No. ANALISI 2

Date 12 · 11 · 19

Metodo di variazione delle costanti

Altro metodo per calcolare la soluzione particolare di una EDO del II ordine.

↓

Riduzione di ordine

Una EDO del II ordine si può ridurre in una EDO del I

$$v(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \quad v'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$$

valori vettoriali

$$v'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(x) \\ -a(x)y' - by + f(x) \end{pmatrix} =$$

da y soluzione di $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}}_{b(x)} = A(x)\, v + b(x)$$

$$\underbrace{v' = A(x)\, v + b(x)}$$

per cui: Risolvere questa significa risolvere l'equazione originale

$$y''(x) + a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)$$

Matrice wronskiana

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

(grassetto)

$w(x) = \det W(x) \longrightarrow$ è detto wronskiano dell'equazione

Se i coefficienti dell'equazione $a(x), b(x)$ sono funzioni continue definite su un intervallo I allora $w(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

$$v_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

significa che esistono c_1, c_2 non entrambi nulli t.c. $c_1 v_1(x_0) + c_2 v_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dimostrazione

Supponiamo che $w(x_0) = 0 \implies v_1(x_0)$ e $v_2(x_0)$ sono dipendenti

Per ASSURDO

Cioè
$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Considerando
$\hookrightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ $\quad y(x_0) = 0 \quad y'(x_0) = 0$

Cioè y è soluzione di:

$$\begin{cases} y'' + a(x) y' + b(x) y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ anche $z(x) \equiv 0$ è soluzione

per il teorema di unicità $z(x) = 0$ è soluzione identita implica che $z(x) \equiv 0$

$\Downarrow$

$c_1 y_1 + c_2 y_2 \equiv 0$

assurdo poichè y_1, y_2 sono indipendenti e c_1, c_2 non sono entrambe nulle

$\hookrightarrow$ quindi $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

Proprietà matrice wronskiana

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$$

$$W(x)' = A(x)\, W(x)$$

y_1, y_2 sono soluzioni di

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

$$v_1' = A(x)\, v_1$$

Se y è soluzione di

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

Allora $v = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ è soluzione di

$$v' = A(x)v + b(x) \qquad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$W(x) = (v_1, v_2) \qquad W(x)' = (v_1', v_2')$$

$$W(x)' = (v_1', v_2') = (A(x)v_1, A(x)v_2) = A(x)(v_1, v_2) = A(x)\, W(x)$$

y_1, y_2 sono soluzioni di $y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$

l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{om} = A y_1 + B y_2 \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

si cerca $y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$

$$v' = A(x) v + \mathbf{b}(x) \; * \qquad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

è equivalente a $y'' + a(x) y' + b(x) y = f(x)$

Calcoliamo le condizioni sulle funzioni $c_1(x), c_2(x)$ affinché

$v = c_1(x) v_1 + c_2(x) v_2$ sia soluzione di $*$

dove $v = W(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$

vogliamo che

$$v' = A(x) v + \mathbf{b}(x)$$

$$v' = \left(W(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} \right)' = W(x)' \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + W \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} =$$

↑ regola di Leibniz

$$= A(x)\, W(x) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} + W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = A(x)\, v + W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}$$

e voglio che sia uguale a $A(x)\, v + b(x)$

$$\Rightarrow W(x) \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = b(x)$$

sempre invertibile poiché $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W(x)^{-1}\, b(x)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int W(x)^{-1}\, b(x)$$

• poi mettiamo in:

$\hookrightarrow$ ~~$y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$~~

Esplicitando

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$$

$$W(x)^{-1} = \frac{1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}$$

$$W(x)^{-1} b(x) = \frac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{pmatrix} -y_2 f(x) \\ y_1 f(x) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx \\ \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_1' y_2} dx \end{pmatrix}$$

→ questo metodo funziona sempre

es.

$$y'' - y = \sinh(x)$$

Integrale generale dell'eq. omogenea

$$y_{om} = Ae^{x} + Be^{-x}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{pmatrix} \rightarrow W(x) = -2$$

$$W(x)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^{x} & e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sinh x \end{pmatrix} dx$$

$$\begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \int (-e^{-x}\sinh x)\, dx \\ \int (e^{x}\sinh x)\, dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\int \frac{1-e^{-2x}}{2}\, dx \\ \int \frac{e^{x}-1}{2}\, dx \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x} \\ \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{x}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}e^{-2x}\right)e^{x} + \left(-\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{x}{4}\right)e^{-x}$$

