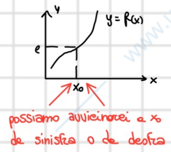
Limiti di funzioni in più variabili:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Significa che in qualsiasi modo facciamo tendere l'input x al valore x_0, l'output prodotto dalla funzione f tende comunque a ℓ



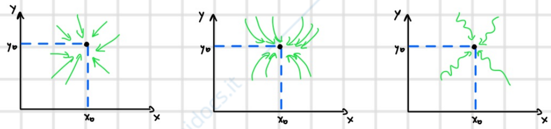
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

DUE VARIABILI:

$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell}$$

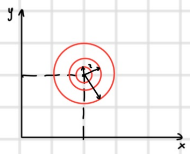
Analogamente questa scrittura sta a significare che comunque facciamo tendere la coppia (x,y) in input al valore (x_0,y_0) l'output prodotto da f tenderà al valore ℓ

Sappiamo però che gli input giacciono nel piano e quindi al valore x_0, y_0 possiamo avvicinarci tramite infinite direzioni e infiniti modi



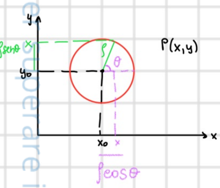
Il limite della funzione in due variabili esiste $\Longleftrightarrow$ il valore è indipendente dal modo in cui ci avviciniamo a x_0, y_0.

Per calcolare il limite in due variabili:



Diminuiamo pian piano il raggio della circonferenza.

Matematicamente:



$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\,\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,+\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array} \longrightarrow \text{Coordinate polari di centro } (x_0,y_0)$$

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\rho \to 0} f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\text{sen}\theta)$ $\longrightarrow$ se il valore del limite risulta indipendente da θ si dice che il limite esiste e assume quel valore

OSS: La non esistenza di un limite può essere verificata anche utilizzando il fascio proprio di rette di centro (x_0,y_0) le cui eq. è data da $y = y_0 + m(x-x_0)$
Se infatti il risultato del limite $\lim_{x \to x_0} f(x,\ y_0 + m(x-x_0))$ risulta dipendente da m, possiamo concludere che il limite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ NON ESISTE

Es 1: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - 2xy^2}{x^2+y^2+2x^2y^2}$

Risolviamolo calcolando le coordinate polari di centro $(0,0)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,+\infty) \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{array}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y - 2xy^2}{x^2+y^2+2x^2y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\theta\,\rho\,\text{sen}\theta - 2\rho\cos\theta\,\rho^2\text{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\text{sen}^2\theta + 2\rho^2\cos^2\theta\,\rho^2\text{sen}^2\theta} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho^2}(\rho\cos^3\theta\,\text{sen}\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + 2\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta)} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho(\rho\cos^3\theta\,\text{sen}\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)}{1 + 2\rho^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta} = \frac{0(0 - 2\cos\theta\,\text{sen}^2\theta)}{1+0} = 0$$

Poiché il risultato non dipende da θ il limite esiste e vale 0.

Es 2: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

Calcoliamo il limite lungo le rette $x=0$ e $y=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

Il limite lungo due direzioni diverse non coincide, il limite non esiste

Es 3: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$ $\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$

$|\rho^2\cos^4\theta| \le \rho^2$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^4\cos^4\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta} = \frac{\rho^4\cos^4\theta}{\rho^2(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)} = \frac{\cancel{\rho^4}^{\,2}\cos^4\theta}{\cancel{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2\cos^4\theta = 0$$

Es 4: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\cos\left(\frac{1}{xy}\right)$

$\left|y^2\cos\left(\frac{1}{xy}\right)\right| \le y^2 \to 0$ per $y\to 0$

Es 5: $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$ $\quad D: x^2+y^2+1+1-2x-2y = x^2-2x+1+y^2-2y+1 = (x-1)^2+(y-1)^2$

$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{(x-1)^2+(y-1)^2}$ $\quad$ Usiamo le coordinate polari di centro $(1,1)$ $\Rightarrow \begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = 1+\rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\cancel{\rho^4}^{\,2}\text{sen}^4\theta}{\cancel{\rho^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2\text{sen}^4\theta = 0$$

Es 6: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^3}{x^2+y^2}$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3\cos^3\theta-2\rho\cos\theta\,\rho\,\text{sen}\theta+\rho^3\text{sen}^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\text{sen}^2\theta} = \frac{\cancel{\rho^2}(\rho\cos^3\theta-2\cos\theta\,\text{sen}\theta+\rho\,\text{sen}^3\theta)}{\cancel{\rho^2}(\underbrace{\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta}_{\to 1})} = \underbrace{\rho\cos^3\theta}_{\to 0}-2\sin\theta+\underbrace{\rho\,\text{sen}^3\theta}_{\to 0} = -2\sin\theta$$

non esiste poiché dipende da θ

CALCOLO LIMITI:

