LIMITE

quanto vale $f(x)$ quando x si avvicina a x_0?

$f: D \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \to x_0 \leftarrow$ $\quad x \xrightarrow[\text{tende}]{} x_0$ $\quad l = f(x)$; $\lim_{x\to x_0} f(x) = ?$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ $\quad x_0 \in \mathbb{R}^*$, intorno di x_0 = ?

- se $x_0 \in \mathbb{R}$, $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ $\quad x_0-\delta \quad x_0 \quad x_0+\delta$
- se $x_0 = +\infty$, $I_a(+\infty) = (a, +\infty)$, $a > 0$
- se $x_0 = -\infty$, $I_a(-\infty) = (-\infty, -a)$, $a > 0$ $\quad -a \quad 0$

DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE

Topologia = parte della matematica che si sviluppa dalla nozione di intorno (es definizione di punto d'accumulazione)

Def di limite = è generale, preceduta poi da caso in caso.

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 un punto d'accumulazione di D o $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$. Sia $l \in \mathbb{R}^*$.

Si dice che
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{se}$$
"$\forall$ intorno U di l, $\exists$ un intorno V di x_0 tale che se $x \in D \cap V$, $x \neq x_0 \Rightarrow f(x) \in U$".

$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = +\infty$, $x_0 = -\infty$, $\quad l \in \mathbb{R}^*$

CASI

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$
2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$
3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$
4) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$
5) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
6) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$
7) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$, $l \in \mathbb{R}$
8) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$
9) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

Es **funzione di DIRICHLET** (NON è INTEGRABILE)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

... vale $\int^1 f(x)\,dx$?

CASO 1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

$l \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$l-\varepsilon$ $l+\varepsilon$

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$U = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

$V = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

__Def__. Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accum di D. Sia $l \in \mathbb{R}$. Si dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ se}$$

"$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tale che se $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$".

__OSS__. x_0 non necessariamente $\in D = D(f)$

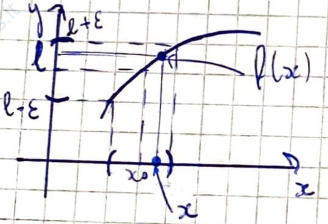
$0 < |x - x_0| \overset{\text{significa}}{\Leftrightarrow} x \neq x_0$

$x \in D$

x_0

non vedo quello che succede in x_0

INTERPRETAZ GRAFICA



$\Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

__VERIFICA__

$\lim_{x \to 0} (x^3 + 1) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

prendo

$|f(x) - l| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (scelto arbitrario) — devo verificare che esiste intorno per le x che verificano questa disequazione. Se trovo un intorno di $x = 0 \Rightarrow$ verificato

$|x^3 + 1 - 1| < \varepsilon$

$|x^3| < \varepsilon$ $\quad |x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ $\quad$ è un intorno dell'origine

$-\sqrt[3]{\varepsilon}$ $\quad 0 \quad$ $\sqrt[3]{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ lim è __verificato__ e $\delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$

__VERIFICA__ $\lim_{x \to 0} a^x = 1$ $\quad a > 0$, $a \neq 1$

$a > 1$ ($0 < a < 1$ verifica analoga)

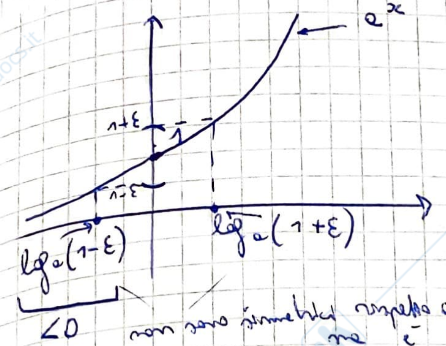
$\varepsilon > 0$ arbitrario: $|f(x) - l| < \varepsilon$ $\quad |a^x - 1| < \varepsilon$ $\quad -\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon$

$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$

$\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$ $\quad$ C.E. log $1 - \varepsilon > 0$ (ε piccolo)

$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$

$\sim 1-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^4}{4!}\ \dots$



non sono simmetrici rispetto all'origine ma è comunque un intorno

$|a^x-1|<\varepsilon$?

