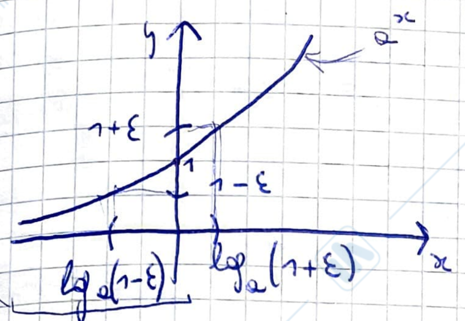
DIMOSTRAZIONI

- $\lim_{x \to 0} a^x = 1$

$a > 0,\ a \neq 1 \quad (a > 1)$



ε arbitrario

$\varepsilon > 0 \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$|a^x - 1| < \varepsilon$

$-\varepsilon < a^x - 1 < \varepsilon$

$1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$

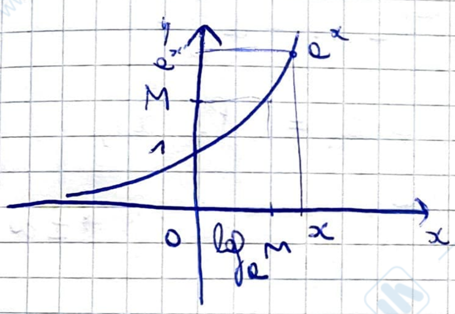
C.E. log: $1 - \varepsilon > 0$ è vero

$\log_a(1-\varepsilon) < x < \log_a(1+\varepsilon)$

$\delta(\varepsilon) = \min\{\log_a(1+\varepsilon) - \log_a(1-\varepsilon)\}$

non sono simmetrici rispetto all'origine ma è comunque un intorno

- $\lim_{x \to +\infty} a^x$ (nel caso $a > 1$) $= +\infty$



M arbitrario

$M > 0$

$a^x > M$

$\log_a a^x > \log_a M$

$x > \log_a M$

($\log_a M$ è una semiretta)

$K(M) = \log_a M$

- $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

per $0 < x < \frac{\pi}{2}$

sen x è positivo $\Rightarrow 0 <$

$0 < \operatorname{sen} x \leq x$

$\to 0$

preso da relazione in costruzione circonferenza

per il teorema di compressione

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$

(compreso tra 2 funzioni che hanno lo stesso limite, ossia 0)

$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x =$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$y = -x$

$f(-x) = -f(x)$

$x \to 0^-$

$y \to 0^+$

perché seno è funz dispari

$\lim_{y \to 0^+} \operatorname{sen}(-y) = -\boxed{\lim_{y \to 0^+} \operatorname{sen} y} = 0$

fatto prima

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

- $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$

uso formula addizione del seno

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \lim_{x \to x_0} \operatorname{sen}(x_0 + x - x_0) =$$

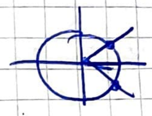
$$= \lim_{x \to x_0} \Big[\operatorname{sen} x_0 \underbrace{\cos(x - x_0)}_{\cos 0 = 1 \,\to\, 1} + \cos x \underbrace{\operatorname{sen}(x - x_0)}_{\to 0} \Big] = \operatorname{sen} x_0$$

- $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\cos x = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

$$\lim_{x \to 0} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = 1$$

(sfrutto ricordo limite di funzione composta)



x è angolo che $\to 0$

$\Rightarrow \cos$ è positivo

- $\lim_{x \to 0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{0}{1} = 0$

- $\lim_{x \to x_0} P_n(x) = \lim_{x \to x_0} \left[a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \right] =$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0 = P_n(x_0)$$

(in parte di algebra dei limiti)

ALGEBRA dei limiti vale anche per $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \pm\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} P_n(x) =$

- $\lim_{x \to x_0} a^x$ (caso $a > 1$) $= a^{x_0}$

$a > 0$, $a \neq 1$ $\quad \lim_{x \to 0} a^x = 1$ già dimostrato

$$= \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} a^{x - x_0} =$$

$$= a^{x_0} \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} a^t = 1 \cdot a^{x} = a^{x_0}$$

$t = x - x_0$, se $x \to x_0$, $t \to 0$

usato teorema del cambiamento di variabile

- **LIMITE DELLA SOMMA DI DUE FUNZIONI** (Come def $x \to x_0$ $f(x)=\ell$ (es.)