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ $\boxed{y = mx}$ $\begin{cases} x = t \\ y = mt \end{cases}$ $t \to t_0 \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t+mt} = \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}(1+m)} = \frac{1}{1+m} \longrightarrow \text{NON ESISTE}$$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x+y^3}$ $\begin{cases} x = t \\ y = mt \end{cases}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{m^3t^3}{t+m^3t^3} = \frac{m^3 t^{\cancel{3}}}{\cancel{t}(1+m^3t^2)} = \lim_{t\to 0} \frac{m^3\cancel{t^2}}{1+m^3\cancel{t^2}} = 0$$

ma per $\lim_{y\to 0} \frac{y^3}{0+y^3} = 1$

NON ESISTE

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\mathrm{sen}^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\mathrm{sen}^4\theta} = \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta)}{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta+\rho\,\mathrm{sen}^4\theta)} = \frac{\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^2\theta+\rho\,\mathrm{sen}^4\theta} = 0$$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{\log(x^2+y^2+1)}$ $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{\log(m^2x^2+x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-m)}{\log[x^2(1+m^2)+1]} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-m}{\frac{2x(1+m^2)}{1+x^2(1+m^2)}} = \infty$$

CALCOLO CONTINUITÀ:

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Cioè $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{\cancel{x^2}m^2}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{m^2}{1+m^2} \longrightarrow$$

NON esiste
la funz. non è continua

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+\rho^2)}{\rho^2} = 1$$

Quindi $\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\log(1+\rho^2)\,\rho}{\rho\rho} = \rho = 0 \longrightarrow$ la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$

1

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\mathrm{sen}^2\theta}{\rho^2} = \frac{\cancel{\rho^2}(\cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta)}{\cancel{\rho^2}} = \cos^2\theta-\mathrm{sen}^2\theta =$$

NON ESISTE
la funz. non è continua

4) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ Usiamo: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^3 \cos^3\theta \; \rho\,\text{sen}\theta}{\rho^2} = \frac{\rho^4 \cos^3\theta \; \text{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho^2 \cos^3\theta \; \text{sen}\theta = 0$$ $\to$ la funzione è continua in $\mathbb{R}^2$

5) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^6}{6x^6+2y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Per $(x,y) \neq (0,0)$ il denominatore $6x^6+2y^2>0$ si annulla solo in $(0,0)$

Lungo $y=0$
$f(x,0) = \frac{3x^6}{6x^6} = \frac{1}{2}$

Lungo $x=0$
$f(0,y) = \frac{0}{2y^2} = 0$

$\to$ I due limiti non coincidono
NON ESISTE, NON È CONTINUA.

6) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta \; \rho^3 \text{sen}^3\theta}{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4 \sin^4\theta} = \frac{\rho^5 \cos^2\theta \; \text{sen}^3\theta}{\cancel{\rho^4}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} = \frac{\overset{\to 0}{\rho} \cos^2\theta \; \text{sen}^3\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} = 0$$ $\to$ la funz. è CONTINUA

7) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{8y^3-x^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{8\rho^3\text{sen}^3\theta - \rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \frac{\rho^{\cancel{3}}(8\,\text{sen}^3\theta - \cos^3\theta)}{\cancel{\rho^2}} = 0$$ $\to$ la funz. è CONTINUA

8) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

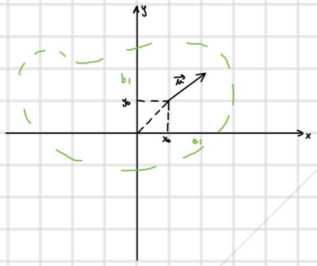
9)

DERIVATE DIREZIONALI:

$f(x,y) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad p = (x_0, y_0) \in \Omega$

$\vec{v} = (a, b)$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\vec{u} = \left(\frac{a}{\|\vec{v}\|}, \frac{b}{\|\vec{v}\|}\right)$



$$\boxed{f'_{\vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + a_1 h,\ y_0 + b_1 h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

Es:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3 + |x|y^2 + y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\vec{v} = (1, -1)$ $\qquad P_0 = (0,0)$ $\qquad f'_{\vec{v}}(0,0)$?

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(0 + \frac{1}{\sqrt{2}}h,\ 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - f(0,0)}{h} = \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h, -\frac{1}{\sqrt{2}}h\right) - 0}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{2}} h^3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}|h|h^2 + \cancel{\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} h^3\right)}}{h^3} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{|h| \cancel{h^2}}{\cancel{h^3}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{|h|}{h} \longrightarrow \text{NON ESISTE}$$

Es: 1) $f(x,y) = x^2 y$ $\qquad P(x,y)$

$\vec{v} = (1, 0)$ $\qquad \vec{w} = (0, 1)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h} = \frac{\cancel{x^2y} + h^2y + 2xhy - \cancel{x^2y}}{h} = \frac{\cancel{h}(hy + 2xy)}{\cancel{h}} = hy + 2xy = 2xy$$

$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ derivata parziale lungo x

2) $f(x,y) = x^2 y$ $\qquad p = (x,y)$

$\vec{w} = (0, 1)$

derivata parziale lungo y

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 h}{h} = x^2$$

$f(x)$ $x=x_0$ derivabile
$\Downarrow$
$x=x_0$ continua

$f(x,y)$ (x_0,y_0) DERIVABILE
$? \Downarrow$ $\Uparrow ?$
$f(x,y)$ (x_0,y_0) è continua

La derivabilità in una funzione ad una variabile implica la continuità nello stesso punto.
Non vale il viceversa cioè una funzione può essere continua senza che sia derivabile

1 ese derivabile ma non continua:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è derivabile?

