

INSIEMI NUMERICI

dim) IRRAZIONALITÀ DI $\sqrt{2}$

• TEOREMA: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

• LEMMA: $\forall m \in \mathbb{N}$; SE m È DISPARI; ALLORA m^2 È DISPARI

dim. LEMMA: $m = 2k + 1$; $k \in \mathbb{N}$

$$m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \rightarrow \text{E' DISPARI!!}$$

• DIMOSTRAZIONE: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = p/q \rightarrow p, q$ RIDOTTI AI MINIMI TERMINI (con $p, q > 0$)
(per emendo)

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot q = p \rightarrow (\sqrt{2} \cdot q)^2 = (p)^2 \rightarrow 2q^2 = p^2 \rightarrow p^2 \text{ E' PARI, PERUO' ANCHE } p \text{ E' PARI, E PERUO' SI PUO' SCRIVERE } p = 2k; k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \rightarrow q^2 = 2k^2 \rightarrow q^2 \text{ E' PARI; PERUO' ANCHE } q \text{ E' PARI; SEGUE:}$$

$\Rightarrow p$ E q HANNO 2 COME DIVISORE COMUNE (emendo entrambi fuori), PERUO' NON SONO AI MINIMI TERMINI
(ASSURDO!!)

• OSSERVAZIONE: $0, \bar{9} = 1$

$$\text{dim. : } x = 0, \bar{9} \rightarrow 10x = 9, \bar{9} \rightarrow 9x = 10x - x \rightarrow 9x = 10x - 0, \bar{9} \rightarrow 9x = 9 \rightarrow x = 1$$

PRINCIPIO DI INDUZIONE: VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE UNA PROPRIETÀ $P(n)$ VALGA PER OGNI $n \geq n_0$

I) DIMOSTRO CHE VALGA $P(n_0)$ [LA PROPRIETÀ NEL PUNTO INIZIALE]

II) ASSUMO CHE $P(n)$ SIA VERA [IPOTESI INDUTTIVA]

III) DEVO DIMOSTRARE CHE $P(n+1)$ SIA VERA

\Rightarrow SE CI RIESCO SEGUE CHE $P(n)$ È VERIFICATA $\forall n \geq n_0$

esempio: $\sum_{m=1}^n m = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

I) SONNO PARTENDO DA $n=1$

$$P(1) = \sum_{m=1}^1 m = 1 \rightarrow n=1 \quad \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

II) SUPONGO L'IPOTESI INDUTTIVA

III) DEVO DIMOSTRARE $P(n+1)$ OVVERO $\sum_{m=1}^{n+1} m = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{m=1}^{n+1} m \Rightarrow \sum_{m=1}^n m + (n+1)$$

$$(1) \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ PER L'IPOTESI INDUTTIVA}$$

$$(2) \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

INSIEME LIMITATO = UN INSIEME $E \subseteq X$ SI DICE LIMITATO SE C'È ALMENO UN MAGGIORANTE E ALMENO UN MINORANTE; OSSIA SE È LIMITATO SUPERIORMENTE ED INFERIORMENTE

(1) SUPERIORMENTE = $\exists M \in X : \forall x \in E ; M \geq x$ [M SE ESISTE SI DICE MAGGIORANTE DI E]

(2) INFERIORMENTE = $\exists m \in X : \forall x \in E ; m \leq x$ [m SE ESISTE SI DICE MINORANTE DI E]

MASSIMO/MINIMO = (1) MASSIMO = \bar{x} SI DICE MASSIMO DI E SE: $\forall \bar{x} \in E$
 $\exists \bar{x}$ E' MAGGIORANTE DI E

(2) MINIMO = \underline{x} SI DICE MINIMO DI E SE: $\forall \underline{x} \in E$
 $\exists \underline{x}$ E' MINORANTE DI E

ESTREMO SUP./INF. = (1) SUPERIORE = DEFINIAMO ESTREMO SUPERIORE [$\text{Sup} E$] IL MINIMO DEI MAGGIORANTI

(2) INFERIORE = DEFINIAMO ESTREMO INFERIORE [$\text{Inf} E$] IL MASSIMO DEI MINORANTI

dim) DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE = $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x| + |y|$

dim) DATE LE SEGUENTI RELAZIONI: $-|x| \leq x \leq |x| ; -|y| \leq y \leq |y|$

SOMMANDO MEMBRO A MEMBRO OTTENGO: $-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

DA CUI SEGUE CHE PER $\forall a \geq 0 : |x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$\implies |x+y| \leq |x| + |y|$

NUMERI COMPLESSI

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE (COMPLESSI) = $|z_1 - z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

dim) $(|z_1 - z_2|)^2 \leq |z_1 + z_2| \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. PONENDO $z_1 = a+bi ; z_2 = c+di$ OTTENGO CHE:

$$(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2})^2 \leq (a+c)^2 + (b+d)^2 \leq (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2 =$$

$$= -\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} \leq ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$$

ossia: $|ac+bd| \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}$

ELEVO AL QUADRATO: $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) =$

$$= a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 =$$

$$= (ad-bc)^2 \geq 0$$

dim) FORMULE DI DE-MOIVRE = $z^m = \rho^m (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta))$

(1) PRODOTTO = $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
DILATAZIONE ROTAZIONE (IN SENSO ANTICLOCKWISE)

dim) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) =$
 $= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2)$
 \rightarrow APPLICO FORMULE ADDIZIONE DEL SENO E DEL COSENO
 $= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$

