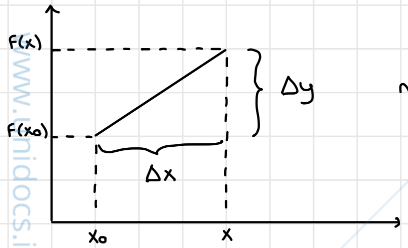
DEF $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a;b)$

Si assuma $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\exists$ finito. Dirò allora che f è derivabile in x_0 e in tal caso il limite di cui sopra viene indicato con $f'(x_0)$, o con $\frac{df}{dx}(x_0)$

OSSERVAZIONI

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dove $x = x_0+h$ $\quad x \to x_0 \iff h \to 0$



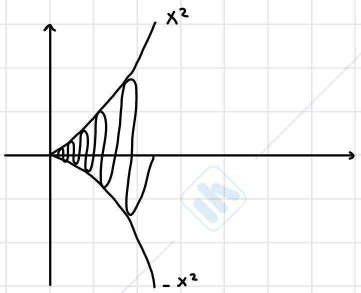
$m = \tan\theta = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}$

DEF Sia $f:(a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$

La retta $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ viene detta retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{-1<\sin\frac{1}{x}<1} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



poiché seno compreso tra -1 e 1

la funzione è compresa tra x^2 e $-x^2$

f è derivabile in $x=0$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

la retta tangente nell'origine è x

(non ha significato geometrico)

f derivabile in $x_0 \iff \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} f'(x_0) \in \mathbb{R} \iff \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x) + o(1)$ per $x \to x_0 \iff$

$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + (x-x_0)\,o(1)$ per $x \to x_0 \iff f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$

In particolare $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

TEOREMA

Sia f derivabile in x_0.

1. Allora f è continua in x_0 (non vale il contrario).
2. f è derivabile in $x_0 \iff f$ è differenziabile in x_0 cioè se $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + o(1) \text{ per } x \to x_0 \implies f \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e } f'(x) = A$$

DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI

- $f(x) = c \quad \forall x \implies f'(x) = 0 \quad \forall x$
- $f(x) = x^\alpha$ per $x > 0 \implies f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

$$\frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha}{x} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \xrightarrow[h \to 0]{} \alpha x^{\alpha-1}$$

- $f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \log a$

$$\frac{a^{x+h} + a^x}{h} = a^x \underbrace{\frac{a^h - 1}{h}}_{\log a \text{ per } h \to 0} \xrightarrow[h \to 0]{} a^x \log a$$

- $f(x) = \log_a x \quad x > 0 \implies f'(x) = \frac{1}{x \log a}$
- $f(x) = \sin x \implies f'(x) = \cos x$

$$\frac{\sin(x+h) + \sin(x)}{h} = \frac{\sin x \cos(h) + \cos x \sin(h) - \sin x}{h} = \sin x \underbrace{\frac{\cosh - 1}{h}}_{0 \text{ per } h \to 0} + \cos x \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1 \text{ per } h \to 0} = \cos x$$

- $f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x$

TEOREMA (ALGEBRA DELLE DERIVATE)

Siano $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a;b)$. Allora sono derivabile in x_0 le funzioni $\lambda f + \mu g, fg, \frac{f}{g}$ (quest'ultima se $g(x_0) \neq 0$) e vale

1. $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$
2. $(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$ FORMULA DI LEIBNIZ
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Dim

2. $$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0+h)g(x_0) + f(x_0)g(x_0)\right] = f(x_0+h)\frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}$$

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{\substack{h \to 0 \; f(x_0) \\ \text{perché } f(x) \text{ continua}}} \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0) \to$$ dove si è usata l'ipotesi di derivabilità e il fatto che f, essendo derivabile in x_0, è continua

③ calcolo $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right] = \frac{g(x_0)-g(x_0-h)}{h\,g(x_0+h)g(x_0)} = -\frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)}\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{g(x_0)^2}\cdot g'(x_0)$

dove si è usata l'ipotesi di derivabilità e il fatto che g, essendo derivabile in x_0, è continua

Dunque $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - \frac{f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x)g(x)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

TEOREMA (DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE)

