$x \to 1$ $\quad \text{arctg}(\text{sen}(x^2-1)) \sim \text{sen}(x^2-1) \sim x^2-1 \sim 2(x-1)$

$(x-1)(x+1)$ è P.P. $\quad (x-1) \cdot 2$

DISCONTINUITÀ

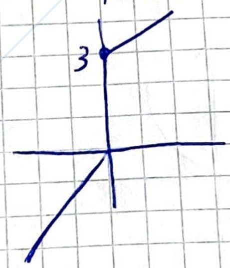
Classificazione

Def $f: D \to \mathbb{R}$ e $\boxed{x_0 \in D}$, si dice che f è discontinua in x_0, se f non è continua in x_0.

Precisamente

1) se esistono finiti $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$, $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$, si dice che f ha una **DISCONTINUITÀ di 1ª SPECIE (o salto)** in x_0: il salto è $f(x_0^+) - f(x_0^-)$

Es. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ $\quad f(0^-) = 0, \; f(0^+) = 3$

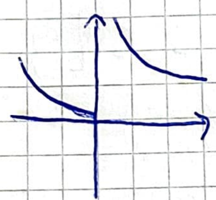


$x = 0$ è un punto di discontinuità di 1ª specie

2) se almeno uno dei due limiti $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ $\nexists$ oppure è infinito, si dice che f ha una discontinuità di **2ª SPECIE** in x_0

Es. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$

in 0



$f(0^+) = +\infty$, $f(0^-) = 0 \longrightarrow x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di 2ª specie

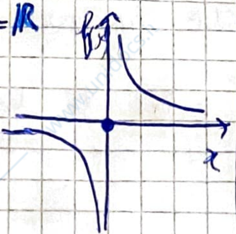
3) se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $l \neq f(x_0)$, si dice che f ha una discontinuità di terza specie (**3ª SPECIE**) (o eliminabile) in x_0

Es. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg}\,x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ $\quad f(0) = 2, \quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\text{tg}\,x}{x} = 1 \neq f(0)$

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg}\,x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ $\quad \tilde{f}$ continua in $x_0 = 0$

PARLO di DISCONTINUITÀ del punto se il punto $\in$ Dominio

<u>OSS</u> $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}$

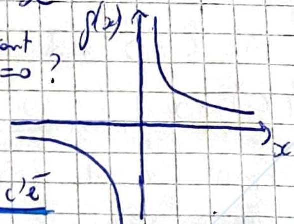


f è discontinua in $x_0 = 0$? SÌ

DISCONTINUITÀ di 2ª specie

$g(x) = \frac{1}{x}$ $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

g è discont. in $x_0 = 0$?



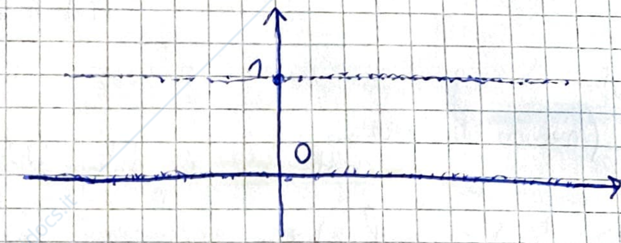
in 0 la funz non c'è

POSSO SOLO DIRE $g \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

NON POSSO PARLARE DI DISCONTINUITÀ (che è proprietà di una funz.) di una funzione laddove NON È DEFINITA

Es FUNZ di DIRICHLET

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



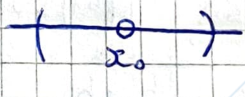
$D(f) = \mathbb{R}$

$\nexists \lim_{x \to x_0^+} f(x), \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

f è definita ovunque ma discontinua in $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

ovunque

PROLUNGAMENTO PER CONTINUITÀ di UNA FUNZIONE



Def

Sia f definita in un intorno I di x_0, tranne x_0. Se esiste finito il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

allora la funzione $\bar{f}$ definita da $\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in I / \{x_0\} \\ l, & \text{se } x = x_0 \end{cases}$

è detta PROLUNGAMENTO per CONTINUITÀ di f in x_0

Infatti: $\lim_{x \to x_0} \bar{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = l = \bar{f}(x_0) \Rightarrow \bar{f}$ è continua in x_0

Es $f(x) = x \lg|x|$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f dispari

$\lim_{x \to 0^+} x \lg x = 0$, $\lim_{x \to 0^-} x \lg|x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} x \lg|x| = 0$

$\bar{f}(x) = \begin{cases} x \lg|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{f} \in C^0(\mathbb{R})$, $\bar{f}$ prolungamento per continuità di f in $x_0 = 0$

La stima asintotica della retta tg

eq retta tg: $y = \underline{k(x - x_0)}$

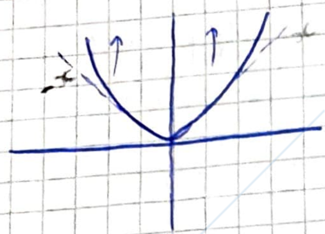
Es $f(x) = x^2 - 1$, $x \to 1$ $\quad f(x) \sim 2(x-1)$ $\quad y = 2(x-1)$ ← retta tg al grafico

Es $h(x) = |x| + 2x^2$ per $x \to 0$; $\quad h(x) \sim |x|$

$h(x) \geq |x|$

visto che è $|x| + 2x^2$ ⟹ è qualcosa in più di $|x|$

⟹ Concavità per forza verso l'alto (funz sta al di sopra)



DERIVATE LATERALI

(indebolisce il concetto di derivata)

Def. Sia $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ e sia $h > 0$ tale che $a + h \in [a, b)$. Si dice che f è derivabile a destra in $x = a$ se esiste finito il $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

In tal caso, il limite è detto "derivata destra" di f in a e lo si indica con il simbolo $f'_+(a)$.

(non posso dare incremento negativo)

Dunque $f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Def Sia $f: (a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $h < 0$ t che $b + h \in (a, b]$.

Si dice che f è derivabile a sinistra in $x = b$ se esiste finito il $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$. In tal caso il limite è detto "derivata sinistra" di f in b e lo si indica con il simbolo $f'_-(b)$

RELAZIONE TRA DERIVATA e DERIVATE LATERALI

Prop Sia I un intervallo aperto e $x_0 \in I$. Sia $f: I \to \mathbb{R}$. Allora la funz f è derivabile in x_0 $\overset{\text{se e sol se}}{\iff}$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ (e in questo caso sono uguali anche al valore della derivata)

$$\left(f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \right)$$

Def Sia $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che f è derivabile in $[a, b]$ (chiuso) se f derivabile in (a, b) (aperto → posso fare rapp. incr.) e se esistono (finite) $f'_+(a)$, $f'_-(b)$