Sia $\varepsilon>0$ arbitrario e si considera il valore $\frac{\varepsilon}{2}$ (Da def limite), Poiché:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha \Rightarrow \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)>0$ tale che se $x \in D$ e $0<|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ ★

- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta \Rightarrow \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)>0$ tale che se $x \in D$ e $0<|x-x_0|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ ✱

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue che: se $x\in D$ e $0<|x-x_0|<\delta$, allora:

(differenza tra funz somma e somma di limiti) — disuguaglianza triangolare

$$|f(x)+g(x)-(\alpha+\beta)| = |f(x)-\alpha+g(x)-\beta| \le |f(x)-\alpha| + |g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

vale e meno di ε

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \alpha+\beta$$

se considero il più piccolo dei due intorni valgono sia la prima che la seconda ★✱

- **TEOREMA di CONFRONTO (O COMPRESSIONE), LIM. FINITI**

Siano $f, g, h: D \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto d'accumulazione di D.
Sia $\ell \in \mathbb{R}$
Sia $\delta_0>0$ tale che risulti $f(x)\le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\cap D$, $x \ne x_0$

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ $(\forall \varepsilon)$

DIM Sia $\varepsilon>0$

Poiché $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$, $\exists\, \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$ tale che se $0<|x-x_0|<\delta_1$, $x\in D \Rightarrow \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$ ($\Leftrightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$) uguale a dire

Poiché $\lim_{x\to x_0} h(x)=\ell$, $\exists\, \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ tale che se $0<|x-x_0|<\delta_1$, $x\in D \Rightarrow \ell-\varepsilon < h(x) < \ell+\varepsilon$

abbiamo 3 intorni di x_0 (non sappiamo qual è il più piccolo)

$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0): f < g < h$

$(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1): l-\varepsilon < f < l+\varepsilon$

$(x_0-\delta_2, x_0+\delta_2): l-\varepsilon < h < l+\varepsilon$

nel più piccolo sono incluse queste 3 relazioni

le unisco ↳ tutte

Posto $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ $\delta > 0$:

se $0 < |x - x_0| < \delta$ $x \in D \Rightarrow$

$\Rightarrow l - \varepsilon < f \le g \le h < l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

(perché le x stia in questo intorno bucato di $0 < |x-x_0| < \delta$)

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l$

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log_a}$ $= \left(\frac{0}{0}\right)$

limite di funzione composta per prop. dei log

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) = \lim_{x \to 0} \log_a\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\log_a}$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$ dimostrato prima, cambiamento di variabile

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \log a$ $= \left(\frac{0}{0}\right)$

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$y = e^x - 1 \quad e^x = 1 + y$

$x = \log_e(1+y)$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_e(1+y)} = \frac{1}{\log_e e} = \log a$

sarebbe come $\frac{1}{\frac{1}{y} \cdot \log_e(1+y)}$ (come prima, solo reciproco)

- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ $= \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \cdot \frac{\log\left[1 + (1+x)^\alpha - 1\right]}{\log\left[1 + (1+x)^\alpha - 1\right]} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\log\left[1 + (1+x)^\alpha - 1\right]} \cdot \frac{\alpha \log(1+x)}{x}$

CAMBIO DI VARIABILE

$y = (1+x)^\alpha - 1$

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$

$= \lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)} \cdot \alpha \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha \cdot 1 = \alpha$

$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\log(1+y)} \to 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} \to 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \boxed{\operatorname{sen} x \le x \le \operatorname{tg} x}$ → relazione data da costruzione con circonferenza (relazione tra le aree: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$)

$\Rightarrow 1 \le \frac{x}{\operatorname{sen} x} \le \frac{1}{\cos x}$ (divido per $\operatorname{sen} x$)

(moltiplico per $\cos x$)

$\Rightarrow \cos x \le \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1$ $\quad$ x teo di confronto

per $x \to 0$ è 1

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

poi cambiamento di variabile per sfruttare il già fatto

$x = -y$, se $x \to 0^-$ $\Rightarrow y \to 0^+$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{+\operatorname{sen} y}{+y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ (funz dispari)