(2) RAPPORTO = $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$ C.E. $z_2 \neq 0$
ROTAZIONE (IN SENSO ORARIO)

dim) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{\rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \cdot \frac{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)} =$ [RAZIONALIZZAZIONE]
 $= \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{\rho_2 (\cos^2 \theta_2 - i^2 \sin^2 \theta_2)} =$
 $= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

dim) RADICI M-ESIME = SIA $w \in \mathbb{C}; w \neq 0 ; E \in \mathbb{N}; m \geq 1$. ESISTONO PRECISAMENTE M RADICI M-ESIME COMPLESSE $z_0; z_1; \dots; z_{m-1}$ DI W; POSTO $w = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ E $z_k = \rho^{1/m} (\cos \theta_k + i \sin \theta_k)$ ABBIAMO:

$$\rho_k = \rho^{1/m} \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{m} ; k = 0, 1, \dots, m-1$$

$$\text{PERUO': } z_k = \rho^{1/m} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{m} \right)$$

esempio: $z^6 = w = 1 = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) ; \varphi = 0$

$$\rho_k = (1)^{1/6} \quad \theta_k = \frac{0 + 2k\pi}{6} = \frac{2k\pi}{6}$$

$$\implies z_k = (1) \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right)$$

OSSERVAZIONE: DA RADICI M-ESIME DI W SI TROVANO I VERTICI DI UN POLIGONO REGOLARE DI M-LATI CON CENTRO INSCRITTO IN UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO O E RAGGIO ρ

TEOREMA FONDAMENTALE ARITMETICA = UNA EQUAZIONE POLINOMIALE DELLA FORMA $a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m = 0$ ($a_m \neq 0$) HA ESATTAMENTE m -SOLUZIONI COMPRESSE, SE OGNIUNA DI ESSE VIENE CONTATA CON LA SUA MOLTEPLICITA'

OSSERVAZIONE: $z^5 = |z| \rightarrow 4$ SOLUZIONI \rightarrow NON E' EQUAZIONE ALGEBRICA

FUNZIONI

(1) INIETTIVA = $f: D \rightarrow C$

$\forall x_1, x_2 \in D; x_1 \neq x_2; f$ E' INIETTIVA SE $f(x_1) \neq f(x_2)$

(2) SURIETTIVA = $f: D \rightarrow C$

f SI DICE SURIETTIVA SE $f(D) = C$
 $\forall y \in C \exists$ ALMENO UN $x \in D$ t.c. $f(x) = y$

(3) BIUNIVOCA = SE E' INIETTIVA E SURIETTIVA

FUNZIONI LIMITATE = (1) SUPERIORMENTE = SE L'IMMAGINE E' LIMITATA SUP.

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \forall x \in D$

(2) INFERIORMENTE = SE L'IMMAGINE E' LIMITATA INF.

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq m \forall x \in D$

(3) LIMITATA = SE LIMITATA SUP. // INF.

$\Rightarrow \exists M, m \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \forall x \in D$

FUNZIONI REALI MONOTONE: (1) CRESCENTE = f SI DICE MONOTONA CRESCENTE SE $\forall x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(2) DECRESCENTE = f SI DICE MONOTONA DECRESCENTE SE $\forall x_1, x_2 \in D; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

LIMITI

TEOREMA: ESISTENZA E UNICITA' DEL LIMITE = SE $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l; c, l \in \mathbb{R}' \Rightarrow \exists l$ E TALE LIMITE E' UNICO

TEOREMA: PERMANENZA DEL SEGNO = SIA $f(x)$ DEFINITA IN $V(c)$ t.c. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$

$\Rightarrow \text{II } l > 0 \Rightarrow \exists V(c)$ t.c. $\forall x \in V(c); x \neq c \Rightarrow f(x) > 0$

$\text{III } l < 0 \Rightarrow \exists \tilde{V}(c)$ t.c. $\forall x \in \tilde{V}(c); x \neq c \Rightarrow f(x) < 0$

COROLLARIO: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ E $f(x) \geq 0 \forall x \in V(c); x \neq c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$

OSSEVAZIONE: $l = 0$ NON POSSO DIRE NULLA DEL SEGNO DELLA FUNZIONE

TEOREMA: MONOTONIA DEL LIMITE = SIANO $f(x)$ E $g(x)$ DEFINITE IN UN INTORNO DI c ; SE $f(x) \leq g(x) \forall x \in V(c)$ ED
 $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ E $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$

FUNZIONE INFINITESIMA = f SI DICE INFINITESIMA PER $x \rightarrow c$ SE $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

OSSEVAZIONE: SE f INFINITESIMA PER $x \rightarrow c$; $|f(x)|$ E' INFINITESIMA PER $x \rightarrow c$

dim) COROLLARIO: IL LIMITE DI UNA FUNZIONE CHE TENDE A ZERO MOLTIPLICATA PER UNA FUNZIONE LIMITATA ESISTE E VALE ZERO

- PREPOSIZIONE: I) SIA $h(x)$ INFINITESIMA PER $x \rightarrow c$
- II) SIA $g(x)$ LIMITATA IN UN INTORNO DI c
- $\Rightarrow h(x) \cdot g(x)$ E' INFINITESIMA PER $x \rightarrow c$

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = 0$ [PER DEFINIZIONE]

$g(x)$ LIMITATA $\sim \exists M > 0$ t.c. $|g(x)| \leq M \forall x \in U(c)$

CONSIDERO $|h(x) \cdot g(x)| = |h(x)| \cdot |g(x)|$; MA $|g(x)| \leq M$

$\Rightarrow |h(x)| \cdot |g(x)| \leq |h(x)| \cdot M$

PERUO': $\lim_{x \rightarrow c} |h(x) \cdot g(x)| = \lim_{x \rightarrow c} |h(x)| \cdot M = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} h \cdot g = 0$

