LEZIONE 20/02/2023

I MODULO

METRICA E topologia EUCLIDICA

$n \in \mathbb{N}$

PUNTO/VETTORE

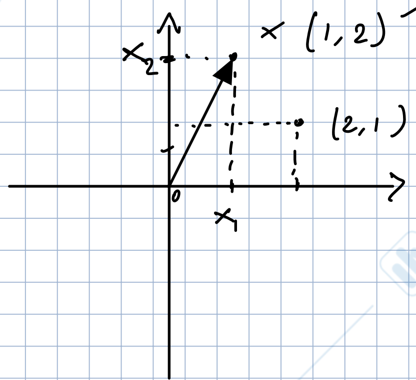
COMPONENTI

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots x_n) \text{ con } x_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 1, \dots, n \}$$

È L'INSIEME DELLE n-PLE ORDINATE DA NUM. REALI E I SUOI ELEMENTI SI CHIAMANO PUNTI O VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2$ $n = 2$ PIANO

$x = (x_1, x_2)$ PUNTO O VETTORE $\overrightarrow{OX}$

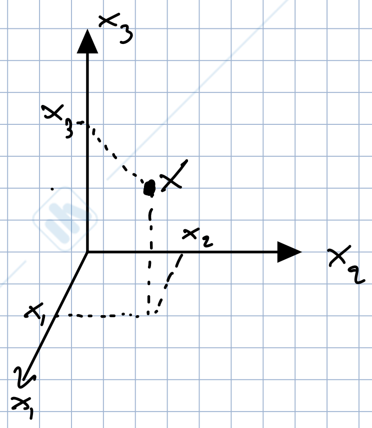


$(1,2) \neq (2,1)$

È IMP. L'ORDINE

$\mathbb{R}^3$

$n = 3$



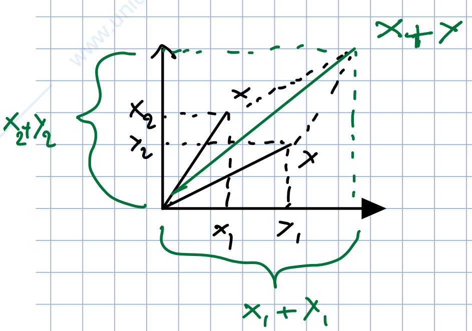
DEFINIZIONI

SIANO x e $y \in \mathbb{R}^n$ DICIAMO CHE

I) $x = y \iff x_j = y_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ (UGUAGLIANZA)

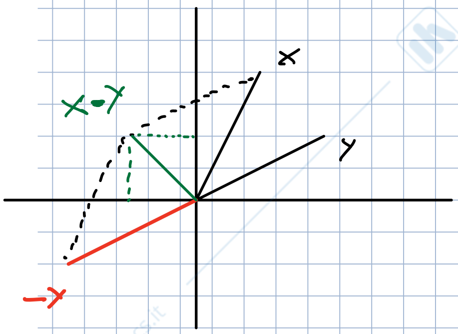
II) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

= VETTORE LE CUI COMPONENTI SONO LA SOMMA



III) SIA $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n)$ PRODOTTO PER UNO SCALARE

IV) $X - Y = X + (-1) Y$ DIFFERENZA



V) $0 = (0, 0, \dots, 0)$ VETTORE CON TUTTE LE COMPONENTI NULLE

VI) $e_J = (0, 0, \dots, \underset{\text{POSTO } J}{1}, 0) \quad \forall J = 1, \dots, n$ VETTORI DELLA BASE CANONICA

PROP

$(\mathbb{R}^n, +, \text{PRODOTTO PER UNO SCALARE})$ È UNO SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE n

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \sum_{J=1}^{n} \underbrace{x_J}_{\text{SCALARE}} \cdot \underbrace{e_J}_{\text{VETTORE DELLA BASE CANONICA}}$$

OGNI $\underbrace{\text{VETTORE}}_{\text{DI } \mathbb{R}^n}$ SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE

$(1, 2) = (1 \cdot e_1), (2 \cdot e_2) = 1 \cdot (1, 0), 2(0, 1)$

Definizione

Un PRODOTTO INTERNO (PRODOTTO SCALARE)

è una legge

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

PRIMO ARGOMENTO PRODOTTO INTERNO

SECONDO ARGOMENTO

Proprietà

$x \in \mathbb{R}^n \quad y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}$

1) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (SIMMETRICA)

3) $\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle$

LINEARITÀ RISPETTO AL I ARGOMENTO $\quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$\forall \alpha$ e $\beta \in \mathbb{R}$