- $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0\cdot h^2}{h^5} = \dfrac{0}{h^3} = 0$
- $f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{0\cdot h}{h^5} = \dfrac{0}{h^4} = 0$

$\longrightarrow$ La funzione è continua

è continua?

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} \xrightarrow{\substack{y=0 \\ x \text{ varia}}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot 0}{x^4} = \dfrac{0}{x^2} = 0$ restrizione
- restrizione con $y=x^2 \rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$ $\longrightarrow$

Questo limite non esiste poichè lungo una determinata restrizione ovvero lungo l'asse delle x nell'intorno $x=0$ il limite risulta 0 ma lungo la restrizione della parabola avvicinandosi all'origine il limite risulta uguale ad $\frac{1}{2}$.
Essendo diversi posso dire che NON è continua.

DIFFERENZIABILITÀ:

$f(x,y): X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad P=(x_0,y_0) \in \mathring{X}$

DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) se $\exists\, H(h,k): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - [f'_x(P)\cdot h + f'_y(P)\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\longrightarrow$ è differenziabile in questo punto se questo limite risulta uguale a 0.

1) $f'_x(P)$; $f'_y(P)$ CONTINUE $\Longrightarrow$ f è DIFFERENZIABILE in $P=(x_0,y_0)$ $\Longrightarrow$ f è continua in P

2) $f(x,y)$ NON CONTINUA $\overset{\text{oppure}}{\vee}$ $f(x,y)$ NON DERIVABILE $\Longrightarrow$ $f(x,y)$ non è differenziabile

3) $f(x,y)$ CONTINUA $\overset{\text{contemporaneamente}}{\wedge}$ $f(x,y)$ DERIVABILE $\Longrightarrow$ è differenziabile ? ?

Es: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

continuità: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{|x|+|y|}$ $\quad$ Considero $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{|\rho\cos\theta| + |\rho\sin\theta|} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{|\rho|\ (|\cos\theta|+|\sin\theta|)} = 0$$

$\longrightarrow$ la funzione è continua

DERIVABILITÀ: $u=(a,b)$; $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(ah,bh)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^3(a^3+b^3)}{|h|(|a|+|b|)} = 0$

$f'_x(0,0)=0$ $\quad f'_y(0,0)=0$

$\longrightarrow$ è derivabile

è differenziabile? $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(h,k)-0-[0\cdot h+0k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^3+k^3}{|h|+|k|}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \dfrac{\rho^3}{|\rho|}\cdot\dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{|\cos\theta|+|\sin\theta|} = 0$ $\longrightarrow$ è differenziabile

ESE DIFFERENZIABILITÀ:

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

CONTINUITÀ: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} =$ usiamo $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\theta\, \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \frac{\rho^4 \cos\theta \sin^3\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho^2\cos\theta\sin^3\theta = 0$ ⟶ la funzione è continua

DERIVABILITÀ: $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot 0 - 0}{h^2 \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}\,0}{\cancel{h^3}} = 0$

$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0h^3}{0+h^2\cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\cancel{h^3}}{\cancel{h^3}} = 0$ ⟶ la funzione è derivabile

è differenziabile? $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0-[0\cdot h+0\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^3}{\sqrt{h^2+k^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk^3}{h^2+k^2}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{hk^3}{h^2+k^2}$ usiamo $\begin{cases} h = \rho\cos\theta \\ k = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\theta\sin^3\theta}{\cancel{\rho^2}} = \rho^2\cos\theta\sin^3\theta = 0$ ⟶ è differenziabile

2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

CONTINUITÀ: $f(x,y) \to (0,0)$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} =$ usiamo $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho(\rho\cos^2\theta\sin\theta)}{\cancel{\rho^2}} = 0$ ⟶ è continua

Derivabilità: $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}0}{\cancel{h^2}\cdot h} = 0$

$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0\cancel{h}}{0+h^2\cancel{h}} = 0$ ⟶ è derivabile

differenziabilità: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0-[0\cdot h+0\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k}{h^2+k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$ usiamo $\begin{cases} h = \rho\cos\theta \\ k = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho\sin\theta}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} = \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} = \frac{\cancel{\rho}\cos^2\theta\sin\theta}{\cancel{\rho}} = \cos^2\theta\sin\theta$ ⟶ NON ESISTE, non è differenziabile.

3) $f(x) \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

CONTINUITÀ: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4}$ usiamo: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^3\sin^3\theta}{\rho^4\cos^4\theta+\rho^4\sin^4\theta} = \frac{\cancel{\rho^4}(\cos^2\theta\,\rho\sin^3\theta)}{\cancel{\rho^4}(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} = \frac{\rho\cos^2\theta\sin^3\theta}{\rho^4\cos^4\theta\sin^4\theta} = \frac{\cos^2\theta\sin^3\theta}{\rho\cos^4\theta\sin^4\theta} = 0$ ⟶ è continua

derivabilità: $f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h^2}\cdot 0}{h^4\cdot \cancel{h}} = 0$

$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0h^3}{h^5} = 0$. ⟶ è derivabile

differenziabilità: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-0-[0\cdot h+0\cdot k]}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2k^3}{h^4+k^4} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$ usiamo $\begin{cases} h = \rho\cos\theta \\ k = \rho\sin\theta \end{cases}$