Siano $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ t.c. $g\circ f$ sia ben definita $\forall x\in(a,b)$. Si assuma che f sia derivabile in $x_0\in(a,b)$, g derivabile in $f(x_0)$. Allora $f\circ g$ è derivabile in x_0 e vale $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

$\left(y = f(x),\ z = g(y) \longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right.$

<u>Dim</u>

g è differenziabile in $y_0 := f(x_0)$, cioè $g(y_0+k) - g(y_0) = g'(x_0)k + o(k)$ per $k\to 0$

Pongo $k := f(x_0+h) + \underbrace{f(x_0)}_{y_0}$. Allora $k \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ e $\frac{k}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$. Si noti che $y_0+k = f(x_0+h)$. Allora $\frac{g(\overbrace{f(x_0+h)}^{y_0+k}) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0})}{h} =$

$= \frac{1}{h}\cdot g'(f(x_0))k + o(k) \xrightarrow[h\to 0]{} g'(f(x_0))f'(x_0)$ dato che $\frac{k}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)$ e quindi $\frac{o(k)}{h} = \frac{o(k)}{k}\cdot\frac{k}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

TEOREMA

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ strettamente monotona e derivabile in $x_0\in(a,b)$

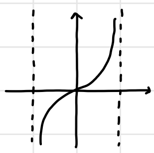
Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$ se $f'(x_0)\neq 0$, e vale $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

DERIVATE di FUNZIONI ELEMENTARI

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\quad f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$

$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$



$f: \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \tan x \to$ è una funzione invertibile

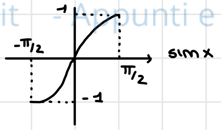
L'inversa di $f(x)$ è indicata con $\arctan x$

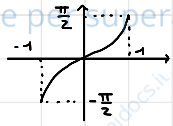
$f'(x) = 1 + \tan^2 x \neq 0 \quad \forall x\in\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Si ha $(\arctan y)' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

Cioè usando la variabile $x \to \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f:[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \longrightarrow (-1;1)$ $\quad f(x) = \sin x$





$f(x)$ è invertibile e la sua inversa si indica con $\arcsin x$

$(\sin x)' = \cos x \neq 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Dunque $\arcsin y$ è derivabile per $y \in (-1;1)$

pongo $y := \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x = + \sqrt{1-\sin^2 x}$

per costruzione il segno + è scelto dato che $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ e dunque $\cos x \geq 0$

Dunque $\arcsin y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1;1)$

Dunque
- $\arcsin x + \arccos x = \text{costante} = \frac{\pi}{2}$
- $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{costante} = \frac{\pi}{2}$ per $x>0$; $= -\frac{\pi}{2}$ per $x<0$

sono costanti perché le loro derivate sono sempre 0

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Si assuma che f abbia in x_0 un punto di massimo o di minimo relativo.

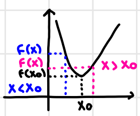
Allora $f'(x_0) = 0$

Dim

Studio x_0 punto di minimo

Sia $I(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ Allora $I(x) \geq 0$ se $x > x_0$, x sufficientemente vicino a x_0. Inoltre $I(x) \leq 0$ se $x < x_0$, x sufficientemente vicino a x_0. Ma allora per la permanenza del segno, vale $f'_+(x_0) \geq 0$. D'altronde $f'_-(x_0) \leq 0$

Ma f è derivabile in x_0 dunque $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e dunque entrambe valgono 0. Quindi $f'(x_0) = 0$



TEOREMA DI ROLLE

Sia $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e si assuma f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Si supponga inoltre che $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = 0$

Dim

Per il teorema di Weierstrass f ha massimo e minimo assoluti in $[a,b]$ cioè $\exists x_1, x_2 \in [a;b]$ t.c. $f(x_1) = M:\{f(x), x \in [a,b]\}$ e $f(x_2) = m := \min\{f(x), x \in [a,b]\}$

Se $m = M$ allora $f(x) =$ costante $\forall x$ (teorema verificato perché derivata di una costante è zero)

Se $m \neq M$ almeno uno tra $x_1, x_2 \in (a,b)$. Sia c un tale punto. Per il teorema di Fermat vale $f'(c) = 0$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b)

Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c. $[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c)$

Dim

Sia $w := [f(b)-f(a)]g(x) - [g(a)-g(b)]f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Allora w è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Si vede immediatamente $w(b) = w(a)$. Per il teorema di Rolle $\exists c$ t.c $w'(c) = 0$ cioè t.c.

