2ª parte del semestre

esercitazione 7:

PROPRIETÀ DELLA MISURA DI LEBESGUE in $\mathbb{R}^n$:

LEMMA

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A + v \doteq \{x + v : x \in A\} = \{y \in \mathbb{R}^n : y - v \in A$

Si ha

I) $m^*(A+v) = m^*(A)$

II) $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow A+v \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

DIM:

I)

Se $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è famiglia di intervalli

$I_j = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \times \dots \times [a_n^{(j)}, b_n^{(j)}]$

$\Rightarrow A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j \Leftrightarrow A + v \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (I_j + v)$

$I_j + v = [a_1^j + v_1, b_1^j + v_1] \times \dots \times [a_n^j + v_n, b_n^j + v_n]$

$vol(I_j + v) = vol(I_j)$

La tesi segue dalla def. di m^*

$$m^*(A) = \inf_{I_j \in A} vol(\{I_j\})$$

$$\wedge \quad m^*(A+v) = \inf_{I_j \in A} vol(I_j + v)$$

II)

Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ $\exists G \subset \mathbb{R}^n$ aperto t.c. $A \subset G$ e $m(G \setminus A) < \varepsilon$

Ma $G+v$ è aperto $G+v \supset A+v$

Inoltre

$$m\left((G+v)-(A+v)\right) = m\left((G\setminus A)+v\right) \underset{\mathrm{I}}{=} m(G\setminus A) < \varepsilon$$

PROPRIETÀ 1

se $\lambda > 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ posto $\lambda \cdot A = \{\lambda x \; x \in A\}$

I $\Rightarrow$ $m^*(\lambda A) = \lambda^n m^*(A)$

II $\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \iff \lambda A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

DIM per esercizio ($\Rightarrow$ p.d.f nell soluzione)

PROPRIETÀ 2

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ T trasformazione

Affine (ovvero $T(x) = Mx + b$, $M \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

e $b \in \mathbb{R}^n$) Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$

posto $T(A) = \{T(x), x \in A\}$

I $\Rightarrow$ $m^*(T(A)) = |\det M|\, m^*(A)$

II $\Rightarrow$ Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow T(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Inoltre se T è invertibile ($\det M \neq 0$)

Vale $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \iff T(A) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

PROPOSIZIONE

Sia $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \exists B, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ↓ Alg. di Borel

con $B \subset A \subset D$ e $m(D \setminus B) = 0$

DIM:

Sia $j \in \mathbb{N}$, poiché $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

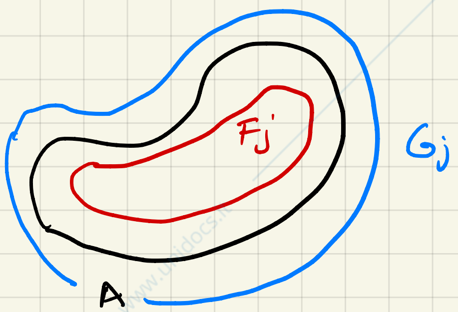
$\exists G_j \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto t.c. $A \subset G_j$ e

$m(G_j \setminus A) < \frac{1}{2j}$ (regolarità esterna della misura di L.)

Si ha anche,

$\exists F_j \subset \mathbb{R}^n$ chiuso t.c. $F_j \subset A$ e $m(A \setminus F_j) < \frac{1}{2j}$

(regolarità interna della misura di L.)



$m(G_j \setminus F_j) = m((G_j \setminus A) \cup (A \setminus F_j)) =$

$= m(\underbrace{G_j \setminus A}_{\text{mis.}}) + m(\underbrace{A \setminus F_j}_{\text{mis}}) < \frac{1}{j}$

↑ ADDITIVITÀ

Sia $D = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} G_j$ e $B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} F_j \Rightarrow$

$D, B \in M(\mathbb{R}^n)$ e $B \subset A \subset D$

Inoltre $D \setminus B \subset G_j \setminus F_j \Rightarrow$ ↙ monotonia della misura.

$$m(D \setminus B) \leq m(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j} \quad \forall j$$

$$\Rightarrow m(D \setminus B) = 0$$

PATOLOGIE DELLA MISURA DI LEBESGUE:

Esempi di misura nulla:

1) Se $x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow m(\{x\}) = 0$

INFATTI

$m(\{x\}) = m(\{0\})$ (invarianza x traslazione)

$$\{0\} \subset \left[-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right]^n$$

$$\Rightarrow m(0) \leq \left[\frac{2}{k}\right]^n \Rightarrow m(\{x\}) = 0$$

2) Se A è al più numerabile $\Rightarrow m\{A\} = 0$

INFATTI

$A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ e

$$m^*(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{m^*(\{x_n\})}_{=0 \text{ per } 1)} = 0$$

OSSERVAZIONE

$m(\mathbb{Q}) = 0$ (nonostante siano densi!!)