$\lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\,\rho^3\sin^3\theta}{\rho^4\cos^4\theta\,\rho^4\sin^4\theta} \cdot \frac{1}{\rho} =$ NON ESISTE, NON è derivabile

EQ. PIANO TANGENTE al grafico: $z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

Ese: $f(x,y) = 3x^2+4xy+5y \qquad (3,1, f(3,1))$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Sostituiamo: $\frac{3(x+h)^2+4(x+h)(y)+5y-(3x^2+4xy+5y)}{h} = \frac{3(x^2+h^2+2xh)+(4x+4h)y+5y-(3x^2+4xy+5y)}{h} = \frac{\cancel{3x^2}+3h^2+6xh+\cancel{4xy}+4hy+\cancel{5y}-(\cancel{3x^2}+\cancel{4xy}+\cancel{5y})}{h} =$

$$\frac{6xh+3h^2+4hy}{h} = \frac{\cancel{h}(6x+3h+4y)}{\cancel{h}} = 6x+3h+4y$$

Quindi diventa

$$\lim_{h\to 0} 6x+4y+3h = 6x+4y$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Sostituiamo: $\frac{3x^2+4x(y+h)+5(y+h)-(3x^2+4xy+5y)}{h} = \frac{\cancel{3x^2}+\cancel{4xy}+4xh+\cancel{5y}+5h-(\cancel{3x^2}+\cancel{4xy}+\cancel{5y})}{h} = \frac{4xh+5h}{h} = \frac{\cancel{h}(4x+5)}{\cancel{h}} = 4x+5$

Ora nei punti:

$f_x(3,1) = 6(3)+4(1) = 18+4 = 22$

$f_y(3,1) = 4(3)+5 = 17$

$f(a,b) = f(3,1) \to 3(3)^2+4(3)(1)+5(1) = 3(9)+12+5 = 27+12+5=44$

Applichiamo la formula: $44+22(x-3)+17(y-1) = 22x+17-39$

2) $f(x,y) = 4x^2y+2xy^3 \qquad (-2,3, f(2,3))$

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2y+2(x+h)y^3-(4x^2y+2xy^3)}{h} = \frac{4(x^2+h^2+2xh)\cdot y+(2x+2h)y^3-(4x^2y+2xy^3)}{h} = \frac{\cancel{4x^2y}+4h^2y+8xhy+\cancel{2xy^3}+2hy^3-(\cancel{4x^2y}+\cancel{2xy^3})}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4h^2y+8xhy+2hy^3}{h} = \frac{2\cancel{h}(2hy+4xy+y^3)}{\cancel{h}} = 4hy+8xy+2y^3 = 8xy+2y^3$

$f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{4x^2\cdot(y+h)+2x(y+h)^3-(4x^2y+2xy^3)}{h} = \frac{4x^2y+4x^2h+2x(y^3+3y^2h+3yh^2+h^3)-(4x^2y+2xy^3)}{h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{4x^2y}+4x^2h+\cancel{2xy^3}+6xy^2h+6xyh^2+2xh^3-(\cancel{4x^2y}+\cancel{2xy^3})}{h} = \frac{4x^2h+6xy^2h+6xyh^2+2xh^3}{h} = \frac{\cancel{h}(4x^2+6xy^2+6xyh+2xh)}{\cancel{h}} = 4x^2+6xy^2$

Per $f_x(x,y) \to (-2,3) = 8(-2)(3)+2(3)^3 = -48+54 = 6$

$f_y(x,y) \to (-2,3) = -92$

$f(x,y) \to (-2,3) = 4(-2)^2 3+2(-2)(3)^3 = -60$

Applichiamo la formula: $z = -60+6(x+2)-92(y-3)$

$-60+6x+12-92y+276 = 6x-92y+228$

$z = 6x-92y+228$

Derivate composte:

1) $f(x,y) = x^2+3xy+5y^2$

$g(t) = (\sin t, \cos t)$

$h = f \circ g$

$f_x(x,y) \rightarrow \lim_{h\to0} \frac{(x+h, y) - f(x,y)}{h}$; $\frac{(x+h)^2+3(x+h)y+5y^2-(x^2+3xy+5y^2)}{h} = \frac{\cancel{x^2}+h^2+2xh+\cancel{3xy}+3hy+\cancel{5y^2}-(\cancel{x^2}+\cancel{3xy}+\cancel{5y^2})}{h}$

$\lim_{h\to0} \frac{h^2+2xh+3hy}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2x+3y)}{\cancel{h}} = 2x+3y$

$f_y(x,y) \longrightarrow \lim_{h\to0} \frac{(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \frac{x^2+3x(y+h)-5(y+h)^2-(x^2+3xy+5y^2)}{h} = \frac{x^2+3xy+3xh-5(y^2+h^2-10hy)-(x^2+3xy+5y^2)}{h} =$

$\frac{\cancel{x^2}+\cancel{3xy}+3xh-\cancel{5y^2}-5h^2+50hy-(\cancel{x^2}+\cancel{3xy}+\cancel{5y^2})}{h} = \frac{3xh-5h^2+50hy}{h} = 3x+10y$

$\nabla f\,(2x+3y \; , \; 3x+10y)$

$\nabla f(g(t)) = (2\sin t+3\cos t \; , \; 3\sin t+10\cos t)$

$h'(t) = \nabla f(g(t)) \cdot g'(t) \longrightarrow (2\sin t+3\cos t)(\cos t) + (3\sin t+10\cos t)(-\sin t)$

$2\sin t\cos t+3\cos^2 t - 3\sin^2 t - 10\sin t\cos t$

$3(\cos^2 t - \sin^2 t) - 8\sin t\cos t$

$3\cos(2t) - 4\sin(2t)$

2) $(x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}$?