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$

RISCRIVO SEMPRE in modo tale da trovare funzioni per cui so quanto vale il limite

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} = \frac{1}{1 + \cos x} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}$

(1^a rel fondamentale; $1 + \cos x \to 2$... $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$)

[Quelle delle funz speciali $\frac{}{x}$
- $\frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$, $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $\Rightarrow$ uguali rispettivamente alle proprie corrispondenti]

- **PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITESIMI**

Siano f, g, f_1, g_1 infinitesimi per $x \to x_0$, f_1 di ordine superiore ad f e g_1 di ordine sup. a g, con $f, g \neq 0$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (perché f_1 tende più veloce a 0 $\Rightarrow$ è di ord sup)

DIM

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} \overset{\text{raccolgo}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 + \frac{f_1(x)}{f(x)}}{1 + \frac{g_1(x)}{g(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\quad$ ($\frac{f_1(x)}{f(x)} \to 0$, $\frac{g_1(x)}{g(x)} \to 0$)

f_1 è trascurabile e f è infinitesimo dominante

- **STIMA ASINTOTICA PRODOTTO di FUNZIONI** (e analogo quoziente)

per $x \to x_0$ $\quad f \sim f_1, \quad g \sim g_1 \Rightarrow f \cdot g \sim f_1 g_1, \quad \frac{f}{g} \sim \frac{f_1}{g_1}$

$$\frac{f \cdot g}{f_1 g_1} = \underbrace{\frac{f}{f_1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{g}{g_1}}_{\to 1} \longrightarrow 1$$

$$\frac{\frac{f}{g}}{\frac{f_1}{g_1}} = \frac{f \cdot g_1}{g \cdot f_1} = \frac{f}{f_1} \cdot \frac{g_1}{g} \to 1$$

- **CONTINUITÀ delle FUNZ. ELEMENTARI**

Es $\lim_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall x_0 > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad D = (0, +\infty)$

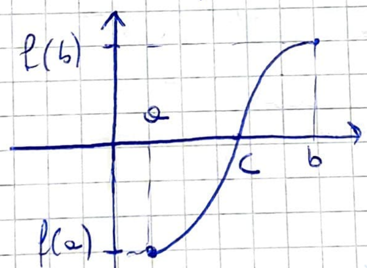
(continuità in tutto il dominio)

DIM) $\lim_{x \to x_0} x^\alpha = \lim_{x \to x_0} e^{\ln x^\alpha} = \lim_{x \to x_0} e^{\alpha \ln x} = \lim_{x \to x_0} e^{\alpha \ln x_0} = x_0^\alpha$

se $x_0 = 0 \quad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim_{x \to 0^+} e^{\alpha \log x} = 0$

- **TEOREMA DEGLI ZERI (METODO di BISEZIONE)**

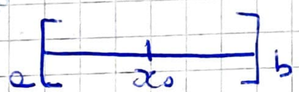
Sia $f \in C^0([a,b])$ se $f(a) \cdot f(b) \leq 0$, allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$



METODO di bisezione: suddividere in intervallini per approssimare sempre meglio c

DIM) (Costruire due successioni che tendono a c, una per eccesso ed una per difetto) fino a trovare c

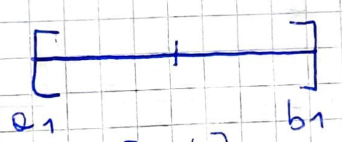
Suppongo che $f(a) < 0 \quad f(b) > 0$ (analogo anche nel caso contrario)



punto medio $x_0 = \frac{a+b}{2} \qquad f(x_0) = ?$

1) $f(x_0) = 0 \Rightarrow c = x_0$ $\quad$ OK = DIMOSTRATO

2) $f(x_0) > 0 \Rightarrow a_1 = a, \quad b_1 = x_0$



(c sta tra a e x_0)

$f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0 \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \qquad [a_1, b_1]$

3) $f(x_0) < 0 \Rightarrow a_1 = x_0 \quad b_1 = b \qquad [a_1, b_1]$ $\quad$ (c sta tra x_0 e b)

$f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0 \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$

ragioniamo sul caso

$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, $f(x_1) = ?$ $[a_1 \quad x_1 \quad b_1]$