$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)$

è la minima di quelle 2 distanze

$\delta(\varepsilon)=\min\{\log_a(1+\varepsilon), -\log_a(1-\varepsilon)\}$ (se voglio la distanza)

Verificato

TEOREMA DI UNICITÀ

Sia $f: D\to\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accumulazione di D. Se

$\lim_{x\to x_0} f(x)=l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x)=l_2$, $l_1,l_2\in\mathbb{R} \Rightarrow l_1=l_2$

(come dire che limite è unico)

PROPOSIZIONI

1) $\lim_{x\to x_0} f(x)=0 \iff \lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|\lambda|$, $\lambda\in\mathbb{R}$

non vale il viceversa

CASO 2 $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}$

Def Sia $f:D\to\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accum. di D. Si dice che

$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ se

"$\forall M>0$, $\exists\,\delta=\delta(M)>0$ tale che se $x\in D$ e $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$" $\longrightarrow$ maggiore delle semirette

$l=+\infty$ $M>0$

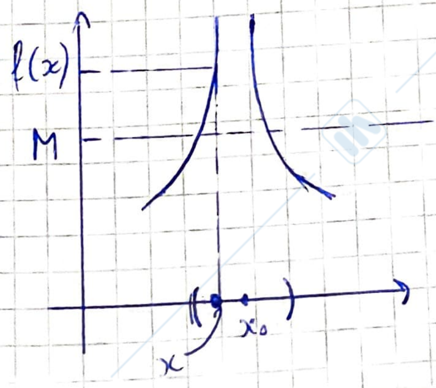
$U=(M,+\infty)$

$x_0\in\mathbb{R}$, $\delta>0$

$V=(x_0-\delta, x_0+\delta)$

(f(x) diventa > di qualsiasi M che scegliamo)

OSS.



usuale del ten quanto vale $\int f(x)\,dx$?

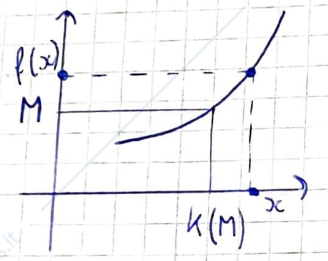
$l = +\infty \quad M > 0$
$U = (M, +\infty)$

$x_0 = +\infty, \quad K > 0$
$V = (K, +\infty)$

CASO 5 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$, D non limitato superiormente.
Si dice che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se:

$$\left[\text{"}\forall M > 0, \ \exists K = K(M) > 0 \text{ tale che se } x \in D \text{ e } x > K \Rightarrow f(x) > M\text{"} \right]$$



VERIFICA $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$

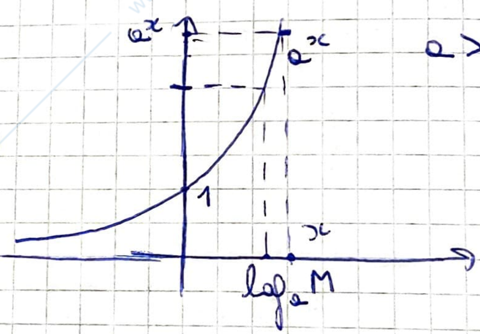
26/10/2021

$M > 0$ arbitrario

$f(x) > M, \quad a^x > M, \quad \log_a a^x > \log_a M$

$\Rightarrow x > \log_a M$ con

$K(M) = \log_a M$



CASO 7 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}$

$l \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0$
$U = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$
$x_0 = -\infty, \quad K > 0$
$V = (-\infty, -K)$

Def. Sia $f: D \to \mathbb{R}$, D non limitato inferiormente.
Sia $l \in \mathbb{R}$.
Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ se

"$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K = K(\varepsilon) > 0$ tale che se $x \in D$ e $x < -K \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

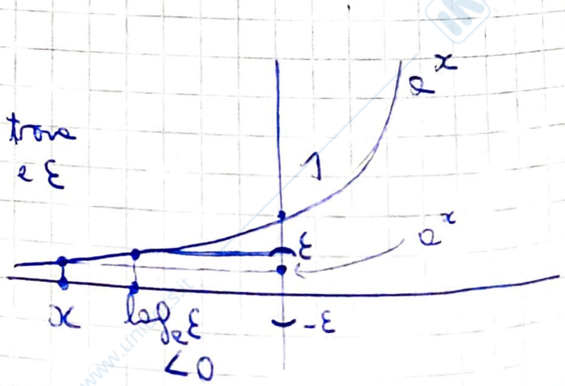
VERIFICA $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad a > 1$