$g(t) = (e^t, e^{-t})$

$h = f \circ g$

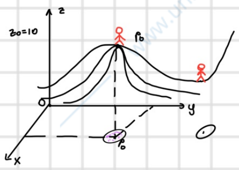
$f_x(x,y) \rightarrow \lim_{h\to0} \frac{(x+h, y) - f(x,y)}{h} = \frac{(x+h)^2+y^2 \log\sqrt{(x+h)^2+y^2} - [(x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2}]}{h} = \frac{x^2+h^2+2xh+y^2\log\sqrt{x^2+h^2+2xh} - [(x^2+y^2)\log\sqrt{x^2+y^2})]}{h}$

MASSIMI e MINIMI:

$f(x,y) : X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad P_0 = (x_0, y_0) \in \mathring{X}$

massimo relativo quando: $\exists I_\varepsilon(P_0)$ $\quad f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$

minimo relativo quando: $\exists I_\varepsilon(P_0)$ $\quad f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$



$f(x,y) : X \subseteq \mathbb{R}^2$ $\qquad P_0(x_0, y_0) \in \mathring{X}$ $\qquad$ MAX LOCALE / MIN LOCALE

$$\exists \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \qquad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \implies \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \end{cases}$$

MATRICE ESSIANA:

$f(x,y) : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f'_x \qquad f'_y$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

$f(x,y,z) : X \subseteq \mathbb{R}^3$

$f'_x \qquad f'_y \qquad f'_z$

$$H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{bmatrix}$$

$f(x,y) : X \to \mathbb{R}$ $\qquad P_0(x_0, y_0) \in \mathring{X}$ $\qquad$ STAZIONARIO

$f'_x \quad f'_y \quad f''_{xy} \quad f''_{yx}$ $\qquad I(P_0) \implies f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

1) $|H| > 0 \ \wedge \ f''_{xx} > 0 \ \to$ minimo relativo
2) $|H| > 0 \ \wedge \ f''_{xx} < 0 \ \to$ massimo relativo
3) $|H| < 0$ selle
4) $|H| = 0$???

Es:

$f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 3x - 3y^2$

$\nabla f(x,y) = 0 \quad (f'_x, f'_y)$

$f'_x = 3x^2 - 3 \qquad f'_y = 6y^2 - 6y$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 6y^2 - 6y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} x^2 - 1 = 0 \\ 6y(y-1) = 0 \end{matrix} ; \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \ \vee \ y = 1 \end{cases}$$

A = (-1, 0) $\qquad$ C(1, 0)

B = (-1, 1) $\qquad$ D(1, 1)

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 12y - 6 \end{bmatrix} =$$

A $\quad |H| = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} > 0$ $\qquad$ max relativo

B $\quad |H| = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} < 0$ $\qquad$ selle

C $\quad |H| = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} < 0$ $\qquad$ selle

D $\quad |H| = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} > 0$ $\qquad$ min relativo

1) $f(x,y) = x^2+2y^2-4x-4y$

$\nabla f(x,y) = 0 \qquad (f'_x \quad f'_y)$

$f'_x = 2x-4 \qquad f'_y = 4y-4$

$\begin{cases} 2x-4=0 \\ 4y-4=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} > 0$ minimo relativo

2) $f(x,y) = 9-2x+4y-x^2-4y^2$

$\nabla f(x,y) = 0 \qquad (f'_x \quad f'_y)$

$f'_x = -2-2x \qquad f'_y = 4-8y$

$\begin{cases} 2+2x=0 \\ 8y-4=0 \end{cases} ; \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$

$H(x,y) = \begin{array}{c} {\scriptstyle <0} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \end{array} > 0$ massimo relativo

3) $f(x,y) = xy-x^2-y^2-2x-2y+4$

$f'_x = y-2x-2 \qquad f'_y = x-2y-2$

$\begin{cases} y-2x-2=0 \\ x-2y-2=0 \end{cases} ; \begin{cases} y=2x+2 \\ x=2y+2 \end{cases} ; \begin{cases} y=2(2y+2)+2 \\ // \end{cases} ; \begin{cases} y=4y+4+2 \\ // \end{cases} ; \begin{cases} y=-2 \\ x=-2 \end{cases}$

$H = \begin{array}{c} {\scriptstyle <0} \\ \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} > 0$ massimo relativo

4) $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$

$f'_x = 3x^2-3y \qquad f'_y = 1-x$

$\begin{cases} \cancel{3}x^2-\cancel{3}y=0 \\ 1-3x=0 \end{cases} ; \begin{cases} x^2-y=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{9}- \quad 0 \\ x= \end{cases} ; \begin{cases} y-\frac{1}{9}=0 \\ x=\frac{1}{3}=0 \end{cases} ; \begin{cases} y=\frac{1}{9} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$