1] $f(x_1) = 0 \Rightarrow c = x_1$ ok

2] $f(x_1) > 0 \Rightarrow a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$. $f(a_2) < 0$ $f(b_2) > 0$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ (sostituisco da sopra)

3] $f(x_1) < 0 \Rightarrow a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$

$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

$[a_2, b_2]$ $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ $f(x_2) = ?$ e vado avanti a dividere → (intervalli)

1ª POSSIBILITÀ: $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_{n_0}) = 0 \Rightarrow c = x_{n_0}$

2ª POSSIBILITÀ: $\nexists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $f(x_{n_0}) = 0$

⇒ si generano due successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ legate tra loro $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

PROPRIETÀ:

- $\{a_n\}_n$ è crescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\} = \alpha \in \mathbb{R}$ (per teo ∃ limiti di succ. monotone)
- $\{b_n\}_n$ è decrescente e limitata $\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf\{b_n\} = \beta \in \mathbb{R}$ (sempre per teo)

• $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \lim \frac{b-a}{2^n} = 0$ ($2^n \to +\infty$)

• $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = \beta - \alpha$ $\beta - \alpha = 0 \to \beta = \alpha$ per unicità del limite

GUARDO PROPRIETÀ del punto $\beta = \alpha$ $[a \rightarrow \beta=\alpha \leftarrow b]$

$\{f(a_n)\}_n$ $\{f(b_n)\}_n$

$f(a_n) < 0\ \forall n$ $f(b_n) > 0\ \forall n$ (avevamo scelto noi)

$\begin{cases} \lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha) & \text{per la continuità di } f \text{ (nelle ipotesi)} \\ \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) & \text{teo caratterizz. sequenziale del limite di una funz} \end{cases}$

$\Downarrow$ $f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ e $f(a_n) < 0\ \forall n$ (detto noi) $\Rightarrow f(\alpha) \le 0$ teo perm. del segno

$\begin{cases} \lim_{x\to\beta} f(x) = f(\beta) & \times \text{ continuità di } f \\ \lim_{x\to\beta} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) & \times \text{ caratt seq.} \end{cases}$

$\Downarrow$ $f(\beta) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$ $f(b_n) > 0\ \forall n \Longrightarrow f(\beta) \ge 0$ teo perm segno

$\alpha = \beta = c$ $f(c) \le 0$, $f(c) \ge 0 \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow x = c$ è lo zero cercato

• $D x^n$

$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^+, \ n \geq 2) \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Infatti $D = \mathbb{R}$

(ricordo scomposizione $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b \dots)$)

DIM

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim \underbrace{\frac{(x+h)-x}{h}}_{\to 1} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \dots (x+h) x^{n-2} + x^{n-1} \right]$$

$x^{n-1} \quad x^{n-2} \cdot x = x^{n-1} \quad x^{n-1}$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

• $D x^\alpha$ $\quad f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}, \ \forall x > 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ D = (0, +\infty) \ \forall x > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha}{h} \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1 \right] =$$

stima asintotica $\quad (1+y)^\alpha - 1 \underset{y\to 0}{\sim} \alpha y$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^\alpha}{h} \cdot \alpha \frac{h}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

• $D \operatorname{sen} x$ $\quad f'(x) = \cos x \quad D = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}$$

guardo tra $\operatorname{sen} h \cos x$ / $\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x$ qual è infinitesimo di ordine maggiore?

$\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x$
$= \operatorname{sen} x (\cos h - 1) = \operatorname{sen} x \cdot \left[-(1 - \cos h)\right]$
$= \operatorname{sen} x \left[-\left(\frac{h^2}{2}\right) \right] \rightarrow$ è infinitesimo di 2° ordine (tende più veloce a 0 $\Rightarrow$ lo elimino)

$$= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen} x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\to 1} \right] = \cos x$$

$-\frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{h} = -\frac{h}{2}$

• $D |x|$ $\quad f' = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \neq 0 \\ \nexists \text{ in } x = 0 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

se $x > 0 \quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$

se $x < 0 \quad f(x) = -x \quad f'(x) = -1$

se $x = 0 \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} 1 & \text{se } h \to 0^+ \\ -1 & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$