$\varepsilon > 0$ arbitrario

è come chiedersi quando a^x si trova tra $-\varepsilon$ e ε

$|f(x) - l| < \varepsilon, \quad |a^x - 0| < \varepsilon \quad a^x < \varepsilon$

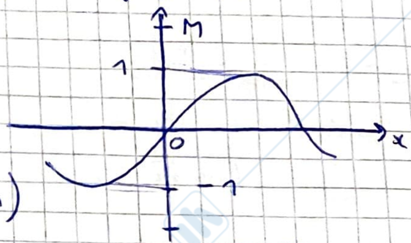
$x < \log_a \varepsilon, \quad K(\varepsilon) = -\log_a \varepsilon$



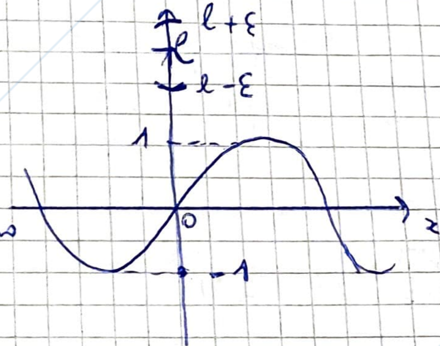
OSS Un limite può non esistere, per esempio $\nexists \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x$

Per assurdo: se fosse $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x = l \Rightarrow$

1) $l = +\infty$, $\forall M > 0$, $\operatorname{sen} x > M$ per $x > K(M)$ (intorno) con $K(M)$ opportuno
$\forall M > 1$, affermazione $\operatorname{sen} x > M$ è FALSA
$\Rightarrow l \neq +\infty$

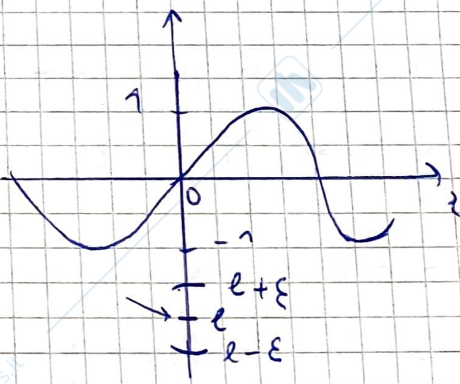


2) $l = -\infty$: $\forall M > 0$, $\operatorname{sen} x < -M$ per $x > K(M)$
con $K(M)$ opportuno; ma $\forall M > 1$, affermazione $\operatorname{sen} x < -M$ è FALSA
$\Rightarrow l \neq -\infty, +\infty$



3) $l \in \mathbb{R}$, $l > 1$ (supponiamo): $\varepsilon > 0$ arbitrario
$l - \varepsilon > 1$
$\operatorname{sen} x \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ per $x > K(\varepsilon)$ opportuno
$\Rightarrow \operatorname{sen} x > l - \varepsilon > 1$ FALSA

$\Rightarrow l \neq +\infty, -\infty$, l non può essere > 1



4) $l \in \mathbb{R}$ $l < -1$
$\varepsilon > 0$ $l + \varepsilon > -1$
ragionamento analogo al caso 3 $\Rightarrow$
$\Rightarrow l \neq +\infty, -\infty$, l non può essere > 1 né < -1

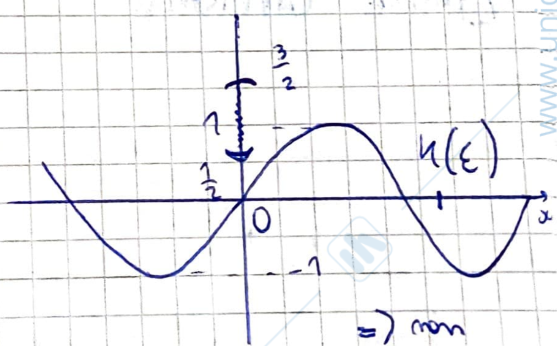
deve valere per $\forall$

l deve essere tra -1 e 1

5) $l = 1$ $\varepsilon > 0$ (arbitrario)

scelgo $\varepsilon = \frac{1}{2}$
intorno che ha la forma
$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

dovrebbe essere $\operatorname{sen} x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ per
$x > K(\varepsilon)$ opportuno FALSO
(prima x abbastanza grandi)



$\Rightarrow$ non sempre cade in

6) $l = -1$ FALSO
analogamente

Es funzione di DIRICHLET (NON INTEGRABILE) $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

uso usuale del teo.. quanto vale $\int_0^1 f(x)\,dx$?

