Differenziabilità

Def. Si dice che f è differenziabile in x_0 (x_0 punto interno di dom f) se e solo se:

$\exists$ una retta tipo $y = t(x) := f(x_0) + m(x - x_0)$

che "approssima bene il grafico di f per $x \to x_0$" nel senso che:

$$f(x) - t(x) = o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

Teor. Sia x_0 punto interno di Dom f.

f è diff. in x_0 con retta approssimante

$y = t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$

$\Longleftrightarrow$ f è derivabile in x_0 e $m = f'(x_0)$

dim. Esercizio

Oss. 1) Dunque la "retta approssimante" non è altro che la retta tangente.

2) Tale retta è l'unica retta passante da $(x_0, f(x_0))$ con coeff. angolare $m = f'(x_0)$

Idea: considerare polinomi di grado $n > 1$ passanti da $(x_0, f(x_0))$ per ottenere una migliore approssimazione.

Sia $T_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2$

un polinomio di grado 2 ~~passante da $(x_0, f$~~

Cerchiamo a_0, a_1, a_2 tali che T_2 abbia in comune con f : $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$.

$$T_2(x_0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(x_0)$$

$$T_2'(x) = 0 + a_1 \cdot 1 + 2a_2(x-x_0)$$

$$T_2'(x_0) = a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(x_0)$$

$$T_2''(x) = 0 + 2a_2$$

$$T_2''(x_0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Dunque $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

è l'unico polinomio colle proprietà:

$T_2(x_0) = f(x_0)$ $\quad$ $T_2'(x_0) = f'(x_0)$ $\quad$ $T_2''(x_0) = f''(x_0)$

Def. Supponendo che esista $f^{(n)}(x)$ in un intorno di x_0, derivata n-esima di f in x_0, si dice che f è $(n+1)$ volte derivabile in x_0 se e solo se $f^{(n)}(x)$ è derivabile in x_0.

Per def. $f^{(n+1)}(x_0) := \frac{d}{dx}\left[f^{(n)}(x)\right]_{x=x_0}$

Def. Se f è derivabile n volte in ogni punto di A, si dice che f è "derivabile n volte su A" e si può scrivere $f \in \mathrm{Der}^n(A)$

(la notazione è usata raramente)

Se $f^{(n)}(x)$ è continua su A, si dice che f è "di classe C^n su A" e si scrive $f \in C^n(A)$

- Ad es. se f è derivabile 2 volte su A e $f''(x) \in C(A)$, risulta $f \in C^2(A)$.

- Per convenzione, a volte si scrive $f \in C^0(A)$ invece di $f \in C(A)$ per indicare una funzione continua su A.

In generale si può dimostrare che l'unico polinomio di ordine n che ha in comune con f, derivabile n volte in x_0, i valori delle derivate fino all'n-esima, è il polinomio:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ci chiediamo se tale polinomio è una approssimazione di f migliore della retta tangente. La risposta è:

Teor. (formula di Taylor con resto di Peano all'ordine n)
Sia f definita su un intorno di x_0 e derivabile (almeno) n volte in x_0. Allora $\exists!$ polinomio $T_n(x)$, di grado $\leq n$, tale che $f(x) = T_n(x) + o(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$ e risulta $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Def. Il polinomio $T_n(x)$ dell'enunciato (di grado $\leq n$) è detto polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0.

L'uguaglianza $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o(x-x_0)^n$

è detta formula di Taylor, con resto di Peano, di f, centrata in x_0, all'ordine n.