TEOREMA DEL CONFRONTO = SIA $f(x); g(x); h(x)$ DEFINITE IN UN INTORNO DI c ; $c \in \mathbb{R}^*$ t.c. $\forall x \in U(c); x \neq c$; SI HA $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE PER FUNZIONI MONOTONE = SIA $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ MONOTONA

$\forall c \in (a; b)$ ESISTONO FINITI I LIMITI: $\lim_{x \rightarrow c^-} f$ E $\lim_{x \rightarrow c^+} f$

INOLTRE \exists , MA NON PER FORZA FINITI, I LIMITI NEGLI ESTREMI: $\lim_{x \rightarrow a^+} f$ E $\lim_{x \rightarrow b^-} f$

LIMITI NOTEVOLI = (1) SENO: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} = 1$

dim) $\frac{\sin \delta}{\delta}$ E' PARI $\left(\frac{\sin -\delta}{-\delta} = \frac{-\sin \delta}{-\delta} = \frac{\sin \delta}{\delta} \right)$

\Rightarrow CONSIDERO SOLO IL CASO $\delta > 0$

$\left(\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \delta}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \delta}{\delta} \right)$

AREA $\triangle OAB \leq$ AREA $\widehat{OAB} \leq$ AREA $\triangle OBC$

OSSIA

$\frac{1 \cdot \sin \delta}{2} \leq \frac{1 \cdot \delta}{2} \leq \frac{1 \cdot \tan \delta}{2}$

$= \sin \delta \leq \delta \leq \frac{\sin \delta}{\cos \delta}$

DIVIDO PER $\sin \delta$: $1 \leq \frac{\delta}{\sin \delta} \leq \frac{1}{\cos \delta}$

PASSO AGLI INVERSI: $1 \geq \frac{\sin \delta}{\delta} \geq \cos \delta$

FACCIO I LIMITI: $\lim_{\delta \rightarrow 0} 1 \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos \delta$

\Rightarrow PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO LA TESI E' VERIFICATA

(2) COSENO: $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \delta}{\delta^2} = \frac{1}{2}$

dim) $\frac{1 - \cos \delta}{\delta^2} \cdot \frac{1 + \cos \delta}{1 + \cos \delta} = \frac{\overbrace{1 - \cos^2 \delta}^{\sin^2 \delta}}{\delta^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \delta} =$

$= \frac{\sin^2 \delta}{\delta^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos \delta} = \left(\frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \delta}$

$\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos \delta} = \frac{1}{2}$

ASINTOTICO = SI DICONO CHE DUE FUNZIONI $f; g$ SONO ASINTOTICHE SE $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

(esempio: $x \rightarrow 0$)

- $\sin x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$
- $\log(1+x) \sim x$
- $e^x - 1 \sim x$

GERARCHIA DEGLI INFINITI = (1) OGNI POTENZA DI x PREVALE SU OGNI POTENZA DI $\log x$ (POSITIVA)

(2) QUALUNQUE ESPONENZIALE DI x PREVALE SU QUALUNQUE POTENZA DI x (BASE > 1)

SUCCESSIONI

SUCCESSIONE = (1) CONVERGENTE = DICIAMO CHE UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ È CONVERGENTE SE ESISTE UN NUMERO $l \in \mathbb{R}$ CON LA SEGUENTE PROPRIETÀ

$$\Rightarrow \text{QUALUNQUE SIA } \varepsilon > 0 \text{ RISULTA: } |a_n - l| < \varepsilon ; \forall n \geq N$$

$$(\text{SE } \exists l \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 = N_0(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$$

(2) DIVERGENTE = DICIAMO CHE UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}$ È DIVERGENTE A $+\infty$ SE $\exists M > 0$ t.c. $\exists N_0 = N_0(M)$ t.c. $\forall n > N_0$ SI HA $a_n > M$ ($a_n < -M$) DEFINITIVAMENTE

dim)

TEOREMA ESISTENZA E UNICITÀ DEL LIMITE = SE $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow l$ È UNICO

DIMOSTRAZIONE: PER ASSURDO SUPONGO CHE a_n TENDE A 2 LIMITI l_1, l_2 ($l_1 \neq l_2$)

CASI) \perp $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{0,1} = N_{0,1}(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall n \geq N_{0,1} \text{ SI HA: } |a_n - l_1| < \varepsilon$$

$$\perp\perp) l_1 \in \mathbb{R}^*; l_2 = \pm \infty$$

$$\perp\perp\perp) l_1 = +\infty; l_2 = -\infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_{0,2} = N_{0,2}(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall n \geq N_{0,2} \text{ SI HA: } |a_n - l_2| < \varepsilon$$

$$\bar{N} = \max\{N_{0,1}; N_{0,2}\} \Rightarrow |a_n - l_1| < \varepsilon \text{ E } |a_n - l_2| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE: } |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow |l_1 - l_2| < 2\varepsilon \Rightarrow l_1 = l_2 \text{ È ASSURDO}$$

dim)

TEOREMA PERMANENZA DEL SEGNO PER SUCCESSIONI = SIA $\{a_n\}$; $n \in \mathbb{N}$; UNA SUCCESSIONE, SUPPONIAMO CHE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l; l > 0$$

$$\Rightarrow \exists M_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq M_0 \text{ SI HA } a_n > 0$$