OSS

2) + 3) $\Rightarrow \langle \cdot , \cdot \rangle$ è LINEARE ANCHE RISPETTO AL II ARGOMENTO

Geometria Euclidea

Def

Prodotto interno Euclideo

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle x + y \rangle = \sum (x_j \cdot y_j)$

Es

$\langle (1,5), (7,2) \rangle = (1 \cdot 7) + (5 \cdot 2) = 17$

Verifica delle proprietà $\langle \cdot , \cdot \rangle$ Euclideo

1) $\langle x, x \rangle = \sum x_j^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$e \sum x_j^2 = 0 \Rightarrow x_j = 0$

2) $\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j = \sum y_j x_j = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

3) $\langle \alpha x + \beta z, y \rangle = \sum (\alpha x_j + \beta z_j) y_j = \alpha \sum x_j \cdot y_j + \beta \sum z_j y_j$

$= \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle z, y \rangle$

NORMA EUCLIDEA

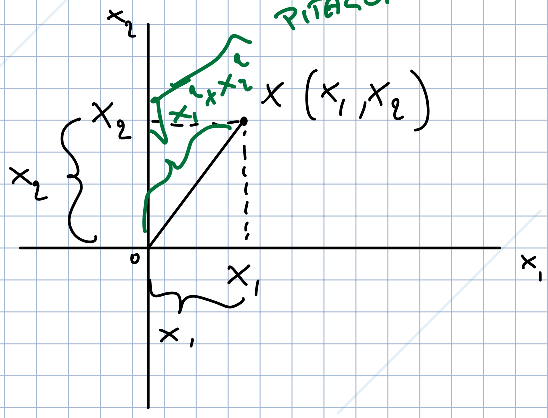
Def

$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$

$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ PER LA 1)

$\sqrt{\sum x_j^2}$



LA NORMA DI X È LA LUNGHEZZA DEL VETTORE

Proprietà della NORMA EUCLIDEA

I) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

II) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$

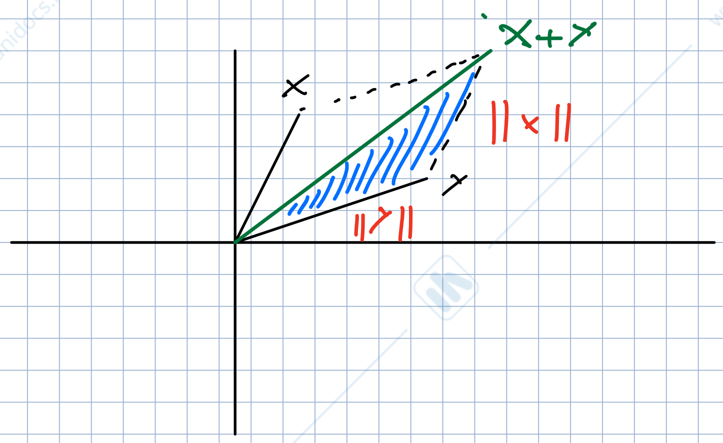
VALORE ASSOLUTO DI λ

III) DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

IIII) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$



DIMOSTRIAMO LA PROPRIETÀ III)

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\| x + \lambda y \|^2 = \langle x + \lambda y , x + \lambda y \rangle =$$

$$= \langle x , x + \lambda y \rangle + \lambda \langle y , x + \lambda y \rangle =$$

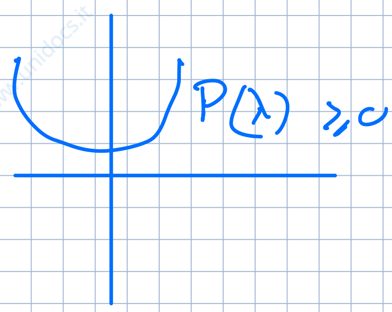
$$= \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle =$$

$$= \| x \|^2 + 2 \lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \| y \|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

DISEQ DI 2° GRADO IN λ

$$P(\lambda) = a \lambda^2 + b \lambda + c \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$$



$a = \| y \|^2$

$b = 2 \langle x, y \rangle$

$$c = \|x\|^2$$

$$\Delta : 4(\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|x\|^2 \leq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

$$(\langle x,y\rangle)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

DIMOSTRATA ✓

DIMOSTRIAMO LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

IL CONTO DI PRIMA MA CON $\lambda = 1$

$$\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \underbrace{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|x\|}_{(\|x\|+\|y\|)^2}$$