$[f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0$

TEOREMA DI LAGRANGE (o del valore medio)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b)

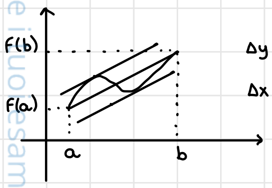
Allora $\exists c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dim

Dal teorema di Cauchy con $g(x) = x$

$[f(b)-f(a)]\cdot 1 = [a-b]f'(c) \rightarrow f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

SIGNIFICATO GEOMETRICO



$\Delta y = f(b) - f(a)$ $\quad$ $\Delta m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta x = b - a$

APPLICAZIONI

- Sia $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Allora F è costante $\iff F'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b)$

  Infatti siano $x_1,x_2\in(a,b)$ con $x_1<x_2$. Uso Lagrange su $[x_1;x_2] \to \exists c\in(x_1,x_2)$ t.c $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$ cioè $F(x_2)-F(x_1)=0 \ \forall x_1,x_2$

- Se $F'(x)=g'(x) \quad \forall x\in(a,b)$ allora $g(x)=F(x)+c \quad \forall x\in(a,b)$ per un opportuno $c\in\mathbb{R}$

  Infatti $(g-F)'(x)=g'(x)-F'(x)=0 \quad \forall x$

  $g'(x)$ e $F'(x)$ differiscono per una costante additiva

- Sia $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Allora F è crescente su $(a,b) \iff F'(x)\geq 0$ su (a,b) (F è decrescente $\iff F'(x)<0$)

  (analogo enunciato per funzioni decrescenti)

  Infatti siano $x_1<x_2$ con $x_1,x_2\in(a,b)$. Applico Lagrange su $[x_1;x_2]$. Allora $F(x_2)-F(x_1)=\underbrace{F'(c)}_{\geq 0}\underbrace{[x_2-x_1]}_{x_2>x_1}$ per un opportuno $c\in(x_1,x_2)$. Dunque $F(x_2)\geq F(x_1)$

- Sia $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Siano $x_1<x_2$ con $x_1,x_2\in(a,b)$. Allora F' assume tutti i valori compresi tra $F'(x_1)$ e $F'(x_2)$ (PROPRIETÀ DEI VALORI INTERMEDI DELLE DERIVATE)

  Dunque una funzione derivata non ha discontinuità a salto

  Infatti supponiamo, ad esempio, $F'(x_1)<F'(x_2)$

  Si ponga, dato $\lambda\in(F'(x_1),F'(x_2))$ e $w=F(x)-\lambda x$

  Allora $w'(x)=F'(x)-\lambda$. Quindi $w'(x_1)=F'(x_1)-\lambda<0$ e $w'(x_2)=F'(x_2)-\lambda>0$

  Dunque w non è monotona $\to$ allora $\exists$ due numeri $\alpha,\beta\in(a,b)$ t.c. $w(\alpha)=w(\beta)$. Dunque per Rolle $\exists\gamma\in(\alpha;\beta)$ t.c. $w'(\gamma)=0$, cioè t.c. $F'(\gamma)=\lambda$

DEF INSIEME CONVESSO

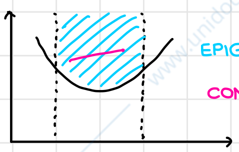
$A\subset\mathbb{R}^m$ si dice convesso se $\forall \underline{x};\underline{y}\in A$ il segmento $S:=\{\underline{z}\in\mathbb{R}^m,\ \underline{z}=t\underline{y}+(1-t)\underline{x}\}$ è contenuto in A, $\forall x,y\in A$

DEF Sia $F:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (I intervallo). Si definisce l'EPIGRAFICO di f come segue $\mathrm{epi}(F):=\{(x;y)\in\mathbb{R},\ x\in I,\ y\geq F(x)\}$