DIMOSTRAZIONE: PER DEFINIZIONE DI LIMITE DI SUCCESSIONE ABBIAMO:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists M_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq M_0 \text{ SI HA } |a_n - l| < \varepsilon$$

$$|a_n - l| < \varepsilon \rightsquigarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \rightarrow \text{PRENDENDO QUINDI } \varepsilon = \frac{l}{2} \text{ ALLORA } l - \varepsilon = \frac{l}{2}$$

$$\Rightarrow a_n \geq \frac{l}{2} > 0 \quad \forall n \geq M_0$$

COROLLARIO: SIA $\{a_n\}$; $n \in \mathbb{N}$; UNA SUCCESSIONE, SE LA SUCCESSIONE È DEFINITA POSITIVA ALLORA: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 0$
(CIOÈ LIMITE DI UNA SUCCESSIONE NON PUÒ ESSERE NEGATIVO)

dim)

TEOREMA DEL CONFRONTO PER SUCCESSIONI = SIANO $\{a_n\}$; $\{b_n\}$; $\{c_n\}$ TRE SUCCESSIONI REALI, TALI CHE:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\text{SUPPONIAMO CHE } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

DIMOSTRAZIONE: PER IPOTESI SIA $\{a_n\}$ CHE $\{c_n\}$ CONVERGE A $l \in \mathbb{R}$. DI CONSEGUENZA, PER DEFINIZIONE DI LIMITE, RISULTA CHE FISSATO $\varepsilon > 0$ ESISTONO $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ TALI CHE:

$$|a_n - l| < \varepsilon ; \forall n > M_1 \Leftrightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \quad \forall n > M_1$$

$$|c_n - l| < \varepsilon ; \forall n > M_2 \Leftrightarrow l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon \quad \forall n > M_2$$

DEFINIAMO $N = \max\{M_1, M_2\}$; ALLORA PER $n > N$ SI HA CHE:

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon \leq b_n \leq l + \varepsilon \quad \forall n > N \Leftrightarrow |b_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > N ; \text{ OSSIA: } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

dim)

TEOREMA ESISTENZA DEL LIMITE = SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE. ALLORA ESISTE $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ PER SUCCESSIONI MONOTONE

ESPLICITAMENTE: I) SE $\{a_n\}$ E' SUP. LIMITATA \Rightarrow CONVERGE
 II) SE $\{a_n\}$ E' SUP. ILLIMITATA \Rightarrow DIVERGE

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO CHE ESISTA LA SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE $a_{n+1} \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

\rightarrow SICURAMENTE L'ESTREMO SUPERIORE ESISTE E PUO' ANCHE ESSERE FINITO: $\sup \{a_n\} = M \in \mathbb{R}$ OPPURE $\sup \{a_n\} = +\infty$

2 CASI: I) CASO FINITO

$$\sup \{a_n\} = M \in \mathbb{R} \equiv \forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad M - \epsilon \leq a_n \leq M$$

\rightarrow CONSIDERANDO PERO' CHE LA SUCCESSIONE E' MONOTONA CRESCENTE $a_n > a_{n-1} \forall n > \bar{n}$

CONCLUSIONE: E' POSSIBILE AGGIUNGERE $\forall n > \bar{n}$ NELLA DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE E SI ARRIVA A SCRIVERE:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, M - \epsilon < a_n \leq M \quad \forall n > \bar{n}$$

CHE CORRISPONDE CON LA DEFINIZIONE DI LIMITE

\rightarrow PERO' $\sup \{a_n\} = M$ E LA SUCCESSIONE E' MON. CRESC.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n\} = M$$

II) CASO INFINITO

$$\sup \{a_n\} = +\infty \equiv \forall H > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad a_n > H$$

\rightarrow CONSIDERANDO PERO' CHE LA SUCCESSIONE E' MONOTONA CRESCENTE $a_n > a_{n-1} \forall n > \bar{n}$ POSSIAMO CONCLUDERE CHE E' POSSIBILE AGGIUNGERE $\forall n > \bar{n}$ NELLA DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE E SI ARRIVA A SCRIVERE $\forall H > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad a_n > H$ CHE CORRISPONDE CON LA DEFINIZIONE DI LIMITE

CONCLUSIONE: $\sup \{a_n\} = +\infty$ E LA SUCCESSIONE E' MON. CRESC.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n\} = +\infty$$

SUCCESSIONE MONOTONA = SIA $\{a_n\}$ UNA SUCCESSIONE MONOTONA ^{INCRESCENTE} DECRESCENTE E SUPERIORMENTE LIMITATA. ALLORA $\{a_n\}$ E' CONVERGENTE E IL SUO LIMITE E' UGUALE A: (1) $\sup \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$
 (2) $\inf \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$

CONTINUITA'

FUNZIONE CONTINUA = $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ SI DICE CONTINUA IN $x=c$ SE \exists FINITO $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

$$\text{OSSIA: } f \text{ E' CONTINUA} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f = \lim_{x \rightarrow c} f = f(c) \text{ [FINITO]}$$

PUNTI DI DISCONTINUITA' = (1) PRIMA SPECIE: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ [FINITO]

(2) SECONDA SPECIE: \exists A.V. IN $x=c$ OPPURE ALMENO UNO DEI DUE LIMITI NON ESISTE

(3) ELIMINABILE: $\exists \lim_{x \rightarrow c^+} f$ E $\lim_{x \rightarrow c^-} f$ [FINITO]; MA $\lim_{x \rightarrow c} f \neq f(c)$ [0 $f(c)$ NON E' DEFINITO]