PER LA DIS. DI CAUCHY S.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|x+y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 \leq 0 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

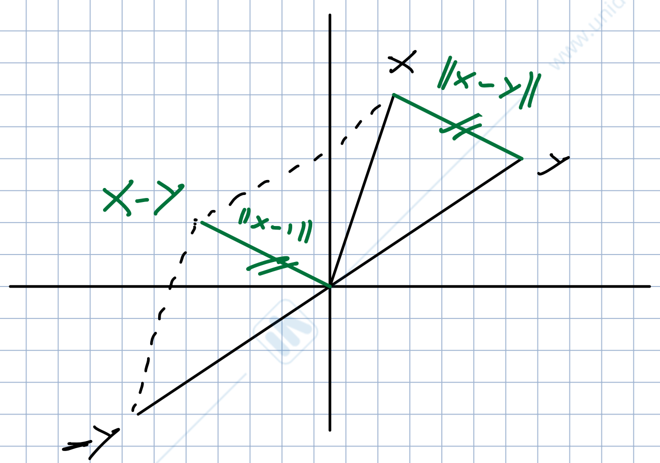
Metrica Euclidea (Distanza)

Def

$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$

$d(x,y) = \|x-y\|$ Dove $\|\cdot\|$ è la norma Euclidea



Es

$P = (1, 2, 3)$ $\quad Q = (0, 1, 4)$ $\quad P - Q = (1, 1, 1)$

$$d(P,Q) = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

ESERCIZIO

Calcolare la distanza tra

$P = (3, 4, 2)$ e $Q = (1, 2, -1)$

$$d = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$$

LEZIONE 21/02/2023

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j \ y_j)^2}$$

DISTANZA EUCLIDEA TRA 2 PUNTI $x, y \in \mathbb{R}^n$

HA le seguenti proprietà:

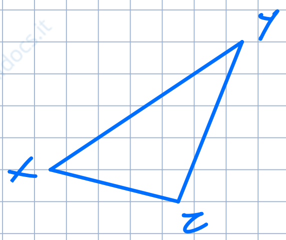
I) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$

II) $d(x,y) = d(y,x)$ SIMMETRIA

DISTANZA TRIANGOLARE

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^n$$

L'UGUAGLIANZA VALE SE E SOLO SE x, y, z SONO ALLINEATI



DIMOSTRAZIONE

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leq$$

PER LA DIS TRIANGOLARE PER LA NORMA EUCLIDEA

$$\|x-z\| + \|z-y\| = d(x,z) + d(z,y)$$

TOPOLOGIA EUCLIDEA

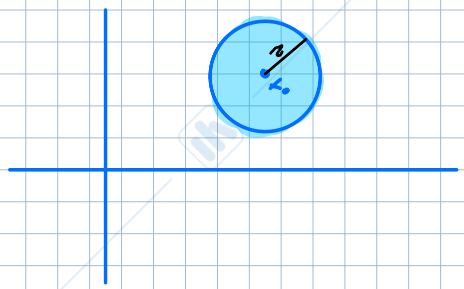
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$ $r \in \mathbb{R}^+$

E INDICHIAMO CON

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}$$

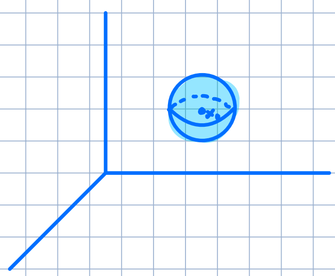
PALLA DI centro x_0 e raggio r

$\mathbb{R}^2$



= INTORNO DI X_0 DI RAGGIO r

$\mathbb{R}^3$



Es

$B(\underset{x_0}{0},\underset{r}{1})$ in $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

$B(0,1)$ in $\mathbb{R}^3$

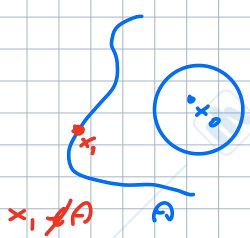
$$\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < r^2\}$$

$$B\left((1,2,3), r\right) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 + (x_3-3)^2 < r^2 \}$$

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$

un punto $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A se $\exists\, r > 0$ t.c. $B(x_0, r) \subseteq A$



Indichiamo con

$$\mathrm{Int}\, A = \{ x_0 \in A : x_0 \text{ è un punto interno ad } A \}$$

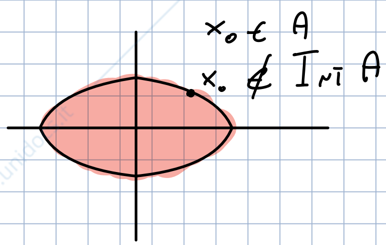
L'insieme A è aperto se $\mathrm{Int}\, A = A$