Dico che F è CONVESSA di I se $\mathrm{epi}(F)$ è un insieme convesso

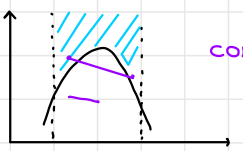
convessità non definita in un punto ma su un intervallo

Dico che F è CONCAVA se $-F$ è convessa in I



EPIGRAMMA

CONVESSA



CONCAVA

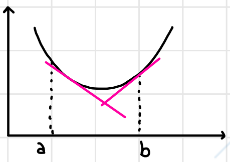
CONDIZIONI NECESSARIE E/O SUFFICIENTI per CONCAVITÀ o CONVESSITÀ DI UNA FUNZIONE

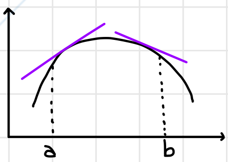
1. Si mostra che f è convessa (rispettivamente concava) su I se $\forall x_1 x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ sta sopra (rispettivamente sotto) nel senso di maggiore uguale (rispettivamente minore uguale) al grafico di f

TEOREMA

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ e sia convessa o concava in (a,b). Allora

1. f è continua in (a,b)
2. $\forall x \in (a,b)$ $\exists f'_+(x), f'_-(x)$
3. Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Allora f è convessa (rispettivamente concava) in $(a,b) \iff \forall x_0 \in (a,b)$ la retta tangente al grafico di f in x_0 sta sotto (rispettivamente sopra) il grafico di f

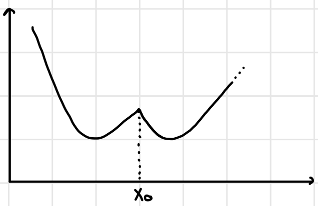




TEOREMA

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$

1. Se f è derivabile in (a,b) allora f è convessa (rispettivamente concava) in $(a,b) \iff f'$ è crescente (rispettivamente decrescente) in (a,b)
2. Se f è due volte derivabile su (a,b) allora f è convessa (rispettivamente concava) su $(a,b) \iff f''(x) \geq 0$ (rispettivamente $f'' \leq 0$) $\forall x \in (a,b)$



$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \neq x_0$

f non è convessa su tutto $\mathbb{R}$

f è convessa su $(-\infty; x_0]$ e su $[x_0; +\infty)$

DEF Sia $f \in (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Si assuma f derivabile in x_0 oppure "$f'(x_0) = \pm\infty$". Dico che x_0 è punto di flesso per f se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. f è convessa su $[x_0; x_0+\varepsilon]$ e concava su $[x_0-\varepsilon; x_0]$ o viceversa

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $F, g \in (a,b) \to \mathbb{R}$ (a,b finiti o infiniti) e t.c. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ oppure $a \pm \infty$. Inoltre F e g deriva= bili in (a,b) e $\lim_{x\to a^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora $\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = L$

Analogo risultato vale per $x \to b^-$

non vale il contrario

ESEMPIO

$F(x) = 2x + \sin x$

$g(x) = 2x - \sin x$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{2x+\sin x}{2x-\sin x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \frac{2+\cos x}{2-\cos x} \to \nexists$

Dim

Caso $a \in \mathbb{R}$, forma di indecisione $\frac{0}{0}$

1) Caso in cui $L \in \mathbb{R}$

Per ipotesi vale che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0$ t.c. se $t \in (a, t_0)$ $L - \varepsilon \le \frac{F'(t)}{g'(t)} \le L + \varepsilon$. D'altronde fissati y e x t.c. $a < y < x < t_0$ vale il teorema di Cauchy nell'intervallo $[y;x]$. Allora $\exists c \in [x;y]$ t.c. $\frac{F(x)-F(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{F'(c)}{g'(c)}$. Per costruzione $c \in (a, t_0)$ e dunque $L - \varepsilon \le \frac{F'(c)}{g'(c)} \le L + \varepsilon$ e dunque $L - \varepsilon \le \frac{F(x)-F(y)}{g(x)-g(y)} \le L + \varepsilon$ $\forall y, x$ t.c $a < x < y < t_0$

Per $y \to a$, si ha che, usando il fatto che $\lim_{y\to a^+} F(y) = \lim_{y\to a^+} g(y) = 0$ $L - \varepsilon \le \frac{F(x)}{g(x)} \le L + \varepsilon$ $\forall x \in (a, t_0)$

