Matrici

- MATRICE $A_{m \times n}$ < m = n° di righe, n = n° di colonne

- MATRICE RETTANGOLARE: $m \neq n$ (n° righe ≠ n° colonne)
- MATRICE QUADRATA: $m = n$ (n° righe = n° colonne)

$$A = (a_{ij}) \quad i = j = 1, 2, n$$

DIAGONALE PRINCIPALE: $a_{11} \dots a_{ii} \dots a_{jj}$
DIAGONALE SECONDARIA: $a_{n,1} \dots a_{i,n-i+1} \dots a_{1n}$

N.B: se $m = n = 1$ la matrice $A = (a_{11})$ é quadrata e ha diagonale princ. uguale a diagonale sec.

- MATRICE QUADRATA A di ordine n si dice DIAGONALE se gli elementi al di fuori della diagonale principale sono nulli

Es: $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ → MATRICE DIAGONALE 3x3 → SIA TRIANGOLARE INFERIORE che SUPERIORE

diagonale principale

- MATRICE QUADRATA → TRIANGOLARE SUPERIORE → sono NULLI gli elementi al di sotto della diagonale principale
  - TRIANGOLARE INFERIORE → sono NULLI gli elementi al di sopra della diagonale principale.

ES. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ → matrice quadrata triangolare inferiore

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrice triangolare superiore

- MATRICE TRASPOSTA: A^t di A → matrice $m \times n$ ottenuta scambiando le righe e le colonne di A

es. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$A = m \times n = 2 \times 3$ $\quad A^t = m \times n = 3 \times 2$

- MATRICE SIMMETRICA: $A = A^t$

- MATRICE IDENTITÁ: matrice diagonale dove tutti gli elementi della diagonale principale sono = 1

es. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → matrice identità di ordine 3
3 elementi unitari (= 1)

- MINORE COMPLEMENTARE: matrice di ordine $(m-1) \times (n-1)$ → quando $m > 1$, $n > 1$
Si ottiene cancellando tutti gli elementi della i-esima riga e j-esima colonna

es. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad m_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ → minore complementare di A

riga n°2 colonna n°1

cancello questi valori

DETERMINANTI - REGOLE DI CALCOLO -

• $n = 1$ $\quad A = (a_{11}) \rightarrow \det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ $\quad$ es. $A = (2)$ $\quad a_{11} = 2$ $\quad |a_{11}| = 2 = \det A$

• $n = 2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = \underset{\text{moltiplic. elementi diagonale princ}}{a_{11} \cdot a_{22}} - \underset{\text{moltiplic. elem. diagonale sec}}{a_{12} \cdot a_{21}}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = ((1 \cdot -1) - (1 \cdot 3)) = (-1-3) = -4$

• $n = 3$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

METODO + PRATICO: Regola di Sarrus

matrice A + prime due colonne matrice A a dx

cioè: $\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$

det (A) = somma dei prodotti degli elementi delle diagonali principali - somma dei prodotti degli elementi delle diagonali secondarie

$$((a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})) - ((a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13}) + (a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}) + (a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}))$$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ matrice quadrata 3X3

det A : $\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{matrix}$

$$((1 \cdot 7 \cdot 3) + (3 \cdot 4 \cdot 6) + (5 \cdot 2 \cdot 8)) - ((6 \cdot 7 \cdot 5) + (8 \cdot 4 \cdot 1) + (3 \cdot 2 \cdot 3))$$

$$(21 + 72 + 80) - (210 + 32 + 18)$$

$$173 - 260 = -87$$

Data una matrice A di ordine $m \times n$, si definisce MINORE DI ORDINE $m-1$, estratto da A, il determinante ottenuto dalla MATRICE cancellando i righe e j colonne in modo che sia $m-i = n-j$

=> ogni elemento di una qualunque matrice rappresenta un MINORE del PRIMO ORDINE.

COMPLEMENTO ALGEBRICO DI a_{ij} : si indica con c_{ij}
- è il determinante del minore complementare di A
- il segno dipende dalla somma di $i+j$

$i+j$ = pari $\rightarrow$ +
$i+j$ = dispari $\rightarrow$ −

TEOREMA DI LAPLACE : se A è una matrice quadrata di ordine n, allora il valore numerico di det A è sempre il medesimo a prescindere dalla linea scelta per il suo calcolo

OPERAZIONI CON MATRICI

- Abbiamo 2 matrici $A \rightarrow m \times k$, $B \rightarrow h \times n$

se $m = h$ e $k = n$ le due matrici sono sommabili | sottraibili.

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Osservazione: $A = A_{m \times n}$ $\quad O = O_{m \times n}$ matrice con tutti valori nulli

$A + O = O + A = O$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 3+1 & 2+2 & 1+0 \\ -1+-4 & -1+3 & -4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$A-B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & 3-0 \\ 3-1 & 2-2 & 1-0 \\ -1+4 & -1-3 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

• Se $-A$ = matrice ottenuta cambiando segno a tutti gli elementi di A

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

Teorema: sia $\mathbb{M}$ l'insieme di tutte le matrici, l'insieme $\mathbb{M}$ si può ripartire nell'insieme $M(m,n)$ di tutte le matrici di egual tipo, ovvero a due a due sommabili; inoltre ciascuna di queste classi $M(m,n)$, corredate con l'addizione tra matrici, costituisce quello che in algebra si chiama GRUPPO COMMUTATIVO

L'ADDIZIONE | SOTTRAZIONE tra matrici è un'OPERAZIONE PARZIALE (= non sempre possibile)

PRODOTTO TRA 2 MATRICI

$A = m \times k$ $B = h \times n$

A e B si dicono moltiplicabili se il numero k delle colonne della matrice A (prima) eguaglia il numero di righe h di B (seconda).

A $m \times k$ B $h \times n$

$k = h$ → A e B sono moltiplicabili

es. $A = (a_1 \dots a_j \dots a_n)$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$A = 1 \times n$ $X = n \times 1$

= SONO MOLTIPLICABILI

Definizione particolare: si definisce prodotto di A per X la matrice 1x1 data da:

$$AX = a_1x_1 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n$$

(prodotto dell'unica riga di A per l'unica colonna di X)

es. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2×2 $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$ 2×3

=> A é moltiplicabile per B poiché il n° di colonne di A è = n° righe di B

=> B non é moltiplicabile per A

• il PRODOTTO righe per colonne di A per B si definisce ponendo:

A × B
2×2 2×3 → 2×3

$$= \begin{pmatrix} a\alpha + b\alpha' & a\beta + b\beta' & a\gamma + b\gamma' \\ c\alpha + d\alpha' & c\beta + d\beta' & c\gamma + d\gamma' \end{pmatrix} \to \text{matrice } 2 \times 3 \to A \cdot B$$

Ogni elemento della matrice prodotto non è altro che il PRODOTTO DI UNA RIGA di A per la corrispondente COLONNA di B.

se A e B sono due matrici rispettivamente di ordine $m \times k$ e $h \times n$, la matrice PRODOTTO AB sarà di ordine $m \times n$ → (se $k = h$)

es. $\underset{m \times k}{A_{3 \times 3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\underset{h \times n}{B_{3 \times 4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

A e B sono moltiplicabili perché $k = h$. La matrice AB sarà di ordine $\boxed{3 \times 4}$

$$S = (AB)_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2\cdot1 + 1\cdot2 + 0\cdot2 & 2\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot3 & 2\cdot1 + 1\cdot1 + 0\cdot1 & 2\cdot0 + 1\cdot0 + 0\cdot2 \\ 3\cdot1 + 2\cdot2 + 0\cdot2 & 3\cdot1 + 2\cdot1 + 0\cdot3 & 3\cdot1 + 2\cdot1 + 0\cdot1 & 3\cdot0 + 2\cdot0 + 0\cdot2 \\ 1\cdot1 + 0\cdot2 + 1\cdot2 & 1\cdot1 + 0\cdot1 + 1\cdot3 & 1\cdot1 + 0\cdot1 + 1\cdot1 & 1\cdot0 + 0\cdot0 + 1\cdot2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema di Binet → proprietà del prodotto tra matrici

• $\det(\lambda A) = \lambda^{\text{ord}A} \det A$ (se A è una matrice quadrata) $\lambda \in \mathbb{R}$
• ASSOCIATIVA = $(AB)C = A(B \cdot C)$
• DISTRIBUTIVA = $A(B+C) = AB + AC$ (a destra); $(A+B)C = AC + BC$ (a sinistra)
• il prodotto tra matrici generalmente non è commutativo.
• Se esistono 2 prodotti $A \times B$ e $B \times A$ non è detto che siano uguali.
• $AB = 0$ non implica necessariamente $A = 0$ o $B = 0$

- MATRICE INVERSA DI A

A^{-1} è una matrice quadrata di ordine n tale che $A \cdot A^{-1} = I$
$A^{-1} \cdot A = I$

Data una matrice quadrata A di ordine n, esiste A^{-1} se e solo se risulta $\det A \neq 0$

Applicando il teorema di Binet: $\det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = 1$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

REGOLA TEORICA: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{(A^*)^t}_{\text{matrice dei complementi algebrici di A}}$

Riduzione matrici: Sistemi lineari e calcolo del Rango

MATRICE A SCALINI: Una qualsiasi matrice, rettangolare o quadrata, dove il primo elemento $\neq 0$ della i-esima riga con $i > 1$ è più a destra del primo elemento $\neq 0$ della riga precedente.

In una matrice a scalini il primo elemento $\neq 0$, quando c'è, su ogni riga è detto PIVOT

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → è una matrice a scalini

è più a dx dell' 1 in posizione a_{11}

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

Consideriamo una qualsiasi matrice a componenti reali $A \in \mathbb{R}^{m,n}$
- Indichiamo con $R_1, R_2 \dots R_m$ le sue righe

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{prima riga } R_1 \\ \to \text{seconda riga } R_2 \\ \\ \to \text{i-esima riga } R_i \\ \\ \to \text{m-esima riga } R_m \end{array}$$

Dobbiamo ottenere una matrice a scalini.

MOSSE DI GAUSS:
1) scambiare 2 righe
2) moltiplicare una riga della matrice per un numero reale non nullo, scalare.
3) sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga

Algoritmo di Gauss

Indichiamo con A una matrice non ridotta a gradini con m righe ed n colonne
1) Sia C_k, con $1 \leq k \leq n$, la 1° colonna a partire da sinistra che contiene almeno un termine a non nullo
Detta R_1 la prima riga della matrice, possono presentarsi 2 eventualità:

2a) Se a è un elemento di R_1 passiamo al punto 3

2b) Se $a \notin R_1$, scambiamo la riga che contiene a con R_1

3) L'obiettivo è annullare tutti gli elementi della K-esima colonna al di sotto di a.

4) Se la matrice è ridotta abbiamo finito, altrimenti tralasciamo la prima riga e le prime k colonne e torniamo al punto 1.

Esempi di applicazione del metodo di eliminazione di Gauss.
ES1: RIDURRE A SCALA LA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La prima colonna a partire da sinistra con almeno un termine non nullo è $C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

L'elemento $a_{11} = 1$ diverso da zero quindi dobbiamo annullare gli elementi $a_{21} = 2$ e $a_{31} = 3$

- Per rendere $= 1$ l'elemento a_{21} moltiplichiamo $R_1 = (1\ 1\ 0)$ per uno scalare λ tale che $\lambda R_1 + R_2$ abbia come primo elemento zero.

$\lambda = -2$ $\quad -2R_1 + R_2 = -2(1\,1\,0) + (2\,1\,1) = (-2\,-2\,0) + (2\,1\,1) = (0\ -1\ 1)$

- Annulliamo a_{31} $\quad \lambda = -3$

$-3R_1 + R_3 = -3(1\ 1\ 0) + (3\ 0\ 1) = (-3\ -3\ 0) + (3\ 0\ 1) = (0\ -3\ 1)$

Effettuiamo le seguenti sostituzioni: $R_2 \to -2R_1 + R_2$
$R_3 \to -3R_1 + R_3$

Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

→ vedi su YOUMATH "ELIMINAZIONE GAUSSIANA"

RANGO DI UNA MATRICE

Il rango altro non è che un numero intero non negativo associato alla matrice.