CURVE:

$f: A (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$
$x \to y = f(x)$

$x \to \boxed{f} \to y = f(x)$ F. scalare

$f: A (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$
$t \to (x_1, \dots, x_n) = f(t)$
$n = 2, 3 \implies$ **Curva**

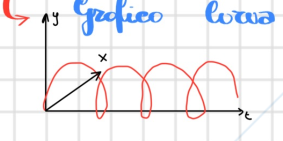
$t \to \boxed{f} \to x, y$ F. vettoriale

• Consideriamo $\gamma: [a,b] \ (\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$
$t \to (x(t), y(t)) = \gamma(t)$

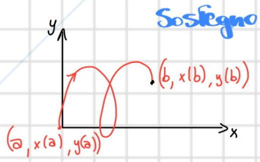
$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

$(t_i, x(t_i), y(t_i))$

Grafico curva

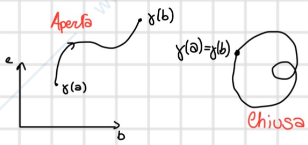


Sostegno γ



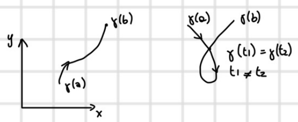
1) CHIUSURA: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(a) = \gamma(b)$

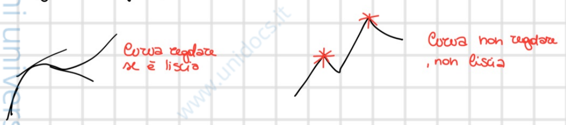


2) Semplicità: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t_1 = t_2 \iff \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \implies t_1 \neq t_2 \qquad t_1, t_2 \in (a,b)$



3) Regolarità: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$



Matematicamente possiamo osservare che è ben definita la tangente in ogni punto in cui la disegno

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$
$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \longrightarrow$ velocità della curva

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \neq 0 \qquad \forall t \in (a,b)$

se è verificata questa condizione la curva è regolare

versore tangente: $\underset{\sim}{T}(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \begin{pmatrix} \dfrac{x'(t)}{[\ ]^2+[\ ]^2} \\ \dfrac{y'(t)}{[\ ]^2+[\ ]^2} \end{pmatrix}$

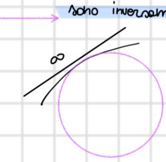
$N(t) = \dfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$

T ed N costituiscono un piano osculatore ed esso contiene la circonferenza osculatrice

versore binormale: $B(T) = T(t) \times N(t)$

Curvatura: $K(T) = \|T'(t)\|$
raggio di curvatura: $\dfrac{1}{k(t)}$

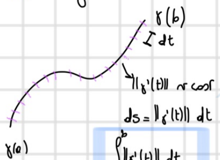
sono inversamente proporzionali



più il raggio è grande più la curva tende ad essere retta

4) lunghezza:

$s = vt$



$\gamma(t) = (x(t), y(t))$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$
$t = [a,b]$

$ds = \|\gamma'(t)\| \, dt$

$\boxed{\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt}$ con $\|\gamma'(t)\| \neq 0$

Ese 1) $\gamma(t) = (t, 1-2t^2) \quad t \in [0,1]$

1) CHIUSURA: $\gamma(a) = \gamma(b) \qquad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(0) = (0,1)$
$\gamma(1) = (1,-1)$ $\rightarrow \gamma(0) \neq \gamma(1) \Rightarrow$ curva aperta

2) semplice? : $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Longleftrightarrow t_1 = t_2$

$A = \gamma(t_1) = (t_1, 1-2t_1^2) \qquad B = \gamma(t_2) = (t_2, 1-2t_2^2)$

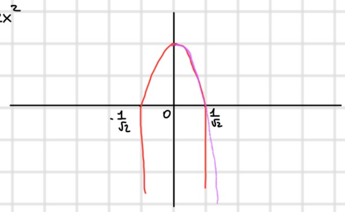
$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ 1-2t_1^2 = 1-2t_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$ La curva è semplice

3) regolarità: $\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in (a,b) \qquad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma'(t) = (1, -4t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+16t^2} \neq 0 \quad \forall t \in (0,1) \Rightarrow$ La curva è regolare

Sostegno: $\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1-2t^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1-2x^2$



Ese 2: $\gamma(t) = (t^2, 1-t^2) \quad t \in [-2,2]$

1) chiusura: $\gamma(-2) = (4,-3)$
$\gamma(2) = (4,-3)$ $\Rightarrow \gamma(-2) = \gamma(2)$. La curva è chiusa

2) semplicità? : $\gamma(1) = (1,0)$
$\gamma(-1) = (1,0)$ $\Rightarrow \gamma(1) = \gamma(-1)$
$1 \neq -1$
$1, -1 \in (-2,2)$

NON è semplice

$\longrightarrow \exists$ due istanti di tempo diversi $\in$ all'intervallo aperto t.c. la posizione del punto materiale è la stessa.