Dunque per definizione di limite $\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = L$

2) Caso in cui $L = +\infty$ (per $L = -\infty$ è analogo)

Per definizione vale che $\forall M \ \exists t_0$ t.c. $\frac{F'(t)}{g'(t)} \ge M$ se $t \in (a, t_0)$

Procedendo esattamente come prima si ottiene che se $a < y < x < t_0$ vale $\frac{F(x)-F(y)}{g(x)-g(y)} \ge M$ Per $y \to a^+$ si ha che $\frac{F(x)}{g(x)} \ge M$ se $a < x < t_0$. Dunque per definizione di limite $\lim_{x\to a^+} \frac{F(x)}{g(x)} = +\infty$

ESEMPIO

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

derivata $\log x = \frac{1}{x}$

derivata $x = 1$

DERIVABILITÀ : f derivabile in $x_0 \implies F(x) = \underbrace{F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0)}_{P_1(x)} + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$

PROBLEMA 1 $\longrightarrow$ Trovare condizioni su f t.c. $\exists$ P_m polinomio di grado m con la proprietà

$$F(x) = P_m(x_0) + o[(x-x_0)^m] \quad \text{per } x \to x_0$$

$F^{(k)} := F^{\overbrace{''\cdots'}^{k}} \longrightarrow$ derivata k volte

$F^{(0)} := F$

$$P_m(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{F^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

PROBLEMA 2 $\longrightarrow$ Trovare condizioni su f t.c. $\exists$ un polinomio P_m di grado m t.c $F^{(k)}(x_0) = P_m^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 0, \dots, m$

Si mostra con un calcolo diretto che il polinomio P_m esplicitamente scritto in precedenza ha le proprietà enunciate nel problema 2

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO E DI LAGRANGE)

Sia $F: (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$. Sia F derivabile m volte in x_0 e si ponga $P_m(x) := \sum_{k=0}^{m} \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Allora

1. vale $F(x) = P_m(x) + o[(x-x_0)^m]$ per $x \to x_0$ (resto di Peano)
2. se F è derivabile $m+1$ volte in (a,b) allora $\forall x$ $\exists c$ compreso tra x_0 e x t.c. $F(x) = P_m(x) + \frac{F^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}$ (resto di Lagrange)

APPLICAZIONI

$\sqrt[4]{e} \longrightarrow F(x) = e^x \longrightarrow F\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt[4]{e}$

$$e^{\frac{1}{4}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k k!} + \frac{1}{(n+1)!} e^c \frac{1}{4^{m+1}}$$

$$R_m = \frac{e^c}{(m+1)!\,4^{m+1}} \qquad c \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$$

$$R_m \geq \frac{1}{(m+1)!\,4^{m+1}}$$

$$R_m \leq \frac{2}{(m+1)!\,4^{m+1}}$$

$e^x = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(m+1)!} x^{m+1}$ con $0 < c < x \Rightarrow e^c$ compreso tra 0 e e^x

Si ha $R_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ $\forall x$ finito

Ma allora $\underbrace{\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}}_{:= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}} = e^x$ → serie

Quindi $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Si dimostra che, se $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ converge cioè $\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!}$ $\exists$ in $\mathbb{C}$ (parte reale e immaginaria hanno un limite)

Pongo allora $e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underbrace{\frac{1}{(m+1)!} (\cos x)^{2n+1}\Big|_{x=c} x^{2m+1}}_{\xrightarrow[m \to +\infty]{} 0}$

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ \text{Analogamente} \quad \sin x &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}\right\} \forall x \in \mathbb{R}$$

con $z = i\theta$

$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \underbrace{\sum_{h=0}^{+\infty} (-1)^h \frac{\theta^{2h}}{(2h)!}}_{\substack{\text{parte reale quando} \\ k \text{ è pari } (k=2h) \\ \downarrow \\ \text{coseno}}} + \underbrace{i \sum_{\ell=0}^{+\infty} (-1)^\ell \frac{\theta^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}}_{\substack{\text{parte immaginaria quando} \\ k \text{ è dispari } (k=2\ell+1) \\ \downarrow \\ \text{seno}}}$