7) $\underline{-1 < l < 1}$

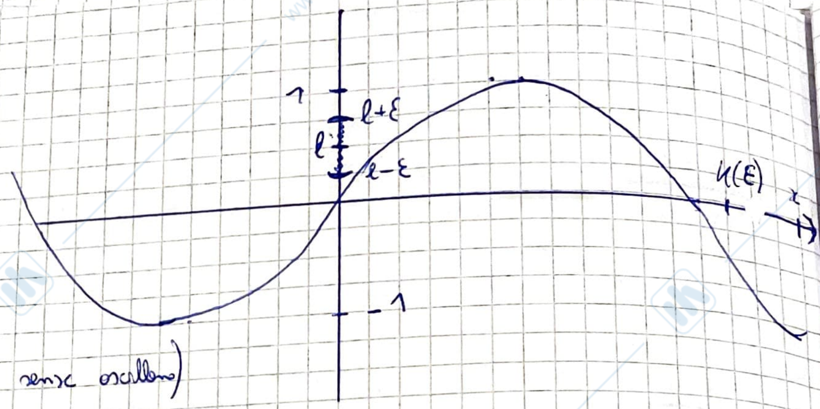
(analogo allo precedente) $\varepsilon > 0$ (arbitrario)

$l > 0, \quad l - \varepsilon > 0$

$\underline{l - \varepsilon < \operatorname{sen} x < l + \varepsilon}$

per $x > H(\varepsilon)$ opportuno

FALSA (perché valori di senx oscillano)



$\Rightarrow$ Conclusione : $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \nexists$

OSS. Analogo per affermare che $\nexists$ $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sen} x$, $\lim_{x\to+\infty} \cos x$, $\lim_{x\to-\infty} \cos x$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{tg} x$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{tg} x$, ... $\forall f$ periodica (non ammette limite per $x \to \pm\infty$)

$\boxed{Es}$ $f(x) = \begin{cases} x+2, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

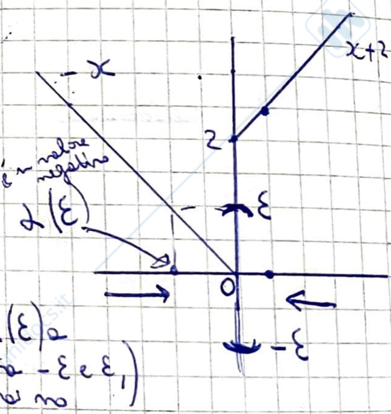
$x_0 = 0$ un punto d'acc di D $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = ?$

se fosse $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$: significherebbe che $\varepsilon > 0$ arbitrario

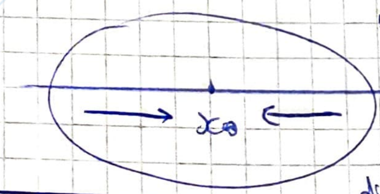
$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ FALSA in $\forall$ intorno di $x_0 = 0$

(perché da $\delta(\varepsilon)$ a 0 è tra $-\varepsilon$ e ε, poi no)

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) \nexists$



LIMITE LATERALE



NON CI OCCUPIAMO PIÙ CONTEMPORANEAMENTE DI CIÒ CHE SUCCEDE DA DX E SX

$x \to x_0^+$

limite destro

$x \to x_0^-$

limite sinistro

intorno destro di x_0 (x_0, $x_0+\delta$)

$I_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0+\delta)$, $\delta > 0$

intorno sinistro di x_0 ($x_0-\delta$, x_0), $\delta > 0$

$I_\delta^-(x_0) = (x_0-\delta, x_0)$

(continuando rispetto a prima)

10) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$

11) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

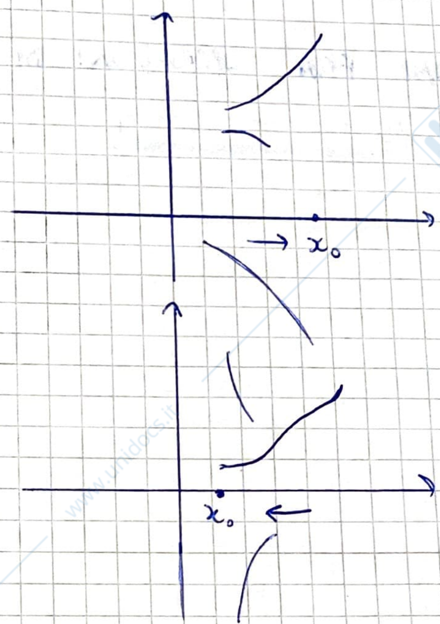
12) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

13) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l, \ l \in \mathbb{R}$

14) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

15) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

definizioni si danno usando la def topologica ma usando intorni DX e SX



Def del CASO 10

Def Sia $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto d'accumulazione di $D \cap (x_0, +\infty)$

Sia $l \in \mathbb{R}$ si dice che $\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l}$ se

"$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tale che se

$x \in D$ e $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$"

è DX di x_0 in forma letterale

$l \in \mathbb{R}$, $l > 0$	$V = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$
x_0, $\delta > 0$	$V = (x_0, x_0+\delta)$

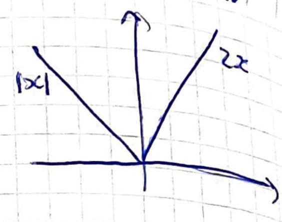
Notazioni: $\underbrace{\lim_{x\to x_0^+} f(x)}$, $\underbrace{f(x_0^+)}$ stessa cosa

$\underbrace{\lim_{x\to x_0^-} f(x)}$, $\underbrace{f(x_0^-)}$

TEOREMA $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff f(x_0^+) = l$ e $f(x_0^-) = l$

(se il limite esiste, è uguale al limite laterale?)

Es. $f(x) = \begin{cases} |x|, & x<0 \\ 2x, & x>0 \end{cases}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = ?$



$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

RELAZIONI FRA OPERAZIONI DI LIMITE E LE ALTRE OPERAZ SU FUNZIONI

TEOREMA (ALGEBRA DEI LIMITI) Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, sia x_0 un punto d'accumulazione di e risulti:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Allora:

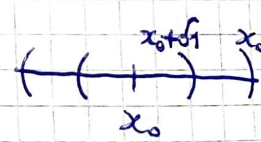
1) $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$
2) $\lim_{x\to x_0} k f(x) = k\alpha$, $\forall k \in \mathbb{R}$
3) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta$
4) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$

Dim CASO 1): limite della somma

Sia $\varepsilon > 0$ (definizione) arbitrario e si consideri il valore $\frac{\varepsilon}{2}$

Dalla definizione di limite, poiché:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \Rightarrow \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tale che se $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ (in cui vale)
- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \Rightarrow \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ t.c. se $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$



Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue che:

se $x \in D$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, allora

(se considero il più piccolo dei due intervalli valgono sia la prima che la seconda disug.)

DIFFERENZA TRA FUNZ. SOMMA e SOMMA DEI LIMITI; DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$|f(x) + g(x) - (\alpha+\beta)| = |f(x) - \alpha + g(x) - \beta| \le$$

$$\le |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

vale e per ogni ε

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

quindi è proprio

OSSERVAZIONI

1) $\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{x\to x_0} \underbrace{x\cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}} = \underbrace{x_0 \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot x_0}_{n \text{ volte}} = x_0^n$

2) $\lim_{x\to x_0} P_n(x) = \lim_{x\to x_0} \left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0\right] =$

$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_0 = P_n(x_0)$

3) $\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)}$ se $Q_m(x_0) \neq 0$

Es. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x}{x^3-2x^2+2} = \frac{2}{1} = 2$

OSS ALGEBRA dei limiti vale per $x\to x_0^+,\ x_0^-,\ +\infty,\ -\infty$

ESTENSIONE DELL'ALGEBRA DEI LIMITI AL CASO DEI LIMITI INFINITI

Siano $f, g: D \to \mathbb{R}$, x_0 punto d'accumul di D e $a \in \mathbb{R}$. Allora per $x \to x_0$:

SOMMA: diventano indefinitamente grandi

1) $f \to +\infty$, $g \to +\infty \Rightarrow f+g \to +\infty$ (sfrutta analoga dimostrazione con $\forall M \ldots$)

2) $f \to -\infty$ $g \to -\infty \Rightarrow f+g \to -\infty$

3) $f \to a$ $g \to \pm\infty \Rightarrow f+g \to \pm\infty$

N.B $f \to +\infty$, $g \to -\infty$
$f+g \to ?$ chi prevale?