($o(x-x_0)^n$ è il "resto di Peano")

Teorema (formula di Taylor con resto di Lagrange)

Sia f derivabile $n+1$ volte in (a,b) e siano $x_0, x \in (a,b)$. Allora $\exists\ \gamma = \gamma(x_0, x)$, compreso fra x_0 e x ma distinto da essi, tale che:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

dove $T_{n,x_0}(x)$ è il polinomio di Taylor di f in x_0 all'ord. n

Nota $\frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ è detto resto di Lagrange

Se si considera $n=0$ (f derivabile 1 volta), la formula è:

$$f(x) = T_0(x) + \frac{f'(\gamma)}{1!}(x-x_0) = f(x_0) + f'(\gamma)(x-x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\gamma)$$

che è la formula del Teor. di Lagrange.

dim. per $n=1$ Per ipotesi: f derivabile 2 volte in (a,b).

Sia $x_0 \in (a,b)$ e sia $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ il polinomio di Taylor all'ord. 1, con centro x_0, di f.

Supponiamo $x > x_0 \wedge x < b$ e definiamo $K \in \mathbb{R}$ in modo che risulti $f(x) - T_1(x) = K(x-x_0)^2$, per cui $K = \dfrac{f(x)-T_1(x)}{(x-x_0)^2}$

Esplicitamente:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - K(x-x_0)^2 = 0 \qquad (*)$$

Definiamo una funzione sostituendo (nell'espressione a sinistra) ad x_0 (che è fissato) una variabile t:

$$g(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - K(x-t)^2, \quad g: [x_0, x] \to \mathbb{R}$$

Poiché f è derivabile in (a,b), lo è anche in $[x_0, x] \subset (a,b)$ e vale:

$$g'(t) = 0 - f'(t) - f'(t)(-1) - f''(t)(x-t) - K \cdot 2(x-t)(-1) =$$
$$= \cancel{-f'(t)} + \cancel{f'(t)} - f''(t)(x-t) + 2K(x-t) =$$
$$= \{2K - f''(t)\} \cdot (x-t)$$

Inoltre; $g(x) = f(x) - f(x) - f'(x)(x-x) - K(x-x)^2 = 0$,

$g(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - K(x-x_0)^2 = 0$ (per $(*)$)

Allora si può applicare il Teorema di Rolle a g e affermare che: $\exists\, \gamma \in (x_0, x) : g'(\gamma) = 0$.

Ma allora $\{2K - f''(\gamma)\}(x-\gamma) = 0 \iff K = \frac{f''(\gamma)}{2}$

Di conseguenza, abbiamo:

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\gamma)}{2}(x-x_0)^2 \iff f(x) = T_1(x) + \frac{f''(\gamma)}{2}(x-x_0)^2$$

per qualche $\gamma \in (x_0, x)$.

In modo analogo si procede se $a < x < x_0$, ottenendo

$$f(x) = T_1(x) + \frac{f''(\gamma)}{2}(x-x_0)^2 \text{ per qualche } \gamma \in (x, x_0) \quad \blacksquare$$

Cor. Sia $f \in C^n((a,b))$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora:

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o(x-x_0)^n \text{ per } x \to x_0.$$

dim. Applichiamo Teorema precedente:

$$f(x) - T_{n-1,x_0}(x) = \frac{f^{(n)}(\gamma)}{(n)!}(x-x_0)^{n}$$

$$\left|\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{f(x) - T_{n-1,x_0}(x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{f^{(n)}(\gamma)\,\cancel{(x-x_0)^n}}{n!\,\cancel{(x-x_0)^n}} - \frac{f^{(n)}(x_0)\,\cancel{(x-x_0)^n}}{n!\,\cancel{(x-x_0)^n}}\right| = \left|\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right| =$$

$$= \frac{1}{n!}\left|f^{(n)}(\gamma) - f^{(n)}(x_0)\right| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0,$$

poiché, essendo γ fra x e x_0, $\gamma \underset{x\to x_0}{\to} x_0$ (ed essendo $f^{(n)}$ continua): $f^{(n)}(\gamma) \underset{x \to x_0}{\to} f^{(n)}(x_0) \quad \blacksquare$

Oss. Il corollario dà la formula di Taylor con resto di Peano però con ipotesi più forti del necessario.