

Lezione 20/9

Funzioni di più variabili reali

Lunghezza d'arco

- La lunghezza di un arco di curva $r:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

è

$$L(r) = \int_a^b \|r'(t)\| dt$$

Esercizio

- Calcolare la lunghezza dell'arco di curva

$$r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$r(t) = (1 - \cos(t), t - \sin(t))$$

Esercizio

Calcolare la lunghezza del grafico della funzione
 $f: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(t) = \cosh(t)$$

Generalità sulle funzioni di n variabili

- Una funzione di n variabili è una funzione

$F : D \rightarrow \mathbb{R}$ dove D è un sottoinsieme di \mathbb{R}^n .

Esempi

- La funzione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x, y, z) = \cos(xyz)$$

è una funzione di tre variabili.

- Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. La funzione $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

è una funzione di due variabili

Grafico di una funzione di due variabili

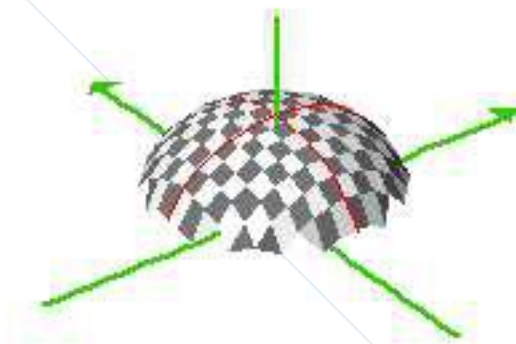
- Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di una variabile allora il suo grafico è l'insieme delle coppie (x,y) per cui $y=f(x)$.
- Analogamente se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili il suo grafico è l'insieme delle triple (x,y,z) per cui $z=F(x,y)$
- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di tre variabili allora il suo grafico è l'insieme delle quadruple (x,y,z,w) per cui $w=F(x,y,z)$

Esempio

- Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

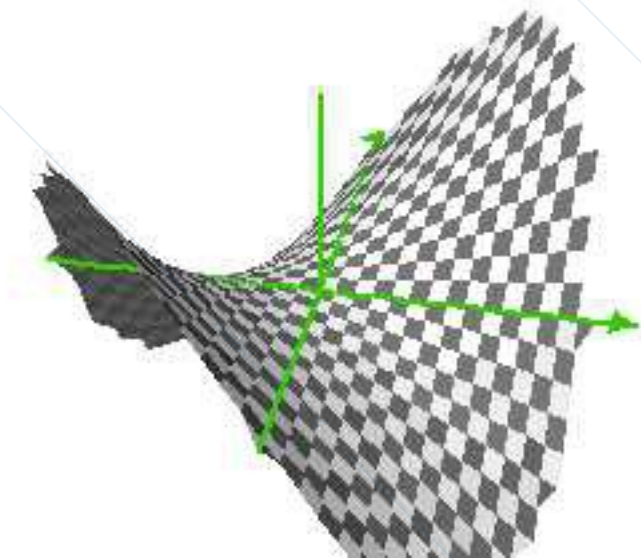
$$F(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Il suo grafico è



Esempio

- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy$ ha come grafico



Curve di livello

- Se D è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di due variabili allora fissato un numero reale C l'insieme dei punti (x,y) tali che $F(x,y)=C$ viene detto curva di livello C di F .

Le curve di livello sono la proiezione sul piano xy dell'intersezione del grafico con il piano $z=C$

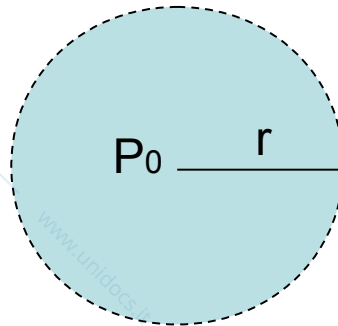
Superfici di livello

- Se $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di tre variabili allora, dato un numero reale C , l'insieme delle triple (x,y,z) tali che $F(x,y,z)=C$ viene chiamata superficie di livello C di F

Intorni

- Se P_0 è un punto in \mathbb{R}^2 indichiamo con $N_r(P_0)$ il disco aperto di centro P_0 e raggio r :

$$N_r(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - P_0\| < r\}$$



$N_r(P_0)$ viene spesso chiamato “intorno” di P_0

Punti interni, di frontiera, isolati

Sia D un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 .