EDO lineari del I ordine

$$y' + p(x)\, y = q(x)$$

si prende:

primitiva

$\mu(x)$ tale che $\mu'(x) = p(x)$

$$\left(e^{\mu(x)}\, y\right)' = \left(e^{\mu(x)}\mu'(x)\right) y + e^{\mu(x)} y' =$$

$$= e^{\mu(x)} p(x)\, y + e^{\mu(x)} y' =$$

$$= e^{\mu(x)}\left(p(x)\, y + y'\right) = e^{\mu(x)} q(x)$$

$$\Rightarrow e^{\mu(x)}\, y = \int e^{\mu(x)} q(x)\, dx$$

$$y = e^{-\mu(x)} \int e^{\mu(x)} q(x)\, dx$$

integrale generale sarà:

$$y = e^{-\mu(x)}\left(A(x) + c\right)$$

e poi imponiamo le condizioni iniziali, per un problema di Cauchy

es.

$$\begin{cases} y' = 2x^2 y + 3x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$y' \underbrace{-2x^2}_{p(x)} y = \underbrace{3x^2}_{q(x)}$$

$$\int -2x^2 \, dx = -\frac{2}{3}x^3 + c$$ metto $c = 0$

$\hookrightarrow \mu(x) = -\frac{2}{3}x^3$

$$y = e^{\frac{2}{3}x^3} \int e^{-\frac{2}{3}x^3} \cdot 3x^2 \, dx$$

$x^3 = t \qquad dt = 3x^2 dx$

$$\hookrightarrow y = e^{\frac{2}{3}x^3} \int e^{-\frac{2}{3}t} \, dt = e^{\frac{2}{3}x^3}\left(-\frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}x^3} + c\right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2} + c e^{\frac{2}{3}x^3}$$

$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{2} + c = 1 \qquad c = \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{2} e^{\frac{2}{3}x^3} - \frac{3}{2}}$$

Equazioni a variabili separabili

$$y' = a(x)\,b(y)$$

Teorema: slid.

→ Dimostrazione:

$$\begin{cases} y' = a(x)\,b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a(x)$ continua

$b(y) \in C^1$

Se $b(y_0) = 0$ allora $y \equiv c$ è soluzione del problema di Cauchy

$b(y) \neq 0$ in J'

$\Rightarrow \frac{1}{b(y)}$ ha senso in J'

sia $B(y)$ primitiva di $\frac{1}{b(y)}$

↳ continuo su Slide

es.

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad a(x) = 1 \quad b(y) = y^2$$

$$y' = y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2$$

→ la dimostrazione precedente è la formalizzazione di questi passaggi

$$\frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$\hookrightarrow -\frac{1}{y} = x + c$$

$$-1 = y(x+c) \rightarrow y = -\frac{1}{x+c}$$

$$\hookrightarrow 1 = -\frac{1}{c} \qquad c = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{x-1}}$$

Oss. la soluzione è definita su un'intervallo più piccolo dell'equazione

Equazione logistica

$$y' = ay(1-by)$$

↓

è un'eq. a var. sep.

ha 2 sol. cost. $y=0$ $y=\frac{1}{b}$

le altre sono

$$y = \frac{\overbrace{c_1}^{\text{arbitraria}} e^{ax}}{1+bc_1e^{ax}}$$

es se abbiamo

$$\begin{cases} y' = ay(1-by) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

se $y_0 = 0, \frac{1}{b}$ allora la soluzione è costante

Altrimenti

$$\frac{dy}{dx} = ay(1-by) \rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{y(1-by)}}_{} = \int a\,dx = ax + c_1$$

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A-bAy+By}{y(1-by)} = \frac{1}{y(1-by)} \rightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=b \end{matrix}$$

$$\lg|y| - \frac{b}{b}\lg|1-by| = ax + c_1$$

$$\lg\left|\frac{y}{(1-by)}\right| = ax + c_1$$

$$\left|\frac{y}{(1-by)}\right| = e^{ax+c_1} = \underset{k \neq 0}{k}\, e^{ax}$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{k e^{ax}}{1 + bk e^{ax}}$$