OSSERVAZIONE

L'insieme A è aperto $\Longleftrightarrow$

$\forall x_0 \in A \quad \exists\, r > 0 \quad t.c. \quad B(x_0, r) \subseteq A$

$A = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 4x_2^2 = 1 \}$ è APERTO



A non è APERTO

$B = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + 4x_2^2 < 1 \}$ È APERTO

Definizione

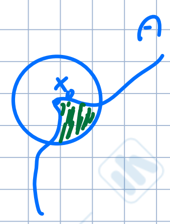
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (non necessariamente in A)

Diciamo che x_0 è un PUNTO ADERENTE ad A

se $\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

Vale sempre che se $x_0 \in A \Rightarrow$

x_0 è un punto aderente ad A



INDICHIAMO CON

$\bar{A} = \{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0$ è un punto aderente ad $A \}$

= CHIUSURA DI A

Vale sempre $A \subseteq \bar{A}$

L'insieme A è chiuso se $A = \bar{A}$

Prop

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\text{Int } A \subseteq A \subseteq \bar{A}$

Definizione

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ INDICHIAMO CON $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

A^c = COMPLEMENTARE DI A

Prop

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso $\Leftrightarrow$ A^c è aperto

int A = insieme dei punti interni di A (escluso la frontiera)

$\bar{A}$ = tutti i punti aderenti di A (interni + frontiera)

Fr $\bar{A}$ = Frontiera di A

Definizione

$\text{Fr } A = \bar{A} \cap (\overline{A^c})$

Fr A int A

È LA FRONTIERA DI A A.

$A = \{$ POLINOMIO IN $x_1, x_2, x_3 < 0 \}$ È APERTO

$= 0$ È CHIUSO

$\leq$ CHIUSO

$\geq$ //

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 + x_2^2 + x_1 + x_2 \leq 0\} = \overline{A}$$

$$Fr\,A = \{ \qquad = 0\}$$

$$Int\,A = \{ \qquad < 0\}$$

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (NON NECESSARIAMENTE IN A)

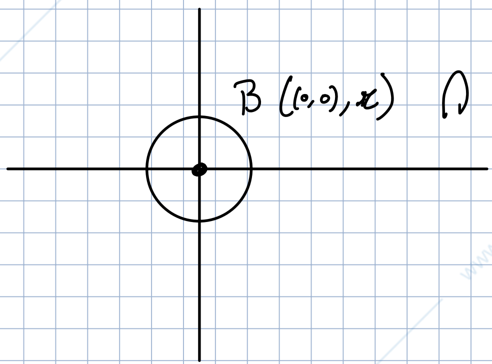
Diciamo che x_0 è un punto di ACCUMULAZIONE per A se

$$\forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Es

$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(0,0)$ l'origine è un punto di accumulazione per A ?



$B((0,0),r) \cap A \setminus \{(0,0)\} = B((0,0),r) \setminus \{(0,0)\}$

PALLA MENO IL centro

$\neq \emptyset$

$\Rightarrow (0,0)$ è un punto di accum. per A

TEOREMA

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di ACCUMULAZIONE per A

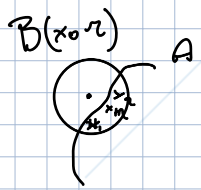
$\Longleftrightarrow \forall r > 0 \quad B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}$ contiene ∞ punti

DIM $\Leftarrow$ banale perche se l'intersezione contiene ∞ punti allora è $\neq \emptyset$

Dim $\Rightarrow$

Supponiamo per assurdo che $\exists\, r > 0$ t.c.

$$B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$$ numero finito di punti $m \in \mathbb{N}$



Definisco

$$r_1 = d(x_1, x_0)$$

$$r_j = d(x_j, x_0) \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$R = \frac{1}{2} \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\} > 0$$

$$\Rightarrow B(x_0, R) \cap A \setminus \{x_0\} = \emptyset$$

è assurdo perché per ipotesi x_0 è un punto di accumulazione per A

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$

INDICHIAMO CON

$$\mathcal{D}(A) = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \text{ punto di accumulazione per } A\}$$

L'insieme derivato di A

$A = \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$

$\mathcal{S}(A) = \mathbb{R}^n$

$f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$f(x_1, x_2, x_3) = (\sin x_1^2 + x_2^2 + e^{x_3})\, x_1 x_2 \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari