Analisi Matematica I, Geometria e Algebra Lineare: Dimostrazioni

Sophie Cavallini

9 febbraio 2020

Formula di De Moivre per il prodotto

Siano $z, w \in \mathbb{C}$,dove $z = \rho_1 [\cos\theta_1 + \imath \sin\theta_1]\,,\ w = \rho_2 [\cos\theta_2 + \imath \sin\theta_2]$

$$z \cdot w = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + \imath(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \cos(\theta_2)\sin(\theta_1))] =$$

$$= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \imath\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

Disugualianza di Cauchy-Schwarz

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}||\vec{v}|,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

Dim: Sia $t \in \mathbb{R}$ e scriviamo

$$0 \le |\vec{u} + t\vec{v}|^2 = (\vec{u} + t\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\vec{v}) =$$

$$= t\vec{u}\cdot\vec{u} + t\vec{u}\cdot\vec{v} + t\vec{u}\cdot\vec{v} + t^2\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2t\vec{u}\vec{v} + t^2|\vec{v}|^2$$

Cioè

$$|\vec{u}|^2 + 2t\vec{u}\cdot\vec{v} + t^2|\vec{v}|^2 \ge 0 \ \forall t \in R$$

Ciò accade

$$\iff (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2 \le 0 \iff (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \le |\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2 \iff |\vec{u}\cdot\vec{v}| \le |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$$

Cioè la tesi è dimostrata.

Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari

Siano V_n, V_m spazio vettoriale di dim n e m rispettivamente. Sia $L : V_n \longrightarrow V_m$ un'applicazione lineare. Siano poi fissate due basi $\{\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n}\}$ in V_n e $\{\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_m}\}$ e in V_m si scrivano infine dato $\vec{v} \in V_n, \vec{v} = x_1\vec{u_1} + \ldots + x_n\vec{u_n}$ e $L(\vec{u}) = y_1\vec{v_1} + \ldots + y_m\vec{v_m} = \vec{v}$. Allora, posto

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ \exists!\ A \in M_m \mid \vec{v} = A\vec{x}$$

Se cambiassimo le basi cambierebbe la matrice A.

Dim: Si consideri il vettore $L(\vec{u_1}) \in V_m$. Allora per opportuni $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{m1} \in \mathbb{R}$ vale

$$L(\vec{u_1}) = a_{11}\vec{v_1} + a_{21}\vec{v_2} + a_{31}\vec{v_3} + \ldots + a_{m1}\vec{v_m}$$

Analogamente:

$$L(\vec{u_2}) = a_{12}\vec{v_1} + a_{22}\vec{v_2} + \ldots + a_{m2}\vec{v_m}$$

$$\vdots$$

$$L(\vec{u_n}) = a_{1n}\vec{v_1} + a_{2n}\vec{v_2} + \ldots + a_{mn}\vec{v_m}$$

per opportuni $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall j = 1, \ldots, n$. Si noti che tale numeri sono univocamente determinati in quanto le coordinate di ogni fissato vettore rispetto a una base assegnata sono uniche. Sia ora $\vec{u} = x_1\vec{u_1} + \ldots + x_n\vec{u_n} \in V_n$. Vale:

$$L(\vec{u}) = L\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{u_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(\vec{u_j}) = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{v_i}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\vec{v_i} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\vec{v_i} = \sum_{i=1}^{m} y_i\vec{v_i}$$

Dunque le componenti $y_1, \ldots, y_m$ di $L(\vec{u})$ sono date da $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, cioè posto $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ vale $\vec{y} = A\vec{x}$ con $A := (a_{ij})_{\substack{i=1\ldots m \\ j=1\ldots n}}$. Tale matrice è unica, date le basi scelte per le precedenti considerazioni.

Determinante e sue proprietà

Sia $A \in M_{nn}$. Allora:

1. Se A ha 1 riga o 1 colonna di zeri, allora $\det A = 0$.
2. Scambiando due righe, o due colonne il determinante non cambia il segno. (P. ALTERNANZA)
3. Se A ha due righe, o due colonne uguali, allora $\det A = 0$
4. Sia $A = \begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix}$ dove $\vec{a_1} = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, \vec{a_n} = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$, sia $\vec{b_1} = (b_1, \ldots, b_n)$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora $\det\begin{pmatrix} \lambda\vec{a_1} + \mu\vec{b_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix} \vec{b_1} \\ \vec{a_2} \\ \vdots \\ \vec{a_n} \end{pmatrix}$. Analogalemnte per le altre righe, o colonne. (P. MULTILINEARITÀ)
5. Se a una riga (rispettivamente colonna) si aggiunge una combinazione linear delle altre righe (rispettivamente colonne) il determinanete non cambia. (MOSSE DI GAUSS)
6. Se le righe, o le colonne, di A sono vettori linearmente dipendenti allora $\det A = 0$.

Dim:

1. Sviluppare lungo la riga, o la colonna, di zeri.
2. Vera per $n = 2$:

   $$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc;\ \det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad = -\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (idem per le colonne).
   Per $n = 3$ si sviluppi lungo la riga, o la colonna, rimasta invariata, e si usi il risultato per $n = 2$. Per dimensioni superiori si procedi ricorsivamente.
3. Se A ha ad esempio due righe uguali,$\det A$ è invariato se le scambio tra loro, ma per la 2. deve invece cambiare segno cioè $\det A = -\det A$, cioè $\det A = 0$.

4.
$$\det\begin{pmatrix}\lambda\vec{a_1}+\mu\vec{b_1}\\ \vec{a_2}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}=(\lambda a_{11}+\mu b_1)\,A_{11}+\ldots+(\lambda a_{1n}+\mu b_n)\,A_{1n}=$$
$$=\lambda\,(a_{11}A_{11}+\ldots+a_{1n}A_{1n})+\mu\,(b_1A_{11}+\ldots+b_nA_{1n})=$$
$$=\lambda\det\begin{pmatrix}\vec{a_1}\\ \vec{a_2}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}+\mu\det\begin{pmatrix}\vec{b_1}\\ \vec{a_2}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}$$

5. Lavoriamo ad esempio sulla prima riga, vale:
$$\det\begin{pmatrix}\vec{a_1}+\lambda_2\vec{a_2}+\ldots+\lambda_n\vec{a_n}\\ \vec{a_2}\\ \ldots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}=$$
$$=\det\begin{pmatrix}\vec{a_1}\\ \vec{a_2}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}+\lambda_2\det\begin{pmatrix}\vec{a_2}\\ \vec{a_2}\\ \vec{a_3}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}+\ldots+\lambda_n\det\begin{pmatrix}\vec{a_n}\\ \vec{a_2}\\ \vec{a_3}\\ \ldots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\vec{a_1}\\ \vec{a_2}\\ \ldots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}$$

6. Si assuma ad esempio $\vec{a_1}=\lambda_2\vec{a_2}+\ldots+\lambda_n\vec{a_n}$. Ragionando come prima:
$$\det\begin{pmatrix}\lambda_2\vec{a_2}+\ldots+\lambda_n\vec{a_n}\\ \vec{a_2}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}=\lambda_2\det\begin{pmatrix}\vec{a_2}\\ \vec{a_2}\\ \vec{a_3}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}+\ldots+\lambda_n\det\begin{pmatrix}\vec{a_n}\\ \vec{a_2}\\ \vec{a_3}\\ \vdots\\ \vec{a_n}\end{pmatrix}=0$$

Formula esplicita per l'inversa

Sia $A\in M_{nn}$. Essa è invertibile $\iff\det A\neq 0$. Se ciò accade si ha inoltre che l'inversa, indicata con A^{-1}, è data da:
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\ldots&A_{1n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ A_{n1}&A_{n2}&\ldots&A_{nn}\end{pmatrix}^T$$
dove, data una matrice $B=(b_{ij})$ la sua matrice trasposta B^T è data da $B^T\,(b_{ij})$ ovvero dalla matrice ottenuta da B scambiando le righe con le colonne e A_{ij} sono i complementi algebrici.

Dim: Supponiamo che $\exists\ A^{-1}$. Allora:
$1=\det(I_n)=\det\left(AA^{-1}\right)=(\det A)\left(\det A^{-1}\right)$. Dunque $\det A\neq 0$ (inoltre $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$.
Viceversa, supponendo $\det A\neq 0$ verifichiamo che la matrice A^{-1} esplicitamente scritta soddisfi $A\cdot A^{-1}=I_n$ (si procede analogalmente per mostrare che $A^{-1}\cdot A=I_n$.
Sia b_{ki} l'elemento di posto k,i di $A\cdot A^{-1}$. Si ha:
$$b_{ki}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\left(\frac{1}{\det A_n}A_{ij}\right)=\frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{ij}$$
Sia ora $\underline{k=i}$. Si ha:
$$b_{kk}=\frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\frac{\det A}{\det A}=1,\ \forall k$$

Sia ora $k \neq 1$. Mostro che $b_{ki} = 0$.
Infatti sia B la matrice ottenuta da A sostituendo alla riga i una copia della riga k. Allora $\det B = 0$.
Ma sviluppando $\det B$ lungo la sua i-esima riga ottengo:

$$0 = \det B = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij}$$

Cioè $b_{k1} = 0$ se $k \neq i$.

Teorema nullità più rango

Sia $L : V_n \longrightarrow V_m$ un'applicazione lineare. Allora $\dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = n$.

Dim: Sia $k = \dim[\ker(A)]$ $(k \leq n)$. Siano $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}$ una base di $\ker(L)$ possiamo allora scegliere $n-k$ ulteriori vettori tra loro indipendenti, indicati con $\vec{u_{k+1}}, \ldots, \vec{u_n} | \vec{w_1}, \ldots, \vec{w_k}, \vec{u_{k+1}}, \ldots, \vec{u_n}$ siano una base di V_n.
Sia ora $\vec{v} \in V_n \ \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \alpha_1\vec{w_1} + \ldots + \alpha_k\vec{w_k} + \alpha_{k+1}\vec{u_{k+1}} + \ldots + \alpha_n\vec{u_n}$. Si ha $L(\vec{v}) = \alpha_1 L(\vec{w_1}) + \ldots + \alpha_k L(\vec{w_k}) + \alpha_{k+1}L(\vec{u_{k+1}}) + \ldots + \alpha_n L(\vec{u_n}) = \alpha_{k+1}L(\vec{u_{k+1}}) + \ldots + \alpha_n L(\vec{u_n})$.
Ne segue che la $\dim(\operatorname{Im}(L)) \leq n-k$.
Mostro che vale l'uguale nella precedente relazione.
Per assurdo, siano $L(\vec{u_{k+1}}), \ldots, L(\vec{u_n})$ linearmente dipendenti. Allora:
$\exists\ \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli e $| \vec{0} = \beta_{k+1}L(\vec{u_{k+1}}) + \ldots + \beta_n L(\vec{u_n}) = L(\beta_{k+1}\vec{u_{k+1}} + \ldots + \beta_n\vec{u_n})$, cioè $\beta_{k+1}\vec{u_{k+1}} + \ldots + \beta_n\vec{u_n} \in \ker(L)$.
Assurdo perchè per costruzione nessuna combinazione lineare di $\vec{u_{k+1}}, \ldots, \vec{u_n}$ può appartenere a $\ker(L)$.
Per cui $\dim(\operatorname{Im}(L)) = n-k \Longrightarrow \dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = n$. Se $k = 0$. Si ha $\ker(L) = \{\vec{0}\}$ dunque non sono presenti i vettori $\vec{w_i}$ mentre vi sono n vettori $\vec{u}$ e la dim è identica. Se $k = n$ $\dim(\ker(L)) = n$, cioè vi sono n vettori $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_n} \in \ker(L)$ indipendenti. Ma allora tale insieme è una base di V_n (che ha dimensione n per Hp). Ma allora $\forall \vec{v} \in V_n\ \exists\ \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \mathbb{R} \mid \vec{v} = \gamma_1\vec{w_1} + \ldots + \gamma_n\vec{w_n}$. Allora $L(\vec{v}) = \gamma_1 L(\vec{w_1}) + \ldots + \gamma_n L(\vec{w_n}) = 0 \forall \vec{v}$. Allora $\operatorname{Im}(L) = \{\vec{0}\}$ $\dim(\operatorname{Im}(L)) = 0$.
Per cui $\dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = 0$.

Condizione di diagonalizzabilità in termini di autovalori

Sia $A \in M_{nn}$. Allora A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (rispettivamente su $\mathbb{C} \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n$ (rispettivamente su $\mathbb{C}^n$) ha una base di autovettori. In tal caso, detta $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ una tale base e detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori corrispondenti, vale $\Lambda = S^{-1}AS$ con $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$ e $S := (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$.

Dim: Sia A diagonalizzabile ad esempio su $\mathbb{R}$. Allora esistono Λ diagonale e S invertibile $| \Lambda = S^{-1}AS$. Sia $S = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n})$ e sia $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Allora da $\Lambda = S^{-1}AS$ si ottiene $S\Lambda = AS$. D'altronde $S\Lambda = (\lambda_1\vec{a_1}, \ldots, \lambda_n\vec{a_n})$, e sappiamo che $AS = (A\vec{a_1}, \ldots, A\vec{a_n})$ si riscrive come $A\vec{a_1} = \lambda_1\vec{a_1}, \ldots, A\vec{a_n} = \lambda_n\vec{a_n}$. Cioè gli $\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}$ sono gli n autovettori di A. Ma per costruzione tali vettori sono indipendenti, perchè S è invertibile.
La dimostrazione del viceversa segue ripetendo i passaggi nel verso opposto.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e infinito. Allora A ammette almeno un punto di accomulazione.

Dim: $(n = 2)$. A è limitato. Dunque A è contenuto in un opportuno rettangolo $[p,q] \times [r,s] := \{(x,y), x \in [p,q], y \in [r,s]\}$.Dividiamo $[p,q]$ e $[r,s]$ in due parti uguali individuano così 4 rettangoli di ugual area. In almeno uno di questi, indicato con $[p_1, q_1] \times [r_1, s_1]$, cadono infiniti punti di A. Iterando la procedura individuo rettangoli della forma $[p_n, q_n] \times [r_n, s_n]$ dove, ad esempio sull'asse x: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ e $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$. Inoltre $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n \leq q_n \leq \ldots \leq q_2 \leq q_1$.

Inoltre $q_n - p_n = \dfrac{q-p}{2^n}$ e, se $h, k \leq n$, vale $p_h \leq p_n \leq q_n \leq q_k$. Sia ora $P := \{p_1, p_2, p_2, \dots\}, Q := \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Ma allora q_k è un maggiorante di P, cioè $\sup P \leq q_k \ \forall k$.
Ma allora il numero $\sup P$ è un minorante di Q, e quindi si ha $\sup P \leq \inf Q$. D'altronde, $\inf Q \leq q_n \ \forall n$, $\sup P \geq p_n \ \forall n$ e quindi $0 \leq \inf Q - \sup P \leq q_n - p_n = \dfrac{q-p}{2^n} \ \forall n$. Ciò mostra che $\inf Q - \sup P = 0$, cioè $\inf Q = \sup P$. Si ponga $\bar{x} = \inf Q = \sup P$.
Procedendo analogamente sulle y individuo un valore $\bar{y}$. Mostro che $(\bar{x}, \bar{y})$ è di accomulazione per A. Infatti notiamo che $(\bar{x}, \bar{y}) = \bigcap_{k \in N} R_k$, dove R_k sono i rettangoli prima individuati. Sia ora $B_R((\bar{x}, \bar{y})$ fissata. É chiaro che, per n abbastanza grande $R_n \subset B_R((\bar{x}, \bar{y}))$. Ma per R_n per costruzione contiene infiniti punti di A, dunque lo stesso vale per $B_R((\bar{x}, \bar{y}))$. Ma R è arbitrario, dunque $(\bar{x}, \bar{y})$ è di accomulazione per A.

Il numero e

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \ \forall n$ è una successione che ammette limite finito indicato con e.

Dim: Mostro che $\{a_n\}$ è crescente e successivamente che è limitata. Calcolo:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n-1})^{-1}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} \geq$$

$$\geq \frac{1 - n\frac{1}{n^2}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = 1 \ \forall n \geq 2 \Longrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$$

dunque è crescente.
Mostro che $\{a_n\}$ è limitata. Sia infatti $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Si ha $b_n > a_n \ \forall n$. Mostro che b_n è decrescente. Infatti:

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})}{(\frac{n^2}{n^2-1})^n} =$$

$$= \frac{\frac{n+1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} < \frac{\frac{n+1}{n}}{1+\frac{n}{n^2-1}}$$

Ma $1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Quindi $\frac{b_n}{b_{n-1}} < \frac{\frac{n+1}{n}}{1+\frac{n}{n^2-1}} < \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = 1 \ \forall n \geq 2$. Dunque b_n è monotona decrescente per cui a_n è limitata e sta tra 2 e 3. Con n sufficientemente grande si ottengono un buon numero di cifre di e.

Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ si supponga $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists\, c \in [a, b] \mid f(c) = 0$.

Dim: Divido $[a, b]$ in due parti di uguale ampiezza, $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$. Se $f(\frac{a+b}{1})$ la tesi è vera. Altrimenti in esattamente uno di tali sottointervalli cambia il segno della funzione agli estremi. Sia $[a_1, b_1]$ tale intervallo.
Iterando il procedimento ottengo una successione di intervalli $[a_n, b_n] \mid$:

1. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente
3. $f(a_n)f(b_n) < 0$

(a meno che si trovi, a un passo finito, uno zero di f)
Da (2) segue che $\{a_n\}, \{b_n\}$ ammettono limiti l_1 e l_2. Ma $[a_n, b_n]$ è contenuto in $(a, b) \ \forall n$, dunque le due successioni sono limitate, dunque $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. D'altronde $a_n < b_n \ \forall n$; quindi $l_1 \leq l_2$. Inoltre da (1) abbiamo che $l_2 - l_1 =$
$= \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$. Dunque $l_2 = l_1$ indico con l tale numero. Si ha, per la continuità di f in l $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) = f(l)^2$. D'altronde, da (3), $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (per il th. della permanenza del segno), cioè $f(l)^2 \leq 0$, cioè $f(l) = 0$. Dunque la tesi è verificata.

Teorema di Heine-Cantor

Sia $f : K \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con K compatto e f continua su K. Allora f è uniformemente continua su K.

Dim: Per assurdo. Suppongo f non uniformemente continua su K. Allora $\exists \epsilon > 0 \mid \forall \delta \; \exists$ punti $x_\delta, y_\delta \in K$ con $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$, ma $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \epsilon$. Scelgo ora $\delta = \delta_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ e indichiamo con x_k e y_k: corrispondenti x_δ, y_δ. Essendo K compatto $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}$ che converge, per $h \to +\infty$, a $x \in K$ (si ricorda che K essendo compatto è compatto per successioni). D'altronde: $|y_{k_h} - x| = |y_{k_h} - x_{k_h} + x_{k_h} - x| \leq |y_{k_h} - x_{k_h}| + |x_{k_h} - x| \leq \frac{1}{k_h} + |x_{k_h} - x|$ $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{k_h} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} |x_{k_h} - x| = 0$, dato che $x_{k_h} \to x$ per $h \to +\infty$. Quindi $\lim_{h \to +\infty} \frac{1}{k_h} + |x_{k_h} - x| = 0$ e anche $\lim_{h \to +\infty} |y_{k_h} - x| = 0$.
Quindi $\lim_{h \to +\infty} y_{k_h} = x$. Ma allora $|f(x_{k_h}) - f(y_{k_h})| \leq |f(x_{k_h}) - f(x)| + |f(y_{k_h}) - f(x)| \xrightarrow[h \to +\infty]{} 0$ per la continuità di f in $x \in K$. Ma, per l'hp. di assurdo si aveva $|f(x_{k_h} - f(y_{k_h})| \geq \epsilon \; \forall h \in \mathbb{N}$, assurdo. La tesi è verificata.

Algebra delle derivate

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a, b)$. Allora sono derivabili in x_0 le funzioni $\lambda f + \mu g$, fg, f/g (quest'ultima se $g(x_0) \neq 0$) e vale:

1. $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$;
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (FORMULA DI LEIBNIZ);
3. $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$;

Dim:

1. $$\frac{(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{h} =$$
$$= \frac{(\lambda f)(x_0 + h) + (\mu g)(x_0 + h) - (\lambda f)(x_0) - (\mu g)(x_0)}{h} =$$
$$= \lambda \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mu \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$
Perchè essendo f e g sono derivabili in x_0 per hp.

2. $$\frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$
$$= \frac{1}{h}[f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)] =$$
$$= f(x_0 + h) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{}$$
$\xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$, perchè $f(x_0 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)$.
Perchè essendo f derivabile in x_0 è continua in tal punto. Dove si è usata l'hp. di derivabilità e il fatto che f, essendo derivabile in x_0, è in ivi continua.

3. Calcolo
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right] = \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{hg(x_0 + h)g(x_0)} =$$
$$= -\frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$
In quanto g è derivabile dunque continua in x_0.
Dunque:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$
$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Derivata della funzione composta

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \to \mathbb{R} \mid g \circ f$ sia ben definita $\forall x \in (a, b)$. Si assuma che f sia derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e che g sia derivabile in $f(x_0) \in (c, d)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

In notazione di Liebniz, con $y = f(x)$ e $z = g(x)$: $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

Dim: g è differenziabile in $y_0 := f(x_0)$, cioè $g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + o(k)$ per $k \to 0$. Pongo $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$. Allora $k \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ (per la continuità di f in x_0) e $\frac{k}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$. Si noti che $y_0 + k = f(x_0 + h)$. Allora:

$$\frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} = \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{h} = \frac{1}{h}(g'(f(x_0))k + o(k)) =$$

$$= g'(f(x_0)) \cdot \frac{k}{h} + \frac{o(k)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} g'(f(x_0))f'(x_0)$$

$(\frac{o(k)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0)$ Dato che $\frac{k}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$ e, quindi, $\frac{o(k)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Teorema di De l'Hospital

Siano $f, g \in (a, b) \to \mathbb{R}$ (a,b finiti o infiniti) e $| \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure a $+\infty$ oppure a $-\infty$ e inoltre f e g derivabili in (a, b) e $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (con $g'(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \neq 0$).
Allora $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
Analogo risultato vale per $x \to b^-$.

Dim: Caso $a \in \mathbb{R}$, forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

1. Caso $L \in \mathbb{R}$. Per hp. vale $\forall \epsilon > 0\ \exists\ t_0 \mid$ se $t \in (a, t_0)$ vale $L - \epsilon \leq \dfrac{f'(t)}{g'(t)} \leq L + \epsilon$. D'altronde fissati y e $x \mid a < y < x < t_0$ vale il th. di Cauchy nell'intervallo $[y, x]$. Allora $\exists c \in [y, x] \mid \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Per costruzione $c \in (a, t_0)$ e dunque $L - \epsilon \leq \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \epsilon$, e dunque $L - \epsilon \leq \dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq L + \epsilon\ \forall y, x \mid a < y < x < t_0$. Per $y \to a$, si ha che usando il fatto che $\lim_{y\to a^+} f(y) = \lim_{y\to a^+} g(y) = 0$, $L - \epsilon \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq L + \epsilon\ \forall x \in (a, t_0)$. Dunque per def. di limite $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.
2. $L = +\infty$ (il caso $L = -\infty$ è analogo).
   Per definizione vale $\forall M\ \exists t_0 \mid \dfrac{f'(t)}{g'(t)} \geq M$ se $t \in (a, t_0)$. Procedendo esattamente come prima si ottiene, se $a < y < x < t_0$ vale $\dfrac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \geq M$. Per $y \to a^+$ si ha allora $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq M$ se $a < x < t_0$. Per definizione di limite vale allora $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$.

Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$. Allora f è integrabile su $[a, b]$.

Dim: Sappiamo che f è uniformemente continua su $[a, b]$, cioè $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) \mid$
$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$ se $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Sia $\mathcal{P}$ una partizione e si assuma che, $\max\{x_i - x_{i-1}, i = 1 \ldots n\} \leq \delta$. Siano x_i', x_i'' punti di massimo e minimo per f in $[x_{i-1}, x_i]$ (tali punti $\exists$ per il th. di Weierstrass). Vale allora, per tali partizioni

$$0 \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x'_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x''_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(x'_i) - f(x''_i)](x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a)$$

Abbiamo mostrato che se l'ampiezza di $\mathcal{P}$, cioè il numero $\max\{x_i - x_{i-1}, i = 1 \dots n\}$ è $\leq \delta$ allora $0 \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \leq \epsilon(b-a)$. Ma allora non è possibile che $\inf\{S(\mathcal{P}, f, \mathcal{P}\ partizione\} < \sup\{s(\mathcal{P}, f), \mathcal{P}\ partizione\}$ perchè se così fosse varrebbe $S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \geq \inf\{S(\mathcal{P}, f), \mathcal{P}\ partizione\} - \sup\{s(\mathcal{P},), \mathcal{P}\ partizione\} \geq 0$. Quindi la tesi è valida.

Teorema della media integrale

Sia f continua su $[a, b]$. Allora $\exists\ c \in [a, b] \mid \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$.

Dim: La tesi si può riscrivere come $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
Siano M, m il max e il min rispettivamente di f in $[a, b]$. Allora

$$m(b-a) = \int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \leq M(b-a)$$

Allora $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$. Per il th. dei valori intermedi valido essendo f continua, $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Primo teorema del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$ secondo Rienman. Sia G una sua primitiva in (a, b), cioè abbia $G'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$. Si assuma che $G(a^+) := \lim_{x \to a^+} G(x), G(b^-) := \lim_{x \to b^-} G(x)\ \exists$ finiti. Allora:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b^-) - G(a^+)$$

Dim: Pongo $G(a) := G(a^+)$ e $G(b) := G(b^-)$. Con tale definizione G è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b). Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $[a, b]$. Allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} [G(x_i) - G(x_{i-1})] \underset{Lagrange}{=} \sum_{i=1}^{n} G'(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

per oppurtuni $\hat{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$ e applicando Lagrange su $[x_{i-1}, x_i]$ per G. Ma il membro di destra della formula è una somma integrale di f e sappiamo che essa tende a $\int_a^b f(x)dx$ (essendo f per hp. integrabile) se $A(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$. Ma allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{A(\mathcal{P}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$$

Dunque la tesi è verificata.

Secondo teorema del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Rienman in $[a, b]$. Sia $c \in [a, b]$ e si ponga $F(x) := \int_c^x f(t)dt$. Allora F è continua in $[a, b]$. Inoltre se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$. F viene chiamata funzione integrale e f funzione integranda.

Dim: f è per hp. limitata (essendo integrabile), dunque $\exists M \mid |f(x)| \leq M \; \forall x \in [a,b]$. Allora supponendo ad esempio $x > x_0$, vale

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} 0$$

Analogamente $x \longrightarrow x_0^-$. Dunque $F(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} F(x_0)$, cioè F è continua in $x_0 \in [a,b]$ e x_0 è arbitrario, dunque F è continua in $[a,b]$. Sia ora f continua in x_0. Allora dato $h > 0$ si ha:

$$\frac{1}{h}\left[F(x_0 + h) - F(x_0)\right] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

La tesi sarà dimostrata se mostriamo che $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Vale:

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt$$

Quindi se $h > 0$, vale:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \qquad (1)$$

So che $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; \delta \mid |f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$ se $|t - x_0| \leq \delta$ (f è continua in x_0).
Ma allora, se $h > 0$ è sufficientemente piccolo si ha, da (1):

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon \; dx = \frac{1}{h} \cdot \epsilon \cdot h = \epsilon$$

Analogamente per $h > 0$, ne segue che $\lim_{h \to 0} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)$, cioè la tesi è vera.