DOMANDA:

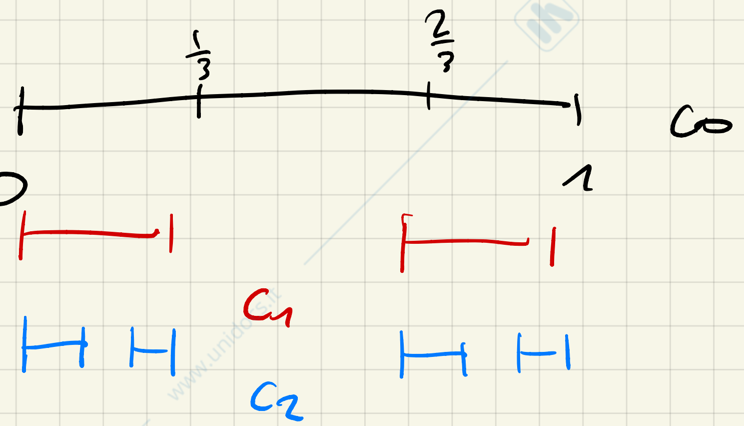
Tutti gli ins. di misura nulla sono numerabili?

No

CONTROESEMPIO

Insieme ternario di Cantor

$C_0 \doteq [0;1]$



$C_1 \doteq [0;\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};1]$

$C_2 \doteq [0;\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9};\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9};1]$

...

$$C_{n+1} = \frac{1}{3} C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} C_n\right) \quad \forall n$$

(RISCALANDO)

Pongo

$$C = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} C_n$$

L'insieme di cantor può essere descritto tramite sviluppi ternari:

$$x \in [0;1] \iff x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 3^{-k} \qquad c_k \in \{0;1,2\}$$

Lo sviluppo è unico tranne per i numeri a sviluppo finito ($c_k = 0$ per $k > n_0$)

LEMMA

$x \in C \iff \exists \{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $c_k \in \{0; 2\}$

insieme di Cantor

t.c. $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 3^{-k}$

[ovvero x deve avere rappresentazione ternaria che non abbia 2]

DIM x esercizio

PROPOSIZIONE

1) $m(C) = 0$

2) $\text{card}(C) = \text{card}(\mathbb{R})$ $\quad (C \sim \mathbb{R})$

3) C e' compatto

DIM

1) $m(\underbrace{C_n}_{\text{chiusi}}) = m\left(\frac{C_{n-1}}{3} + \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)\right) =$

disgiunti x costruzione

$= m\left(\frac{C_{n-1}}{3}\right) + m\left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right) =$

$= m\left(\frac{C_{n-1}}{3}\right) + m\left(\frac{C_{n-1}}{3}\right) = 2\, m\left(\frac{C_{n-1}}{3}\right) =$

$= \frac{2}{3} m(C_{n-1})$

$\Rightarrow m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n m(\underbrace{C_0}_{[0,1]}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$m(C) \leq m(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$

2)

$C \sim \{(c_1, c_2 \dots c_n) \text{ t.c. } c_j \in \{0;2\} \ \forall j \in \mathbb{N}\}$

$\sim \{(b_1, b_2 \dots b_n) \text{ t.c. } b_j \in \{0;1\} \ \forall j \in \mathbb{N}\}$

$\sim [0;1] \sim \mathbb{R}$

3) C e' intersezione di chiusi
$\Rightarrow$ C e' chiuso

$C \subset [0;1] \Rightarrow$ C e' limitato

$\Rightarrow$ C e' compatto

Heine Borel

OSS

C e' perfetto ossia è formato solo da punti di accumulazione

(e in realtà solo anche tutti ∇ di frontiera)

DIM x esercizio

DEF

$\Psi : [0;1] \to [0;1]$

è possibile definire a partire dall'insieme di Cantor la funzione Ψ detta FUNZIONE di CANTOR-VITALI o colloquialmente "Scala del Diavolo".

Ha simpatiche prop. patologiche.