TEOREMA CONTINUITA' FUNZIONE INVERSA = $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow f$ E' INVERTIBILE $\Leftrightarrow f$ E' STRETTAMENTE MONOTONA
 [IN TAL CASO f^{-1} E' CONTINUA E STRETTAMENTE MONOTONA]

dim)

TEOREMA: CONTINUITA' FUNZIONI COMPOSITE = SIA f CONTINUA IN x_0 ; g CONTINUA IN $f(x_0) \Rightarrow g \circ f$ E' CONTINUA IN x_0

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow f(x_0)} g(t) = g(t_0) = g(f(x_0))$ [$t_0 = f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$]

\rightarrow RISOLVO TRAMITE CAMBIO DI VARIABILE

CONSEGUENZA: $e^{\sin(\frac{x+1}{x^2+5})}$ CONTINUA SU \mathbb{R} D: $\sin e^x \geq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin e^x} \text{ CONTINUA SU } \mathbb{D}$$

dim)

TEOREMA ESISTENZA DEGLI ZERI = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f CONTINUA SU $[a; b]$ CHIUSO E LIMITATO; CON $f(a) \cdot f(b) < 0$
 $\Rightarrow \exists c \in (a; b)$ t.c. $f(c) = 0$

DIMOSTRAZIONE: CONSIDERO UNA FUNZIONE $f(x)$ CONTINUA IN $[a; b]$

AGLI ESTREMI $f(x)$ PRESENTA SEGNO DISCORDE: $f(a) < 0$ v $f(b) > 0$

\Rightarrow CONSIDERO IL PUNTO c A METÀ DELL'INTERVALLO: $c = \frac{a+b}{2}$

2 CASI: I) $f(c) > 0 \Rightarrow$ LA FUNZIONE HA UN SEGNO DISCORDE RISPETTO AD $f(a) < 0$

· CONSIDERO L'INTERVALLO $[a_1; b_1] = [a; c]$ E CERCO PUNTO MEDIO: $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$

II) $f(c) < 0 \Rightarrow$ LA FUNZIONE HA UN SEGNO DISCORDE RISPETTO AD $f(b) > 0$

· CONSIDERO L'INTERVALLO $[c; b] = [a_1; b_1]$ E CERCO PUNTO MEDIO: $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$

\rightarrow RIPETO L'OPERAZIONE FINCHE NON OTTENDO $f(c) = 0$

COSÌ FACENDO HO OTTENUTO TRE SUCCESSIONI $a_m; b_m; c_m$

FIN QUANDO $f(c) \neq 0$ IL SEGNO DELLA FUNZIONE È: (1) $f(a_m) < 0$

(2) $f(b_m) > 0$

DOPO OGNI INTERAZIONE LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO $[a_m; b_m]$ SI DIMEZZA E, DI CONSEGUENZA, DOPO m INTERAZIONI LA LUNGHEZZA DELL'INTERVALLO È $b_m - a_m = \frac{b-a}{2^m}$

CONSIDERAZIONI: (1) a_m È SICURAMENTE CRESCENTE (PERCHÉ $a_1 < a_2 < \dots < a_m$)

+
LIMITATA (CONTENUTA IN $[a; b]$)

\Rightarrow X TEOREMA DEL LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE ($\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = x_0$)
 LA SUCCESSIONE a_m HA UN LIMITE FINITO x_0

(2) b_m HA LIMITE UGUALE AD a_m PERCHÉ $\frac{b-a}{2^m} \rightarrow 0 \Rightarrow \left(\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = x_0 \right)$

\rightarrow LA SUCCESSIONE a_m È UN'APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO DI x_0 MENTRE LA SUCCESSIONE b_m È UN'APPROSSIMAZIONE PER ECCESSO DI $x_0 \Rightarrow a_m \leq x_0 \leq b_m$

$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(a_m)$
 $f(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(b_m)$

TUTTAVIA LA PRIMA È UN'APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO MENTRE LA SECONDA PER ECCESSO; PERCIÒ, SAPENDO CHE $f(a_m) \leq 0$ v $f(b_m) \geq 0$:

$f(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(a_m) \leq 0$

$f(x_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(b_m) \geq 0$

\Rightarrow IL VALORE DELLA FUNZIONE $f(x_0)$ DEVE ESSERE UGUALE A ZERO

PTI. DI MASSIMO/MINIMO = (1) MASSIMO: $\exists N > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (x_0 - N; x_0 + N)$ $f(x_0) \geq f(x)$

(2) MINIMO: $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in I \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ $f(x_0) \leq f(x)$

TEOREMA DI WEIERSTRASS = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ CHIUSO E LIMITATO; f CONTINUA SU $[a; b]$

$\Rightarrow f$ AMMETTE MAX. E MIN. ASSOLUTI SU $[a; b]$

$\exists x_M; x_m \in [a; b]$ t.c. $f(x_M) = \text{MAX}$ v $f(x_m) = \text{MIN}$

· OSSERVAZIONE: SE LA f È COSTANTE TUTTI I PUNTI DI $[a; b]$ SONO MAX. E MIN. ASSOLUTI

dim)

TEOREMA VALORI INTERMEDI = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ CHIUSO E LIMITATO; CONTINUA SU $[a; b]$; DETTI $M = \max f$ E $m = \min f$
 $\Rightarrow \forall y \in [m; M] \exists$ ALMENO UN $x \in [a; b]$ t.c. $f(x) = y$

· DIMOSTRAZIONE = PER WEISTRASS, $\exists M, m$ FINITI E $\exists x_m, x_M \in [a; b]$ t.c. SIA $y \in [m; M]$
 $\Rightarrow g_y(x) = f(x) - y$ (per comodità $x_m > x_M$)