PRODOTTO:

4) $f \to a \neq 0$, $g \to \pm\infty \Rightarrow fg \to \pm\infty$ se $a>0$ $fg \to \mp\infty$ se $a<0$ (diventa opposto)

5) $f \to +\infty$, $g \to +\infty \Rightarrow fg \to +\infty$

6) $f \to -\infty$, $g \to -\infty \Rightarrow fg \to +\infty$

7) $f \to +\infty$, $g \to -\infty \Rightarrow fg \Rightarrow -\infty$

(vale regola dei segni)

N.B $f \to 0$ $g \to \pm\infty$
fg ?

...enso usuale del termine quanto vale $\int_0^1 f(x)\,dx$? $\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

se t_j sono razionali, $f(t_j)=1$ ⇒ non risolve di termine

se $t_j \in \mathbb{Q}$ $\forall$ ...

QUOZIENTE:

2) $f \to a$, $g \to \pm\infty \Rightarrow \frac{f}{g} \to 0$

3) $f \to \pm\infty$, $g \to a \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \to \pm\infty$ (dipende dal segno di a)

OSS (divido per quantità piccolissima)

- $f \to \pm\infty$, $g \to 0 \Rightarrow \left|\frac{f}{g}\right| \to +\infty$
- $f \to a \neq 0$, $g \to 0 \Rightarrow \left|\frac{f}{g}\right| \to +\infty$

} attenzione all'esistenza del limite

N.B

$f, g \to \pm\infty$, $\frac{f}{g} \to ?$

$f, g \to 0$, $\frac{f}{g} \to ?$

OSS tutto quanto è stato detto sopra vale anche per $x \to x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$.

Es.

1) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x^2-x+1} = 0$

$x \to -\infty$
$x^2-x+1 \to +\infty$
$x \to +\infty \quad \frac{1}{x} \to 0$

2) $\lim_{x\to +\infty} \left(2x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

3) $\lim_{x\to -\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{1}\underbrace{\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)}_{-\infty} = -\infty$

$x \to -\infty$

$1 + \frac{1}{x} \to 1$

$x^3 \to -\infty$

$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) \to -\infty$

Es. (ATTENZIONE AI SEGNI)

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{x^2} = +\infty$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1+x}{x} \;\nexists$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1+x}{x} = -\infty$

serve definire per limiti laterali

27/10/2021

FORME INDETERMINATE di TIPO ARITMETICO

(FORME di INDECISIONE)

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

(nell'ordine)

f, g, $f \to +\infty$, $g \to -\infty$: $f+g \to ?$

f, g, $f \to 0$, $g \to +\infty(-\infty)$: $f \cdot g \to ?$

f, g, $f \to 0$, $g \to 0$: $\frac{f}{g} \to ?$

f, g, $f \to \pm\infty$, $g \to \pm\infty$: $\frac{f}{g} \to ?$

Esempi

1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ divido per x

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right)$ divido per $x-2$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{1} = 4$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right) = (\infty - \infty)$ moltiplico e tolgo radice sopra

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x} =$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ divido per avere sopra qualcosa che non va a ∞ e sotto

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} = \frac{2}{2} = 1$

LIMITE DI UNA COMPOSIZIONE di FUNZIONI

Teorema: (sostituzione / cambiamento di variabili)

Siano f, g due funzioni per le quali è ben definita la composizione $f \circ g$, almeno in un intorno di x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}^*$). Se:

IPOTESI

1) $\lim_{x \to x_0} g(x) = t_0$, $t_0 \in \mathbb{R}^*$

2) $\lim_{t \to t_0} f(t) = l$, $l \in \mathbb{R}^*$

3) $g(x) \neq t_0$ in un intorno di x_0 (escluso x₀ stesso)