Modi di indicare il rango: rango(A); rK(A), rank(A), $\rho(A)$, r(A)

definizioni di rango:
1) massimo numero di righe linearmente indipendenti di A
2) massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A
3) dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare
4) l'ordine massimo delle sottomatrici quadrate estraibili da A con det $\neq 0$
5) numero di pivot di una riduzione gaussiana ad una scala
6) dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle righe o dalle colonne di A

3 Metodi di calcolo del rango:
1) criterio dei minori
2) applicazione del teorema di Kronecker (teorema degli orlati)
3) procedura di eliminazione gaussiana.

$0 \leq rK(A) \leq \min(m,n)$
minimo tra numero di righe
numero di colonne della matrice

Unica matrice di rK = 0 è quella NULLA

Se il rango coincide con il min(m,n) allora è detto RANGO MASSIMO $rK(A) = \min(m,n)$

Calcolo del rango con il criterio dei minori.

1) Consideriamo il minimo tra il numero di colonne e il numero di righe di A, ossia $\rho_1 = \min(m,n)$
Estraiamo tutte le sottomatrici quadrate di A di ordine ρ_1.

1.a) Se c'è una sottomatrice quadrata di ordine ρ_1 con det $\neq 0$ allora $rK A = \rho_1$
1.b) Se <u>tutte</u> le sottomatrici di A hanno det $= 0$ allora $rK A < \rho_1$

2) Sia $\rho_2 = \rho_1 - 1$, consideriamo le sottomatrici quadrate di A di ordine ρ_2

2.a) se ce n'è almeno una con det $\neq 0$ allora $rK = \rho_2$
2.b) se <u>tutte</u> hanno det $= 0$ allora $rK(A) < \rho_2$

3) Reiteriamo il procedimento diminuendo l'ordine delle sottomatrici ad ogni passo di 1.
Non appena ne troviamo una con determinante non nullo, ci fermiamo e concludiamo che il rango di A è uguale all'ordine della sottomatrice quadrata con det $\neq 0$.

Esempio calcolo rango con criterio dei minori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix}$$

$\det: ((1\cdot3\cdot6) + (-1\cdot4\cdot3) + (2\cdot2\cdot2) - ((3\cdot3\cdot2) + (2\cdot4\cdot1) + (6\cdot2\cdot-1))$

$(18 + (-12) + 8) - (18 + 8 - 12) = 0$

$\det A_{3x3} = 0$

A é una matrice quadrata con $m=n=3$ quindi consideriamo come sottomatrice di ordine $\rho_1 = \min(m,n) = 3$ la matrice stessa.

$\det(A) = 0 \Rightarrow rK(A) < 3$

- Passiamo alle sottomatrici quadrate di ordine $\rho_1 - 1 = 3-1 = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3+2 = 5 \neq 0$$

il rango di A é 2, $rK(A) = \rho_2 = 2$

ES. 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A \begin{cases} m=3 \\ n=4 \end{cases}$$

$\rho_1 = \min(m,n) = 3$

Estraiamo le sottomatrici quadrate di ordine 3.

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

det = 0 det = 0 det = 0 det = 0

$rK(A) < 3$

$\rho_2 = 3-1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det: (1\cdot 3) - (-5 \cdot 0) = 3 - 0 = 3 \quad \det \neq 0$$

$rK(A) = \rho_2 = 2$

Calcolo del rango con il teorema di Kronecker (teorema degli orlati)

RICORDA: Cos'é un <u>MINORE ORLATO</u>

M é il determinante non nullo di una sottomatrice quadrata di A di ordine $p \leq \min(m,n)$
il minore orlato é il minore di ordine $p+1$ che si ottiene aggiungendo una riga e una colonna di A alla sottomatrice che definisce il minore M

Teorema di Kronecker: sia A una matrice con m righe ed n colonne e sia $p \leq \min(m,n)$. Il rango di A é uguale a p se e solo se esiste un minore non nullo di A di ordine p, e tutti i minori orlati di ordine $p+1$ sono nulli.