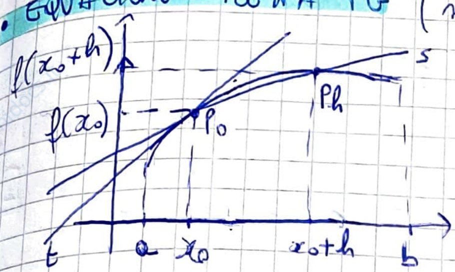
$\Rightarrow \nexists$ derivata di $|x|$ in $x = 0$

• $D a^x$ $\quad f'(x) = a^x \log a \quad a > 0, \ a \neq 1 \quad D = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a$$

$\to$ lim notevole

• EQUAZIONE RETTA TG (significato geometrico derivata)



$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$

$P_0\ (x_0, f(x_0))$ $\quad P_h\ (x_0+h, f(x_0+h))$

s retta secante per P_0 e P_h

$$\frac{x - x_0}{x_0+h-x_0} = \frac{y - f(x_0)}{f(x_0+h) - f(x_0)}$$

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

$$\boxed{y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)} \text{ retta s}$$

$\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leftarrow$ coeff ang di s

poi retta s cambia pendenza fino a sovrapporsi a retta t (tipo equazione limite di s) $(P_h \to P_0)$

$$t: y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow \text{retta tg}$$

$$\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\right)$$

• RAPPORTO TRA CONTINUITÀ e DERIVABILITÀ

Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0

DIM: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x) + f(x_0) - f(x_0)] =$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + f(x_0)\right] = f(x_0)$$

per ipotesi $\exists f'(x_0)$

VICEVERSA NON VALE

• DERIVATA di arctg x $= \dfrac{1}{1+x^2}$

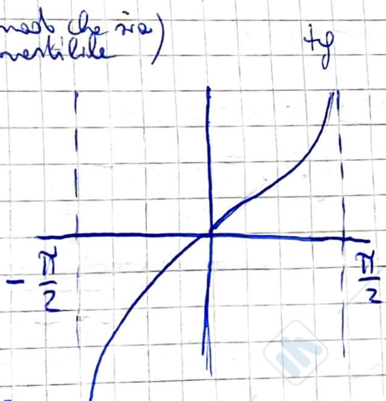
(definita in modo che sia invertibile)

$y = f(x) = tg\, x \qquad f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

IPOTESI

1) $f \in C^0\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ 2) invertibile

3) $D\, tg\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\Rightarrow$ dal teorema di derivazione della funzione inversa

$arctg\, x: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ (suo dominio)

$$D\, arctg = \left.\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}\right|_{x = arctg\, y} = \left.\frac{1}{\frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x}}\right|_{x = arctg\, y} = \left.\frac{1}{1 + tg^2 x}\right|_{x = arctg\, y} = \frac{1}{1+y^2}$$

derivata dal teorema $f^{-1}(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

$$D\, arctg\, x = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

• TEOREMA di FERMAT

$f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$. Se x_0 è un punto di estremo (locale) $\Rightarrow$ x_0 è CRITICO (cioè $f'(x_0)=0$)

DIM Sia (per esempio) x_0 un punto di max locale $\overset{\text{x definiz.}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \delta_0 > 0$ tale che

$f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

- se $x \in (x_0 - \delta_0, x_0) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

f è derivabile in x_0

per il teor di permanenza del segno: $f'_-(x) = f'(x_0) \geq 0$

- se $x \in (x_0, x_0+\delta_0) \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) = f'(x_0)$

f è derivabile

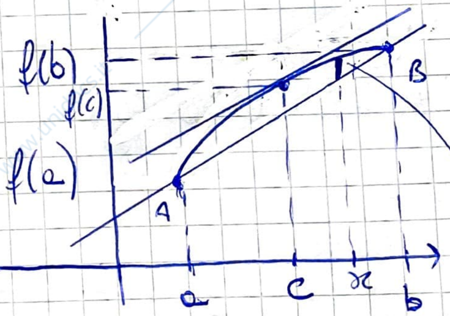
per il teor di permanenza del segno: $f'_+(x_0) = f'(x_0) \leq 0$

$f'(x_0) \geq 0$, $f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \rightarrow$ è critico