· $g_y(x) \Big|_{[x_m; x_M]}$ · $g_y(x)$ CONTINUA SU $[x_m; x_M]$ $g_y(x_m) \leq 0$ v $g_y(x_M) \geq 0$
 $m - y \leq 0$ $M - y \geq 0$

· SE $y \in (m; M) \Rightarrow g_y$ CONTINUA SU $[x_m; x_M] \Rightarrow g_y(x_m) \cdot g_y(x_M) < 0$

$\Rightarrow \exists x \in [x_m; x_M]$ t.c. $g_y(x) = 0 \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow f(x) = y$

DERIVATE

FUNZIONE DERIVABILE IN UN PUNTO = UNA FUNZIONE SI DICE DERIVABILE IN UN PUNTO x_0 SE:

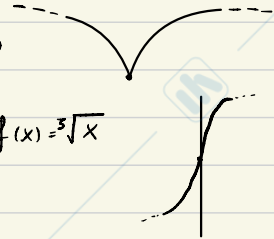
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c \in \mathbb{R}$$

PUNTO STAZIONARIO = UN PUNTO CRITICO O STAZIONARIO DI UNA FUNZIONE REALE E' UN PUNTO IN CUI LA DERIVATA SI ANNULLA O NON E' DEFINITA

(1) PUNTO ANGOLOSO: $f'_-(c) \neq f'_+(c)$ v $f'_-(c) = \pm \infty$; $f'_+(c) = \exists$ FINITO (FINITO)

(2) FLESSO A tp VERTICALE: $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ v $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$ esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(3) CUSPIDE: $f'_-(c) = +\infty$ v $f'_+(c) = -\infty$ v $f'_-(c) = -\infty$ v $f'_+(c) = +\infty$



dim)

TEOREMA: CONDIZIONE NECESSARIA DERIVABILITÀ = SIA $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$; $x_0 \in (a; b)$; f DERIVABILE IN x_0
 $\Rightarrow f$ E' CONTINUA IN x_0

· DIMOSTRAZIONI: $\frac{f(x) - f(x_0)}{(x \neq x_0)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

dim)

TEOREMA DI FERMAT = SIA $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$; $a, b \in \mathbb{R}^*$. SE $x_0 \in (a; b)$ E' UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE PER f E f E' DERIVABILE IN x_0
 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

· DIMOSTRAZIONE: SENZA PERDERE GENERALITÀ x_0 MAX. LOCALE

$\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ SI HA $f(x) \leq f(x_0) \rightarrow x \in [x_0 - \delta; x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$x \in (x_0; x_0 + \delta) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

· DERIVATA IN x_0 : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ PER TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

dim)

TEOREMA DI ROLLE = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f CONTINUA SU $[a; b]$; f DERIVABILE SU $(a; b)$; $f(a) = f(b)$
 $\Rightarrow \exists x_0 \in (a; b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

DIMOSTRAZIONE: f CONTINUA SU $[a; b] \xrightarrow{\text{WEIERSTRASS}} \exists$ MAX. E MIN. ASSOLUTI SU $[a; b]$

2 CASI: I) MAX = MIN = $f(a) = f(b) \Rightarrow f = \text{COST.} \forall x \in (a; b)$ SI HA $f'(x) = 0$

II) ALMENO UNO TRA MAX E MIN NON È ASSUNTO NE IN a NE IN b

\rightarrow SENZA PERDERE GENERALITÀ $x_M \neq a; b \Rightarrow x_M \in (a; b)$; f DERIVABILE IN x_M ; MA x_M ESTREMANTE
 $\Rightarrow f'(x_M) = 0$
 X FERMAT

dim)

TEOREMA DI LAGRANGE = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f CONTINUA SU $[a; b]$; f DERIVABILE SU $(a; b)$
 $\Rightarrow \exists x_0 \in (a; b)$ t.c. $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

DIMOSTRAZIONE: CONSIDERO LA RETTA PASSANTE PER $(a; f(a))$ E $(b; f(b))$

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

$$G(x) = f(x) - \text{retta} = f(x) - \left[y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right]$$

CONSIDERO $G(x)$

- i) $G(x): [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$
- ii) $G(x)$ CONTINUA SU $[a; b]$
- iii) $G(x)$ DERIVABILE SU $(a; b)$
- iv) $G(a) = G(b) = 0$

X ROLLE
 $\Rightarrow \exists x_0 \in (a; b)$ t.c. $G'(x_0) = 0$

$$G'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \quad G'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL = SIANO $f; g$ DUE FUNZIONI DERIVABILI IN UN INTERVALLO $(a; b)$; CON $g, g' \neq 0$ IN $(a; b)$

SE: H_I) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \vee \infty$

H_{II}) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

esempio SI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

esempio NO: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

dim)

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO SECONDO PEANO = SIA f DERIVABILE M -VOLTE IN $x_0 \Rightarrow f(x) \stackrel{x \rightarrow x_0}{=} T_{M, x_0}(x) + o(x - x_0)^M$

DIMOSTRAZIONE: I) PER INDUZIONE

$M=1$) f È DERIVABILE UNA VOLTA IN x_0 , ALLORA:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \quad \text{PER LA DEFINIZIONE DI DERIVATA}$$

$$\text{È VERO} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\iff f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0)$$

$$\iff f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_{M, x_0}(x) = \text{retta tangente}} + o(x - x_0)$$

II) $M=2$) f È DERIVABILE DUE VOLTE IN x_0 (= 0 PER CONDIZIONE)