Oppure: $A(t_1^2, 1-t_1^2) = \gamma(t_1)$
$B(t_2^2, 1-t_2^2) = \gamma(t_2)$

$$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \\ 1-t_1^2 = 1-t_2^2 \end{cases} ; \qquad t_1 = \pm\sqrt{t_2^2} \Rightarrow \begin{cases} -t_2 \\ t_2 \end{cases}$$

Quando $\begin{cases} t_1 = t_2 \\ 1-t_2^2 = 1-t_2^2 \end{cases}$ Vera

Quindi $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \not\Rightarrow t_1 = t_2$
$\hookrightarrow t_1 = t_2$
$t_1 = -t_2 \qquad \gamma(1) = \gamma(-1)$

3) regolarità: $\gamma'(t) = (2t, -2t)$
$\|\gamma'(t)\| \neq 0$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2+4t^2} = \sqrt{8t^2} = 2\sqrt{2}|t|$
$2\sqrt{2}|t| = 0 \qquad t = 0 \in (-2,2) \Rightarrow$ non è regolare

Lunghezza: $\int_{-2}^{2} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_{-2}^{2} 2\sqrt{2}|t| \, dt = \int_{-2}^{0} 2\sqrt{2}(-t) \, dt + \int_{0}^{2} 2\sqrt{2}(t) \, dt = \cancel{2}\sqrt{2}\left(-\frac{t^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_{-2}^{0} + \cancel{2}\sqrt{2}\,\frac{t^2}{\cancel{2}}\Big|_{0}^{2} = \sqrt{2}(0+4) + \sqrt{2}(4) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

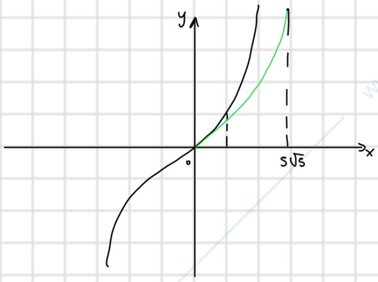
$|t| = \begin{cases} t & \text{se } t > 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$

$\downarrow$ lunghezza

Ese 3)

$\gamma(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}) \qquad t \in [0,5]$

$\gamma(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^{\frac{3}{2}} \end{cases} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} \rightarrow y = \sqrt{x^3}$



lunghezza:

$$\int_0^5 \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}t}\; dt = \int_0^5 \left(1+\frac{9}{4}t\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

$\gamma'(t) = (1, \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}})$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+\frac{9}{4}t} \neq 0 \qquad \forall t \in (0,5)$

$$= \frac{4}{9}\int_0^5 \frac{9}{4}\left(1+\frac{9}{4}t\right)^{\frac{1}{2}} dt = \dots$$

Ese 4:

$\gamma(t) = (t^2, \frac{1}{3}t^3) \qquad t \in [0,2]$

1) chiusura: $\gamma(0) = (0,0)$; $\gamma(2) = (4, \frac{8}{3}) \Rightarrow \gamma(0) \neq \gamma(2)$ La curva è aperta

2) semplicità: $A(t_1^2, \frac{1}{3}t_1^3) \qquad B(t_2^2, \frac{1}{3}t_2^3)$

$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \\ \frac{1}{3}t_1^3 = \frac{1}{3}t_2^3 \end{cases} ; \begin{cases} // \\ \frac{1}{3}(t_2^2)^3 = \frac{1}{3}(t_1^2)^3 \end{cases} ; \begin{cases} // \\ t_2^6 = t_1^6 \end{cases} \rightarrow$ La curva è semplice

3) regolarità: $\gamma'(t) = (2t, t^2)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4t^2 + t^4} = \sqrt{t^2(4+t^2)} = |t|\sqrt{4+t^2}$

$|t|\sqrt{4+t^2} = 0$: $|t| = 0 \Rightarrow t = 0 \notin (0,2)$; $4+t^2 = 0 \Rightarrow$ Mai in $\mathbb{R}$

La curva è regolare

Lunghezza: $\int_0^2 |t|\sqrt{4+t^2}\, dt = \int_0^2 t\sqrt{4+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 2t(4+t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt = \left[\frac{(4+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[(4+4)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[2^{\frac{3}{2}}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right]$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}^{\frac{3}{2}}(2^{\frac{3}{2}}-1)$

$\frac{4}{9}^{\frac{3}{2}}(2^{\frac{3}{2}}-1)$

Ese 5)

$\gamma(t) = (t, 2t+1) \qquad t \in [1,2]$

chiusura: $\gamma(1) = (1,3)$; $\gamma(2) = (2,5) \Rightarrow \gamma(1) \neq \gamma(2) \longrightarrow$ Curva aperta

semplicità: $A(t_1, 2t_1+1) \qquad B(t_2, 2t_2+1)$

$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ 2t_1 + 1 = 2t_2 + 1 \end{cases} ; \begin{cases} // \\ 2t_1 = 2t_2 + \cancel{1} - \cancel{1} \end{cases} ; \begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_1 = t_2 \end{cases} \Rightarrow \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \longrightarrow$ La curva è semplice

regolarità: $\|\gamma'(t)\| \neq 0$

$\gamma'(t) = (1, 2)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \neq 0 \longrightarrow$ è regolare

Ese 6)

$\gamma(t) = (t^3 - t, t^2) \qquad t \in \mathbb{R}$

chiusura: La curva non è chiusa su tutto $\mathbb{R}$ perchè non è periodica.

semplicità: $\begin{cases} t_1^2 = t_2^2 \\ t_1^3 - t_1 = t_2^3 - t_2 \end{cases} \rightarrow t_1 = \pm\sqrt{t_2^2}$: $-t_2$, t_2