Sia $O_K = [0;1] \setminus C_K$

O_K è formato da 2^{K-1} intervalli aperti $\{I_j^{(K)}\}_{j=1}^{2^K-1}$

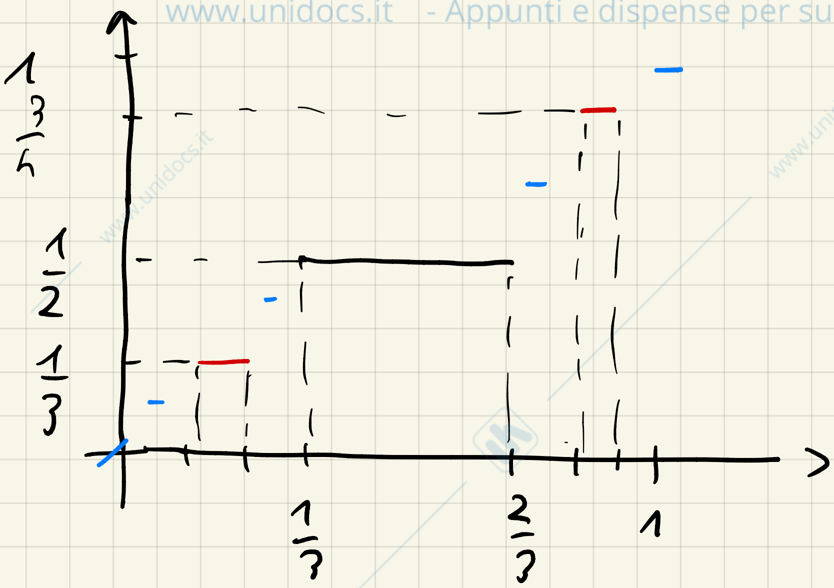
definiamo Ψ su O_K come la funzione non decrescente che assume i valori

$\left\{ \frac{1}{2^K} ; \frac{2}{2^K} \dots \frac{2^K-1}{2^K} \right\}$

sugli intervalli $I_j^{(K)}$ (ed è costante su ogni $I_j^{(K)}$)

- su $O_1 = \left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} \right) \quad \Psi = \frac{1}{2}$
- su $O_2 = \left(\frac{1}{9} ; \frac{2}{9} \right) \cup \left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} \right) \cup \left(\frac{7}{9} ; \frac{8}{9} \right)$

$$\Psi = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } x \in \frac{1}{9} ; \frac{2}{9} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \text{se } x \in \frac{7}{9} ; \frac{8}{9} \end{cases}$$



ψ è per ora definita su $\bigcup^{\infty} \alpha_k = [0;1] \setminus C$

Definisco ψ su C

Pongo $\psi(0) = 0$.

$\psi(x) = \sup \{ \psi(t) : t \in ([0;1] \setminus C) \cap [0;x] \} \quad \forall x \in C$

(è crescente, completa la scala)

PROPOSIZIONE

$\psi \; [0;1] \to [0;1]$

1) è non decrescente
2) è continua
3) è suriettiva
4) è derivabile in $[0;1] \setminus C$ e vale $\psi'(x) = 0 \quad \forall x \in [0;1] \setminus C$

OSSERVAZIONE:

$m(\{x \in [0;1] \text{ t.c. } \psi'(x) = 0\}) = 1$

ma ψ non è costante

$\Rightarrow$ non è misurabile ma non è invertibile

INSIEME DI VITALI

esempio di insieme non misurabile di $\mathbb{R}$.

ASSIOMA DELLA SCELTA:

Se $\mathcal{Y} = \{ U_\alpha \}_{\alpha \in I}$ è una famiglia di insiemi non vuoti

allora:

$\exists\, \varphi : \mathcal{Y} \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ t.c.

$\varphi(U_\alpha) \in U_\alpha$

φ è una funzione di scelta.

Costruiamo un insieme di vitali:

Def. $\sim$ relazione di equivalenza

$x \sim y \iff x - y = \mathbb{Q}$.

(si dim che è relaz. di eq)

$E_x = \{ y \in \mathbb{R}$ t.c. $y \sim x \} = \{ x + q$ t.c. $q \in \mathbb{Q} \}$

classe di eq

- $E_0 = \mathbb{Q}$
- $x \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow E_x \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $E_x \cap E_y \neq \emptyset \iff E_x = E_y$

Tramite l'assioma della scelta

$\exists\, E \subset \mathbb{R}$ che contiene uno e un solo elemento della classe E_x.

Quindi:

E contiene un'unico razionale q oppure $\sqrt{2}+q$ ecc ecc.

E ha 2 importanti proprietà:

1) $(E+q) \cap (E+r) = \emptyset$ se $\forall r \neq q \in \mathbb{Q}$

Infatti

Se per assurdo $x \in (E+q) \cap (E+r)$

$\Rightarrow \exists\, y, z \in E$ t.c. $x = y+q = z+r$

ma allora $y-z = r-q \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow z, y \in E_y \cap E$ ma

E contiene un solo elemento $\Rightarrow z = y$

Assurdo

2) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (E+q) = \mathbb{R}$

Infatti

$\subset$ è ovvio

$\supset$ sia $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists!\, y \in E_x \cap E$

Allora $q = x-y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = y+q$

$\Rightarrow x \in E+q$

TEOREMA (DI VITALI)

Sia $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $m^*(A)>0$
$\Rightarrow \exists B \subset A$ t.c. $B \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$

DIM:

Se $A \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}) \Rightarrow B = A$ (banale)

Se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, assumiamo che A è limitato senza perdere di generalità (infatti posso $A \cap (-R, R)$ per qualche $R>0$ t.c. $m(A \cap (-R,R)) > 0$)

Scriviamo

$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$ dove $A_q = A \cap (E+q)$

Mostriamo ora che $\exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $A_q \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$:

Per assurdo A_q è misurabile $\forall q$ razionale.