- Utile per calcolare il rango di matrici con n e m > 3

1) Si individua una sottomatrice quadrata di ordine 2 con determinante diverso da zero.
   Se tale sottomatrice $\nexists$ allora $rK(A) = 1$

2) Si orla la sottomatrice di ordine 2 per formarne una di ordine 3 e si calcola il determinante di quest'ultima.
3) Se il det di ciascuna sottomatrice orlata é zero allora $rK(A) = 2$
4) Se si trova una matrice orlata di ordine 3 con det $\neq 0$, la si orla considerando le eventuali sottomatrici di ordine 4.
5) Se il det di tutte le sottomatrici orlate di ordine 4 é zero, $rK(A) = 3$
6) Si può continuare ad orlare considerando eventuali sottomatrici di ordine 5.
7) Si reitera il procedimento fino a quando non é più possibile orlare.

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$ matrice quadrata di ordine 4 quindi $1 \leq rK(A) \leq 4$

- Consideriamo la sottomatrice quadrata di ordine 2 ricavata eliminando terza e quarta riga e 3' e 4' colonna, e calcoliamo il determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$$

- Consideriamo le quattro sottomatrici di ordine 3 che si ottengono orlando la precedente sottomatrice di ordine 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo con la regola di Sarros che tutte le sottomatrici hanno det = 0
il teorema di Kronecker ci permette di concludere che il rango della matrice A è 2.

Calcolo del rango con metodo di eliminazione gaussiana

Consideriamo una matrice A $m \times n$ e riduciamola con il metodo di Gauss, ottenendo una matrice a gradini $\tilde{A}$.
Ricorda: PIVOT di una matrice a scalini è il primo elemento non nullo che si incontra su ogni riga leggendola da SX verso DX
il pivot è il numero di righe non identicamente nulle della matrice ridotta.

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ Con Gauss annulliamo tutti gli elementi che si trovano al di sotto di $a_{11} = 1$

$R_2 \to -2R_1 + R_2 =$
$= (-2\ -4\ -2\ 0) + (2\ 1\ -1\ 3) = (0\ -3\ -3\ 3)$

$R_3 \to -R_1 + R_3 =$
$= (-1\ -2\ -1\ 0) + (1\ 1\ 0\ 1) = (0\ -1\ -1\ 1)$

$R_4 \to 2R_1 + R_4 =$
$= (2\ 4\ 2\ 0) + (-2\ 1\ 3\ -5) = (0\ 5\ 5\ -5)$

otteniamo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

- continuiamo la riduzione sotto $a_{22} = -3$

$R_3 \to -\frac{1}{3} R_2 + R_3 = (0\ 1\ 1\ -1) + (0\ -1\ -1\ 1) = (0\ 0\ 0\ 0)$

$R_4 \to \frac{5}{3} R_2 + R_4 = (0\ -5\ -5\ 5) + (0\ 5\ 5\ -5) = (0\ 0\ 0\ 0)$

Matrice ridotta: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ha 2 Pivot: $\tilde{a}_{11} = 1$, $\tilde{a}_{22} = -3$ $rk(A) = 2$

Esercizi sul rango delle matrici

Calcola il rango della matrice con il metodo dei minori

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 17 \\ 7 & -5 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Rango compreso tra 0 e $\min(m,n)$

$\min(m,n) = (3,5) = 3$

A non è una matrice nulla quindi $1 \leq rK \leq 3$

Se c'è almeno una sottomatrice quadrata di A di ordine 3 con $\det \neq 0$ il rK è 3.

Sottomatrice 3X3 $= B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

det con metodo di Laplace

$b_{23} = 3$

$C(b_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot \det(B_{23}) = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = -1 \cdot (-5+7) = -2$

$\det B = 3 \cdot Cof(b_{23}) = 3 \cdot (-2) = -6 \neq 0 \quad rK = 3$