Con $t_1 = -t_2 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -t_2 \\ (-t_2)^3 + t_2 = t_2^3 - t_2 \end{cases} ; \begin{cases} t_1 = -t_2 \\ t_2(t_2^2 - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ t_2 = 0 \\ t_2 = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow t_1 \neq t_2$ non è semplice

regolarità: $\|\gamma'(t)\| \neq 0$

$\gamma'(t) = (3t^2 - 1, 2t)$; $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(3t^2-1)^2 + 4t^2} = \sqrt{9t^4 + 1 - 6t^2 + 4t^2} = \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1} \neq 0$ è regolare

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Ese 7) $\gamma(t) = 3\sin t, \cos(3t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

1) chiusura: $\gamma(0) = (0, 1)$
$\gamma(2\pi) = (0, 1) \longrightarrow$ Chiuse

2) semplicità: $\begin{cases} 3\sin t_1 = 3\sin t_2 \\ \cos(3t_1) = \cos 3(t_2) \end{cases}$; $t_1 \neq t_2$ non è semplice

3) regolarità: $\|\gamma'(t)\| \neq 0$
$\gamma'(t) = (3\cos t, -3\sin(3t))$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2(3t)} \neq 0$ è regolare

---

Calcolare la lunghezza:

Ese 1: $\gamma(t) = (t^3, t^2)$ $\quad t \in [0, 1]$

$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|$

$\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = \sqrt{t^2(9t^2+4)} = |t|\sqrt{9t^2+4}$

$\int_0^1 |t|\sqrt{9t^2+4}\, dt = \int_0^1 t\sqrt{9t^2+4} = \int_0^1 t(9t^2+4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{18}\int_0^1 18t(9t^2+4)^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 \frac{(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}\int_0^1 (13^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8)$

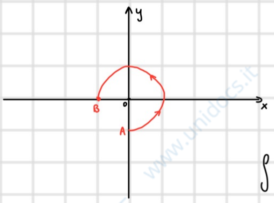
Ese 2: $\gamma(t) = (e^t, e^t + 1)$ $\quad t \in [0, 1]$

$\int_0^1 \|\gamma'(t)\|$

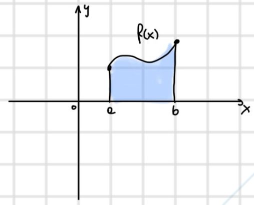
$\gamma'(t) = (e^t, e^t)$
$\sqrt{(e^t)^2 + (e^t)^2} = \sqrt{2e^{2t}} = e^t\sqrt{2}$

$\int_0^1 e^t\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t\, dt = \sqrt{2}(e - 1)$

INTEGRALI CURVILINEI:



$\int f(x,y)\,ds$



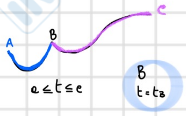
$\int_a^b f(x)\,dx$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

Γ_1 REGOLARE A-B $a \le t < b$

Γ_2 REGOLARE B-C $b < t \le c$

$(x(t), y(t), z(t))$
$(x'(t), y'(t), z'(t))$



$a \le t \le c$

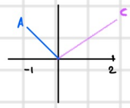
B $t = t_B$

$\Gamma: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t| \end{cases} \quad t \in [-1, 2]$

$\Gamma_1 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t \end{cases}$ $-1 \le t < 0$ $y'(t) = -1$

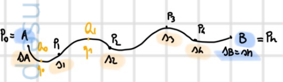
$\Gamma_2 = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}$ $0 < t \le 2$ $y'(t) = 1$

$\longrightarrow$ curva generalmente regolare:



$f(x,y,z): \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ CONTINUA $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^2)$

Γ CURVA GENERALMENTE REGOLARE $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]$



$(s_1 - s_0)\cdot f(Q_0) + (s_2 - s_1)\cdot f(Q_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1})\, f(Q_{n-1})$

$\varepsilon = (s_{i+1} - s_i) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} S \qquad \int_A^B f(x,y,z)\,ds$

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt$$

Ese 1) $\int \frac{1}{\sqrt{3}} xyz\,ds$ $\quad x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = \sqrt{3}t \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{3}\, t \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 3}\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} 2\cos t \operatorname{sen} t\, dt = \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} 2t\,dt =$$

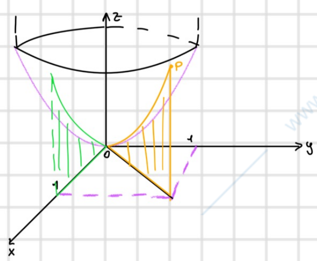
$\boxed{du = \operatorname{sen} 2t\,dt \quad u = -\frac{\cos 2t}{2} \quad v = t \quad dv = dt}$

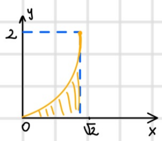
$$\left[-\frac{1}{2} t \cos 2t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right]_0^{2\pi}$$

Ese 2) $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad x = t,\ y = t \quad t \in [0,1]$

$$\int_0^1 t^2 + t^2 \sqrt{1+1}\,dt = \int_0^1 2t^2\sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Significato geometrico:





$y = x^2$

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{0} = \frac{1}{3} 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$