• TEOREMA di LAGRANGE (detto anche teo del valor medio)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^0([a,b])$, f derivabile in (a,b), allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

retta x $f(c)$ // retta x AB



DIM introduco funz ausiliaria

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

$y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \longleftarrow$ retta per A e B

$g \in C^0([a,b])$, g è derivabile in (a,b) $\Rightarrow$ ha lo stesso valore agli estremi dell'intervallo

$g(a) = f(a) - f(a) = 0 \qquad g(b) = f(b) - f(a) - [f(b)-f(a)] = 0$

$\Rightarrow$ Verificate le ipotesi di teo di Rolle $\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ tale che $g'(c) = 0$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$; $g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$\Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

• **TEOREMA: FORMULA TAYLOR ARRESTATA AL SECONDO ORDINE, centro x_0, resto secondo PEANO)**

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile 2 volte in $x_0 \in (a,b)$. Posto:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

risulta che $f(x) = T_2(x) + o((x-x_0)^2)$, per $x\to x_0$

DIM Provare che $f = T_2 + o((x-x_0)^2)$ per $x\to x_0$ equivale a provare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0$$ uso definizione di "o piccolo"

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

dell' (H)

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

(lim delle derivate)

(NON POSSO PIÙ USARE de l'H, perché f è garantita da ipotesi derivabile solo 2 volte)

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}}_{\text{è rapporto incrementale della } f'} - f''(x_0)\right] = \frac{1}{2}\left[f''(x_0)-f''(x_0)\right] = 0$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \implies f(x) = T_2(x) + o((x-x_0)^2)$$ per $x\to x_0$

• **TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE dell'INSIEME delle PRIMITIVE di f)**

Sia f è integrabile in senso indefinito su $I\subseteq\mathbb{R}$ e sia F una sua primitiva.

Allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni

$$F(x)+c,\quad \forall c\in\mathbb{R}$$

DIM

1) $\frac{d}{dx}(F(x)+c) = f(x)$, $\forall c \implies$ tutte le funzioni $F(x)+c$ sono primitive

☐ SIAMO SICURI che tutte le primitive abbiano questa forma?

2) Sia $G = G(x)$ una qualunque primitiva di f in I

$G'(x) = f(x)$ in I, $F'(x) = f(x)$ in I $\implies G'(x) - F'(x) = 0$ $\forall x \in I$

$\implies (G-F)'(x) = 0$ $\forall x \in I \implies \exists$ una costante $c \in \mathbb{R}$

tale che $(G-F)(x) = c$ $\forall x$

$\implies G(x) = F(x) + c$ $\forall x \in I$

PRIMO
- **TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE**

Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $\quad x \in [a,b]$. Allora:

F è derivabile in (a,b) e risulta $\boxed{F'(x) = f(x)}$, $\forall x \in (a,b)$.

Inoltre $F'_+(a) = f(a)$, $\quad F'_-(b) = f(b)$ $\to$ in cui f è definita

DIM Sia $x \in (a,b)$ e $h \in \mathbb{R}$ tale che $x+h \in (a,b)$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

oppure $f \in C^0([x+h, x]) \to$ a seconda se h sia positivo o negativo

$f \in C^0([a,b]) \Rightarrow f \in C^0([x, x+h])$;

per il teorema della media integrale,

$\exists\, c = c(h)$ tale che $x < c < x+h$ o $x+h < c < x$ e

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h\, f(c(h))$$

rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{h \cdot f(c(h))}{h} = f(c(h)) \qquad x < c < x+h \text{ oppure } x+h < c < x$$

$\lim_{h \to 0} c(h) = x$ per compressione

per continuità di f

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c(h)) = f(x)$$

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$, $\quad \forall x \in (a,b)$

- **FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**

(esempio di sicuro per il primo teo)

Sia $f \in C^0([a,b])$ e sia $P = P(x)$ una sua primitiva in $[a,b]$

Allora $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a)}$

DIM Poiché $f \in C^0([a,b])$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$ è una primitiva di f (per il 1° teor del calc. int)

Per la caratt delle primitive

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$ tale che $P(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)\,dt + c$, $\forall x \in [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} P(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c \\ P(a) = +c \end{array}\right\} \to P(b) - P(a) = \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = P(b) - P(a)$$