VOLIAMO DIMOSTRARE CHE: $f(x) \stackrel{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$

$$\text{VERIFICO PERQUÒ CHE: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} = 0$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2x} = 0$$

MA A QUESTO PUNTO f' È DERIVABILE UNA VOLTA IN $x = x_0$

\Rightarrow PER FORZA DEL PRINCIPIO DE APPLICAZIONE DI f' :

$$f'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2x} = 0$$

$$\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \stackrel{x \rightarrow x_0}{=} T_{2, x_0}(x) + o(x^2)$$

dim)

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; f CONTINUA SU $[a; b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a; b]$ t.c. $f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$

DIMOSTRAZIONE: f È CONTINUA SU $[a; b] \Rightarrow$ ^{WEIERSTRASS} f ASSUME MAX/MIN ASSOLUTI SU $[a; b]$ (M) (m)
 $\Rightarrow \forall x \in [a; b] \quad m \leq f(x) \leq M$

MONOTONIA
 $\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$
 $\Rightarrow \frac{m \cdot (b-a)}{(b-a)} \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq \frac{M \cdot (b-a)}{(b-a)}$
 $\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} \leq M$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a; b]$ t.c. $f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$
 ↓
 TEOREMA VALORI INTERMEDI

FUNZIONE INTEGRALE = DATA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; CONTINUA; SIA $x_0 \in [a; b]$ CONSIDERIAMO $F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$; $F: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

dim)

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE = SIA $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$; CONTINUA SU $[a; b]$
 SIA $x_0 \in [a; b]$; CONSIDERO $F(x) := \int_{x_0}^x f(t) dt$; $\forall x \in [a; b]$

$F(x): [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$

\Rightarrow I) F È DERIVABILE SU $[a; b]$ E $F'(x) = f(x)$
 (F è primitiva di f in $[a; b]$)

II) SE G È UNA QUALSIASI PRIMITIVA DI f ALLORA $F(x) = G(x) - G(x_0)$

DIMOSTRAZIONE:

I) SIA $x \in (a; b)$

(Per completezza $h > 0$)

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt =$$

$$= \int_{x_0}^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt =$$

$$= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

MEDIA INTEGRALE DI f SU $[a; b]$

$\Rightarrow \exists c \in [x; x+h]$ t.c. $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) \cdot h$

$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c = f(x)$

MA SE $h \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow x$
 $[x \leq c \leq x+h]$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a; b)$

II) SE G È UNA PRIMITIVA $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $G(x) - F(x) = k$

CONSIDERIAMO:

$G(x_0) - F(x_0) = k$

$F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = 0 \Rightarrow G(x_0) = k$

$\Rightarrow G(x) - F(x) = k$

$\Rightarrow F(x) = G(x) - G(x_0)$

COROLLARIO: SIA G UNA PRIMITIVA DI f SU $[a; b]$

$\Rightarrow \forall x \in [a; b] ; G(x) - G(a) = \int_a^x f(t) dt$

$\Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx$

COROLLARIO: SE f È CONTINUA SU $[a; b]$

\Rightarrow LA FUNZIONE INTEGRALE $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ È PRIMITIVA DI f

DIMOSTRAZIONE COROLLARIO: CONSIDERO: $G(x) - G(a) = \int_a^x f(t) dt$

SE $F = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow$ SE $x = b ; G(x) - G(a) = \int_a^b f(x) dx$

SERIE

SERIE NUMERICHE = DATA UNA SUCCESSIONE DI NUMERI REALI $\{a_n\}$; CHIAMIAMO SERIE DEI TERMINI a_n LA SCRITTURA: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

(1) CONVERGENTE: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \exists \in \mathbb{R}$

(2) DIVERGENTE: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

(3) INDETERMINATA: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \nexists$

DOVE: $\{S_n\}$ SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI

CRITERIO DI CONVERGENZA DI UNA SERIE GEOMETRICA = SIA $a_n = q^n$; $q \in \mathbb{R}$. CONSIDERATA $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$:
 I) SE $q = 1 \rightarrow \sum 1^n = +\infty$ (DIVERGE)
 II) SE $q \neq 1 \rightarrow$ SI PUÒ DIMOSTRARE PER INDUZIONE CHE:

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

PERCIÒ: $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{SE } |q| < 1 \text{ (CONVERGENTE)} \\ +\infty & \text{SE } q \geq 1 \text{ (DIVERGENTE)} \\ \nexists & \text{SE } q \leq -1 \text{ (IRREGOLARE)} \end{cases}$$

CALCOLO DI UNA SERIE TELESCOPICA = SONO DELLE SERIE IN CUI ABBIAMO DUE SUCCESSIONI DI ADDENDI $\{b_n\}$ E LA SOMMA È FATTA DAI TERMINI $a_n = b_n - b_{n+1}$

$\rightarrow \sum a_n$ È DETTA SERIE TELESCOPICA

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1})$$

COSA SUCCEDERÀ? $(b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) \dots \Rightarrow$ RIMANE: $b_0 - b_{n+1}$

$$\Rightarrow \sum a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_0 - b_{n+1}) = b_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_{n+1})$$

CONVERGENZA DELLA SERIE DI HENGLI = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

DIMOSTRAZIONE: OSSERVANDO $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; SEMPLIFICO: $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ \Rightarrow NOTIAMO CHE I TERMINI SI SEMPLIFICANO 2 A 2; PERCIÒ SI TRATTA DI UNA SERIE TELESCOPICA

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{1}_{b_0} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{b_{n+1}} \right) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow \text{OTTENENDO } S_n \rightarrow 1; \text{ LA SERIE CONVERGE ED HA SOMMA 1}$$