Se $a(x)$ è continua e $b(y)$ è C^1 esiste un'unica soluzione definita in un intervallo J' con $x \in J'$

es.
$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y(0) \equiv 0$ è soluzione

$0 = y'(x) = y(x)^{\frac{2}{3}} = 0^{\frac{2}{3}} = 0$

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$$

$3\, y^{\frac{1}{3}} = x + c \ \rightarrow c = 0$

$$y = \frac{x^3}{27}$$

2 soluzioni $b(y)$ non è C^1

Teoria generale delle equazioni differenziali

Abbiamo la forma generale di un'eq. diff.:

$$y' = F(x, y)$$ e

il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

→ Quali sono le condizioni affinché abbia soluzioni? Quando la soluzione è unica?

→ **Funzioni Lipschitziane**

Si dicono Lipschitziane le funzioni:

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| \le L_U |y_1 - y_2|$$

per ogni $x, y_1, y_2 \mid (x, y_1), (x, y_2) \in U$

condizione locale

Voglio che valga vicino a un punto P

↓

Cond. sufficiente:

se $\frac{\partial F}{\partial y}$ è continua (F continua) allora F è Lipschitziana → Dimostrazione con teorema di Lagrange e Weierstrass

No. ANALISI 2

Date 15 11 19

→ Teorema di Cauchy

Se F è Lipschitziana su D allora, dato $(x_0, y_0) \in D$ esiste un intorno I di x_0 e una funzione $y(x)$ definita su I che è soluzione del problema di Cauchy

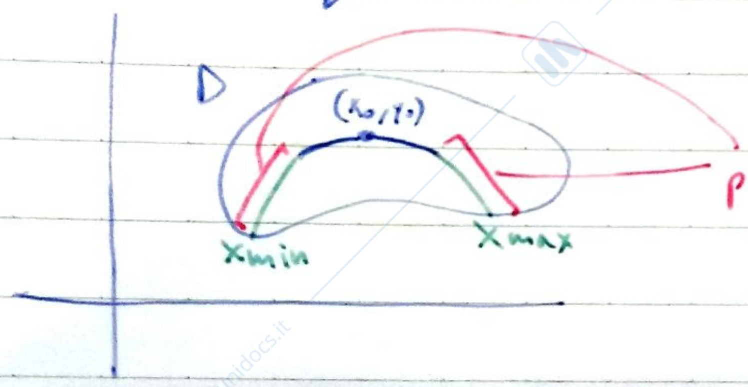
es. (precedente) $F(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ non è lipschitziana in $(0,0)$

Oss. → Prolungamento: Esiste un intervallo in cui la soluz. al prob. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(x_0, y_0) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è definita e al di fuori di questo o non esiste oppure è al di fuori di D

dove F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue



posso prolungare la funzione fino al bordo del dominio D

5

No. ANALISI 2

Date 15 · 11 · 19

es.

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad F(x,y) = -2xy^2$$

$$\downarrow$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$-\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx$$

$$\frac{1}{y} = x^2 + c \qquad y = \frac{1}{x^2+c}$$

$$y = \frac{1}{x^2+1} \leftarrow y(0) = 1 = \frac{1}{c} \rightarrow c = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2-1} \leftarrow y(0) = -1 = \frac{1}{c} \rightarrow c = -1$$

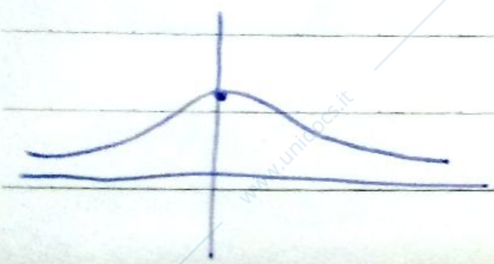
In questo caso la soluzione si può prolungare su tutto R