Fissiamo $q \in \mathbb{Q}$ consideriamo i traslati $A_q + r$ e $A_q + r'$ $r, r' \in \mathbb{Q}$, $r \neq r'$

$\Rightarrow A_q + r \cap A_q + r' = \emptyset$ infatti

$A_q + r \subset (E+q)+r = E + (q+r)$

$A_q + r' \subset (E+q)+r'$

$(E+q)+r \cap (E+q)+r' = \emptyset$ per prop. 1)

Chiamo

$M = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (A_q + r)$ Abbiamo che

- H è limitato $\Rightarrow m(H) < \infty$
- $m(H) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} m(A_q + r) = \sum m(A_q)$

$\Rightarrow m(A_q) = 0 \quad \forall q.$

$\Rightarrow m(A) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \underbrace{m(A_q)}_{=0} = 0$ Assurdo!

OSS:

Una variazione di questo argomento ci fa ottenere un controesempio x la σ-additività della misura esterna m^*.

Esistenza di misurabili non Boreliani

LEMMA

f continua, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f strett. crescente $\Rightarrow$

1) f è un omeomorfismo (f^{-1} è continua)

2) se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow f(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

DIM:

1) facile

2) Idea: $\mathcal{G} = \{E \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $f(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$

- $\mathcal{G}$ è una σ-algebra
- Se A è aperto $\Rightarrow A \in \mathcal{G}$

$\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F} \Rightarrow$ tesi

PROPOSIZIONE

Esiste $E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Dim

Sia φ la scala del Diavolo e estendiamola

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in (-\infty; 0) \\ 1 & \text{per } x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ora $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definisco

$f(x) = x + \varphi(x)$

f è continua

f è strett. cresc. (φ cresc + x str. cresc)

$f_{[0;1]} : [0;1] \to [0;2]$ suriettiva

Vale che

$m(f(C)) = 1$ (C insieme di Cantor)

Se $I = (a,b) \subset [0;1] \setminus C$

$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$ * (φ costante tra a e b)

$\Rightarrow m(f(I)) = m(fa, fb) = f(b) - f(a) =$

$= b + \cancel{\varphi(b)} - a - \cancel{\varphi(b)} = b - a = m(I)$

per *

ma $[0;1] \setminus C = \bigcup I_j$

I_j intervalli aperti

$\Rightarrow m(I([0;1]) \setminus C) = m(f(\bigcup_j I_j)) =$

$= m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} f(\underbrace{I_j}_{})\right) = *$

disgiunti a 2 a 2

$\Rightarrow$ disgiunti (monotonia

$* = \sum_{j\in\mathbb{N}} m(f(I_j)) = \sum_{j\in\mathbb{N}} m(I_j) =$

$= m\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j\right) = m([0;1] \setminus C] = 1$

$\Rightarrow m(f(C)) = 1 > 0$

$\Rightarrow \exists V \subset f(C)$ t.c. $V \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$\uparrow$

x il teorema di Vitali

Sia $f^{-1}(V) \doteq E \Rightarrow E \subset C \quad m(C) = 0$

$\Rightarrow m(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ infatti se per assurdo

lo fosse per 2) $\Rightarrow \underbrace{f(E)}_{= V} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ assurdo

OSS:

In realtà i misurabili sono molti di più dei boreliani

- $card(\mathcal{B}(\mathbb{R})) = card(\mathbb{R})$
- $card(\mathcal{M}(\mathbb{R})) = card(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \leftarrow$ insieme delle parti

$card\,\mathcal{P}(\mathbb{R}) > card(\mathbb{R})$

Prendiamo spunto dalla costruzione di Vitali: Banach e Tarski?

TEOREMA (PARADOSSO DI BANACH - TARSKI?)

$\exists\, n \in \mathbb{N}$,

$\exists\, A_1, \dots A_N \subset \mathbb{R}$, $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{N} A_i = B_1(0) \leftarrow$ palla unitaria

$\exists\, D_1, \dots D_N \subset \mathbb{R} \quad D_i \cap D_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\bigcup_{i=1}^{N} D_i = B_1(-2) \cup B_1(2)$

$\exists : T_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ movimenti rigidi dello spazio

t.c. $T_j(A_j) = D_j \quad \forall j = 1 \dots N$