- Un punto P_0 in D si dice un punto interno di D se esiste un intorno di P_0 che è contenuto in D .
- Un punto P_0 in \mathbb{R}^2 si dice un punto di frontiera di D se ogni intorno di P_0 contiene sia punti di D che punti che non sono in D .
- Un punto P_0 in D si dice un punto isolato di D se esiste un intorno di P_0 tale che P_0 è l'unico punto dell'intorno contenuto in D .

Punti di accumulazione

Un punto P_0 in \mathbb{R}^2 si dice un punto di accumulazione di D se

- o è un punto interno di D
- oppure è un punto di frontiera di D che non è isolato.

Esempi

- Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Allora $(0,0)$ è un punto interno di D e $(1,0)$ è un punto di frontiera. Entrambi sono punti di accumulazione di D
- Sia $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Allora $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti di frontiera di D . Entrambi sono punti di accumulazione di D .
- Sia $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$. Allora $(0,0)$ è un punto isolato di D ed è un punto di frontiera di D . Non è un punto di accumulazione di D .

Limiti di funzioni di due variabili

- Sia D un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di D . Diremo che il limite per (x, y) che tende a (x_0, y_0) di F è L e scriveremo

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = L$$

se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intorno N di (x_0, y_0) tale che $|F(x, y) - L| < \epsilon$ per ogni

$$(x, y) \in D \cap N, \quad (x, y) \neq (x_0, y_0) .$$

Funzioni continue

Una volta data la nozione di limite possiamo dare la definizione di continuità di una funzione in un punto:

- Data una funzione di due variabili $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $(x_0, y_0) \in D$ che è punto di accumulazione di D diremo che F è continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0)$$

Funzioni continue in D

Diremo che $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in D se è continua in ogni punto di accumulazione di D .

Esercizio difficile

- Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x,y)=x$ è una funzione continua.
- Dimostrare che la funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $F(x,y)=y$ è una funzione continua.

Calcolo dei limiti

Il limite rispetta le operazioni algebriche: se

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y) = L$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} G(x,y) = M$ allora

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y) \pm G(x,y) = L \pm M$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y)G(x,y) = LM$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{F(x,y)}{G(x,y)} = \frac{L}{M}$ purchè $M \neq 0$

Operazioni algebriche e funzioni continue

Dal fatto che il limite rispetta le operazioni algebriche discende immediatamente che

- La somma e la differenza di funzioni continue è continua
- Il prodotto di funzioni continue è continuo.
- Se $G(x_0, y_0) \neq 0$ allora $F(x, y)/G(x, y)$ è continua in (x_0, y_0) .

Esempi

- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x + y$ è continua.
- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = (x + y)(x - y)$ è continua.
- Se $D = \{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$ e $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ è definita ponendo

$$F(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

allora F è continua.

Composizione con una funzione continua.

- Teorema: Se $f : I \rightarrow R$ è una funzione continua in $L \in I$ e

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = L$$

allora

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(F(x, y)) = f(L)$$

ovvero

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(F(x, y)) = f\left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y)\right)$$

Esempi

Calcolare

1.
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \ln(1 + x^2 + y^2)$$

2.
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} e^{-(x^2 + y^2)}$$

3.
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$$

Composizione di funzioni continue

Dal teorema discende immediatamente il seguente fatto: se D è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e $F : D \rightarrow I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue allora

$$f \circ F : D \rightarrow \mathbb{R}$$

è continua.

Esempio

- La funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$F(x, y) = \cos(x^2 + e^{y^2})$$

è continua.

Forme indeterminate

Per calcolare il limite di forme indeterminate è utile restringere la funzione a curve che avvicinano il punto in cui si vuole calcolare il limite. Vale, infatti, il seguente teorema.

Teorema: Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, sia (x_0, y_0) un punto di accumulazione di D , e sia $r : I \rightarrow D \setminus \{(x_0, y_0)\}$, $r(t) = (x(t), y(t))$, una curva tale che

Se $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$ $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$ allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y) = L$ $\lim_{t \rightarrow t_0} F(x(t), y(t)) = L$

Restrizione a curve

- Il teorema pone una condizione piuttosto forte sull'esistenza del limite di una funzione di due variabili. Esso dice infatti che se il limite di $F(x,y)$ per (x,y) che tende a (x_0,y_0) è L allora il limite della funzione ristretta ad una **qualsiasi** curva che si avvicina a (x_0,y_0) deve essere L e quindi non dipende dalla curva.