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE = IL TERMINE GENERALE a_n DEVE TENDERE A ZERO
 SE $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

DIMOSTRAZIONE: $\sum a_n$ CONVERGE $\Rightarrow \exists S \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S - S_{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} - S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{S_{n+1} - S_n}_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{S - S_n}_0 = 0$$

MA $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \rightarrow \underbrace{S_{n+1} - S_n}_0 = a_{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ / $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \neq 0$; PERCIÒ SERIE NON CONVERGE

UNA SERIE A TERMINI NON NEGATIVI = UNA SERIE $\sum a_n$ A TERMINI NON NEGATIVI È CONVERGENTE O DIVERGENTE A $+\infty$. ESSA CONVERGE SE E SOLO SE LA SUCCESSIONE DELLE SOMME PARZIALI n -ESIME È LIMITATA

DIMOSTRAZIONE: SE $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE; ALLORA $\{S_n\}$ È MONOTONA CRESCENTE DA UN CERTO PUNTO IN DOI

\rightarrow PER IL TEOREMA DELL'ESISTENZA DEL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE MONOTONA SI OTTIENE: $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} +\infty \text{ (DIVERGENTE)} \\ \text{L} \in \mathbb{R} \text{ (CONVERGENTE)} \end{cases}$

CRITERIO DEL CONFRONTO = SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ DUE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI E TALI CHE $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE

\Rightarrow SE $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

SE $\sum a_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum b_n$ DIVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO = SIANO $\sum a_n$ E $\sum b_n$ DUE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI. SIA $b_n \neq 0$ DEFINITIVAMENTE PER $n \rightarrow +\infty$
SUPPONIAMO CHE ESISTO $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

\Rightarrow I) SE $L \in (0; +\infty)$ $\rightarrow \sum a_n$ E $\sum b_n$ HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO

II) SE $L = 0$ E $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

III) SE $L = +\infty$ E $\sum b_n$ DIVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

dim)

CRITERIO DELLA RADICE = SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI; $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE SE ESISTE $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$: I) SE $L \in [0; 1)$ $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

DIMOSTRAZIONE: I) $\exists r \in [0; 1)$ t.c. $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ DEFINITIVAMENTE

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$; $\sqrt[n]{a_n} \leq r \rightarrow a_n \leq (r)^n$

CONSIDERIAMO $\sum (r)^n$ CHE CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n \leq \sum (r)^n \Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE

II) SE $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

III) SE $L = 1 \Rightarrow$ NON DICE NULLA...

II) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$; $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1^n \not\rightarrow 0$

(PERIÒ $\sum a_n$ DIVERGE PERCHÉ CADE CONDIZIONE NECESSARIA DELLA CONVERGENZA)

CRITERIO DEL RAPPORTO = SIA $\sum a_n$ UNA SERIE A TERMINI POSITIVI; $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE: I) SE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0; 1)$ \Rightarrow CONVERGE

(IL CRITERIO DEL RAPPORTO È UTILE QUANDO CI SONO DELLE QUANTITÀ COME I FATTORIALI)

II) SE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1 \Rightarrow$ DIVERGE

III) SE $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow$ IL CRITERIO NON DICE NULLA

dim)

DIVERGENZA DELLA SERIE ARMONICA

DIMOSTRAZIONE = SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $x \geq \log(1+x)$; $\forall x > 0$. IN PARTICOLARE SE $x = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum \frac{1}{n} \geq \sum \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

SAPPIAMO CHE ENTRAMBE SONO SUCCESSIONI A TERMINI POSITIVI

$\sum \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum \log\left(\frac{1+k}{k}\right) = \sum \log(1+k) - \sum \log(k) = S_n = -\left(\sum \log(k) - \sum \log(k+1)\right) =$ SERIE TELESCOPICA

$\Rightarrow -\left(\log 1 - \frac{\log(n+1)}{0}\right) = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\log 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \log(n+1) = +\infty \rightarrow$ PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO: $\sum \frac{1}{n}$ DIVERGE

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA = SE $\sum a_n$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE SEMPLICEMENTE

$\rightarrow \sum |a_n| \geq \left| \sum a_n \right| \geq 0$

dim)

CRITERIO DI LEIBNIZ

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO

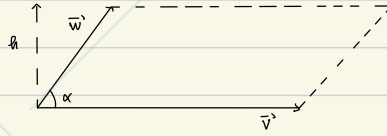
dim)

PRODOTTO VETTORIALE = IL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE COINCIDE CON L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA

DIMOSTRAZIONE: $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \alpha$

ESSENDO α L'ANGOLO COMPRESO TRA
 \vec{w} E \vec{v} RIVAVO CHE:

$$\|\vec{w}\| \cdot \sin \alpha = h \quad \text{poich\u00e9: } A = h \cdot \|\vec{v}\| = \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$$



dim)

PRODOTTO MISTO = SIANO U, V, W ; IL PRODOTTO MISTO E': $\langle U, V \wedge W \rangle = \langle V, W \wedge U \rangle = \langle W, U \wedge V \rangle$

DIMOSTRAZIONE:

$$\langle U, V \wedge W \rangle = \underbrace{\|U\|}_{\text{ALTEZZA} = \|U\| \cdot \cos \theta} \cdot \underbrace{\|V \wedge W\|}_{\text{AREA PARALLELOGRAMMA}} \cdot \cos \alpha$$

VOLUME PARALLELEPIPEDO

$\langle U, V \wedge W \rangle = 0 \iff U, V, W$ SONO COMPANARI

