quad \text{definito su } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

è conservativo.

$$\nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$F_1 = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \quad F_2 = \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \quad F_3 = \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$$

dove

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \cancel{-\frac{3}{2}\frac{2zy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}} - \cancel{\left(-\frac{3}{2}\frac{2yz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\right)} = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = \cancel{-\frac{3}{2}\frac{2zx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}} - \cancel{\left(-\frac{3}{2}\frac{2zx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\right)} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \cancel{-\frac{3}{2}\frac{2yx}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}} - \cancel{\left(-\frac{3}{2}\frac{2xy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}\right)} = 0$$

Può essere conservativo → calcolo il potenziale $\phi(x,y,z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} \quad \phi = \int \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}dx = \int \frac{x}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{2}+1} + c$$

$$t = x^2+y^2+z^2 \quad dt = 2x\,dx \qquad = -t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{t}} + c$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + c(y,z)$$

7

Mo Tu We Th Fr Sa Su

No. ES. ANALISI

Date 21 11 19

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{+\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1} 2y} + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = 0 \qquad \int c(y,z)\,dy = C_1(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \cancel{+\frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}} = \cancel{\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} 2z} + \frac{\partial c_1(z)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial c_1(z)}{\partial z} = 0 \qquad C_1(z) = k$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + k \Rightarrow \text{è conservativo}$$

↳ sempre vero

(5) $F(x,y,z) = (3x^2y^2z,\ 2x^3yz + z,\ x^3y^2 + y)$

Verificare se è conservativo

rotore $\Rightarrow \nabla \times F = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$

dove:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2x^3y + 1 - 2x^3y - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} = 3x^2y^2 - 3x^2y^2 = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 6x^2yz - 6x^2yz = 0$$

$$\downarrow$$

Calcolo $\phi(x,y,z)$

$$\frac{\partial \phi(x,y,z)}{\partial x} = 3x^2y^2z \qquad \phi = \int 3x^2y^2z\,dx = x^3y^2z + c(y,z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \cancel{2x^3yz} + z = \cancel{2x^3yz} + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} \qquad c(y,z) = \int z\,dy$$

$$\rightarrow c(y,z) = zy + c(z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \cancel{x^3y^2} + \cancel{y} = \cancel{x^3y^2} + \cancel{y} + \frac{\partial c_1(z)}{\partial z} \qquad \frac{\partial c_1(z)}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow c_1(z) = k$$

$$\Rightarrow \phi(x,y,z) = x^3y^2z + zy + k \quad \Rightarrow \text{è conserv.}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

6 $F(x,y) = (2e^y - ye^x, 2xe^y - e^x)$ verificare se è cons.

$F_1 = 2e^y - ye^x$

$F_2 = 2xe^y - e^x$

se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ è poss. che sia cons.

$2e^y - e^x = 2e^y - e^x$ ✓

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2e^y - ye^x \qquad \phi = \int (2e^y - ye^x) dx = 2xe^y - ye^x + c(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xe^y - \cancel{e^x} = 2xe^y - e^x + \frac{\partial c(y)}{\partial y}$

$c(y) = k$

$\Rightarrow \phi(x,y) = -ye^x + 2xe^y + k$

(7) $F(x,y) = (2x + y^2, x + cy) \rightarrow$ conserv.?

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} ? \quad 2y = 1$$

→ non sono la stessa funz.

⇓

non è cons.

(8) $F(x,y,z) = (2xy^3, x^2 z^3, 3x^2 yz^2) \rightarrow$ conserv.?

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \hat{i}\cancel{\left(3x^2z^2 - 3x^2z^2\right)} - \hat{j}\left(6xyz^2 - 0\right) + \hat{k}\left(2xz^3 - 6xy^2\right)$$

$\neq \{(0,0,0)\}$

⇓

non è conservativo