Esempio

- Verifichiamo se esiste il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Per farlo restringiamo la funzione alle curve

$$r : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r(t) = (t, 0) \quad r_1 : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r_1(t) = (t, t)$$

Entrambe le curve tendono a $(0,0)$ per $t \rightarrow 0^+$

Calcoliamo i limiti $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t, 0) = 0$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t, t) = \frac{1}{2}$

Siccome i due limiti sono diversi il limite

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ non esiste

Parametrizzazione di segmenti

- Come abbiamo visto nell'esempio precedente, per verificare se il limite

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y)$ esiste, è utile studiare la funzione su segmenti che hanno (x_0, y_0) come estremo.

Questi segmenti si parametrizzano come

$$r_\theta : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad r_\theta(t) = (x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta)$$

dove θ è l'angolo che il segmento forma con l'asse x

Test delle rette

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y)$ esiste allora deve essere lo stesso su ogni curva e in particolare su ogni segmento. Otteniamo in questo modo il seguente test di non esistenza del limite.

- Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di due variabili. Se $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(r_\theta(t))$ dipende da θ , allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y)$$

non esiste.

Esempio

- Sia $D = \{(x, y) \mid x \neq y\}$. Sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo $F(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

Verifichiamo che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} F(x, y)$ non esiste.

Abbiamo che r_θ ha il sostegno nel dominio di F se $\theta \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. In tal caso

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t \cos \theta, t \sin \theta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

che dipende da θ , quindi il limite non esiste.

Il test delle rette non è sufficiente

- Può capitare che per ogni θ

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = L$$

ma il limite

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y)$$

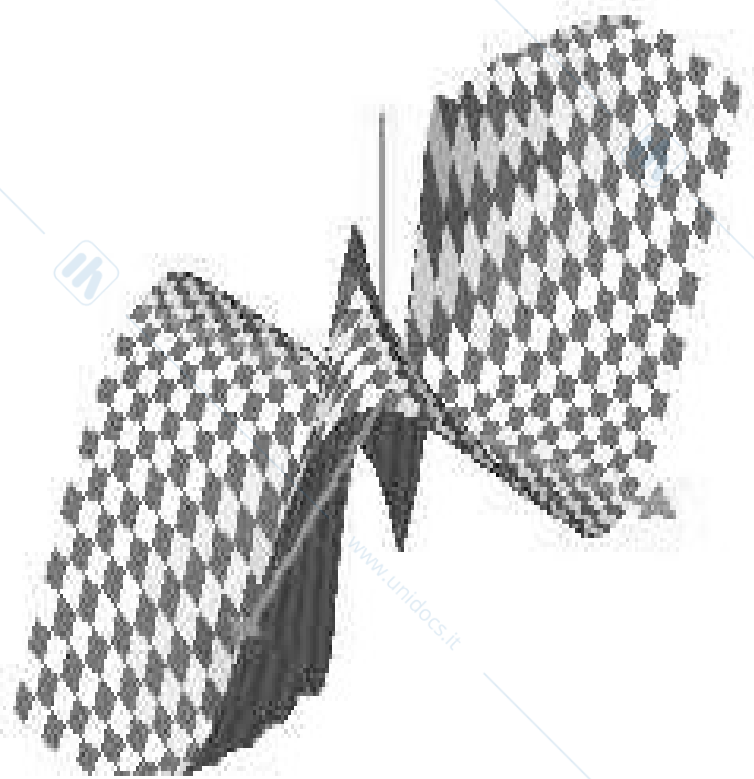
non esiste.

Esempio

- Sia $D = \{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ e sia $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$F(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

In questo caso $\lim_{t \rightarrow 0} F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = 0$,
indipendente da θ , ma $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$ non
esiste. Infatti sulla curva $r(t) = (t, t^2)$
abbiamo che $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, t^2) = \frac{1}{2} \neq 0$. Siccome il
limite su r è diverso dal limite sui
segmenti, $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$ non esiste.



19/09/19

35

Test delle coordinate polari.

- Se il test delle rette fallisce si può utilizzare il seguente teorema.
- Teorema: Sia $F : D \rightarrow R$ una funzione di due variabili. Se esiste θ tale che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = L$$

allora $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = L$ se e solo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\sup_{\theta} |F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - L| \right] = 0$$

Applicazione pratica

- Il test delle coordinate polari in pratica si applica come segue: per prima cosa si applica il test delle rette. Se il test fallisce allora $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) = L$ con L indipendente da θ . A questo punto si cerca una funzione $f(t)$ tale che

$$|F(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - L| \leq f(t)$$

e tale che $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 0$. Se si riesce a trovare $f(t)$ allora

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = L$$

Esercizio

- Verificare che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$