$X_{min} = -\infty \qquad X_{max} = +\infty$

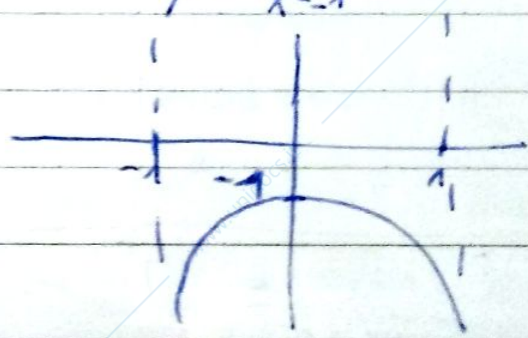
In questo caso $X_{min} = -1 \qquad X_{max} = 1$

→ a seconda di come scelgo la condizione iniziale posso estendere o no la soluzione su tutto D

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

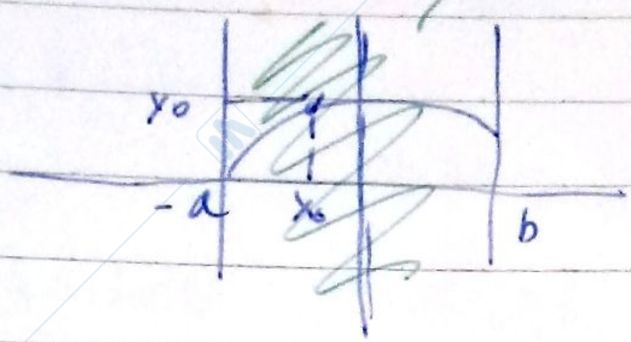


$$y = \frac{1}{x^2-1}$$



→ Esistenza e unicità globale

Se F e $\frac{\partial F}{\partial y}$ sono continue in una striscia $[a,b]$



allora esiste $y(x)$ soluzione unica su $[a,b]$

es. → eq. lineari del I ordine soddisfano il teorema

Funzioni a valori vettoriali

sono funzioni

$$F : D \to \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad n > 1$$

es. $D = (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$

$f : D \to \mathbb{R}^2 \qquad f(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

→ coordinate cilindriche:

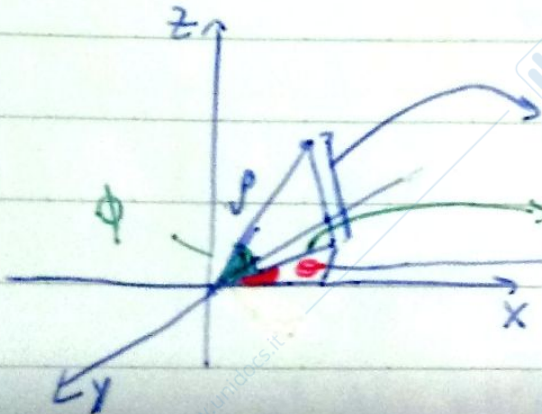
$$D = [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$F : D \to \mathbb{R}^3 \qquad F(\rho, \theta, t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$

→ coordinate sferiche:

$$D = [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

$F : D \to \mathbb{R}^3 \qquad F(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\phi)$



$t = \sin\phi$

$\rho\cos\phi \to x = \rho\cos\phi\cos\theta$

$y = \rho\cos\phi\sin\theta$

Matrice Jacobiana

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

$$DG(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} \nabla x(u_0,v_0) \\ \nabla y(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

→ anche in 3 variabili

Trasformazioni regolari

Si dice regolare nel punto P_0 se

$$\det DG(P_0) \neq 0$$

es. $G : (0,+\infty) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$

$$G(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

è trasformazione regolare

↳ $DG(\rho_0,\theta_0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\rho_0\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \rho_0\cos\theta_0 \end{pmatrix}$

$$\det DG(\rho_0,\theta_0) = \rho_0\cos^2\theta_0 + \rho_0\sin^2\theta_0 = \rho_0 \neq 0$$

es Cilindriche

$$G(\rho,\theta,t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$$

$$DG(\rho_0,\theta_0,t_0) = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\rho_0\sin\theta_0 & 0 \\ \sin\theta_0 & \rho_0\cos\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det DG(\rho_0,\theta_0,t_0) = \rho\cos^2\theta_0 + \rho_0\sin^2\theta_0 = \rho_0 \neq 0$$

$\downarrow$

trasf. regolare