Capitolo 1

Serie numeriche

1.1 Definizioni ed esempi fondamentali

1.1.1 Definizioni

Data una successione di numeri reali a_n*, definita per* $n \geq n_0$ *, si dice* serie di termine generale a_n *l'espressione formale:*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \,,$$

che viene letta "serie per n *da* n_0 *a* $+\infty$*" o anche "somme per* n *da* n_0 *a* $+\infty$*".*
Si dice che la serie è rispettivamente: convergente[1] (a s), divergente (a $-\infty$ o $+\infty$), irregolare[2]*, se e solo se la successione definita da*

$$s_m := \sum_{n=n_0}^{m} a_n \,,$$

risulta convergente (a s*), divergente (a* $-\infty$ *o* $+\infty$*), irregolare.*
La successione s_m *viene detta* successione delle somme parziali di a_n.

Le scritture:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = s \,, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = -\infty \,, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = +\infty \,,$$

significano rispettivamente che la serie indicata è: convergente a s*, divergente a* $-\infty$*, divergente a* $+\infty$*.*
Nel caso la serie converga a s*, si dice anche che "la somma della serie è* s*".*

Il carattere *di una serie è la sua proprietà di essere convergente, divergente, irregolare (a seconda del caso).*

[1] Alcuni testi usano il termine *semplicemente convergente* invece di *convergente*, collo stesso significato.
[2] Come sinonimi di *irregolare* si usano anche: *oscillante* e *indeterminata*.

1.1.2

Stabilire in base alla definizione il carattere di:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\,.$$

[R: E' noto che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $n(n+1)/2$. Applicando tale formula, si ottiene:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} n = \sum_{n=1}^{m} n = \frac{m(m+1)}{2} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,,$$

dunque la serie diverge. $\diamondsuit$ **]**

1.1.3 Serie geometrica

Def. *Viene detta* serie geometrica *una serie che abbia per termine generale una successione del tipo:*

$$a_n = \begin{cases} 1 & per\ n=0 \\ q^n & per\ n\geq 1\,, \end{cases}$$

per qualche valore $q\in\mathbb{R}$, *detto* ragione[3].

Per $q\neq 0$ la serie geometrica si può scrivere semplicemente come: $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\,.$

1.1.4 Carattere delle serie geometriche

Teor. *La serie geometrica di ragione q risulta:*
i) convergente a $\frac{1}{1-q}$ *se* $-1<q<1$,
ii) divergente a $+\infty$ *se* $q\geq 1$,
iii) irregolare se $q\leq -1$.

[3] Il termine non ha qui il significato di "motivo" ma piuttosto quello della parola latina *ratio*, che significa rapporto. Precisamente, il rapporto cui si allude è quello di due termini successivi della successione a_n, visto che (qualunque sia il valore $q\in\mathbb{R}$) risulta:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{q}{1} = q \qquad \text{e} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{q^{n+1}}{q^n} = q \quad \forall n\geq 1\,.$$

In effetti, forse la cosa più naturale sarebbe introdurre la successione a_n per ricorrenza, definendo:

$$a_0 = 1\,, \quad a_n = q\cdot a_{n-1} \quad \forall n\geq 1\,.$$

Dim. ◇ Per $q=0$ risulta $a_0=1$ e $a_n=0$ per ogni $n\geq 1$. Di conseguenza, la successione delle somme parziali risulta la successione costante

$$s_m = 1 + \sum_{n=1}^{m} 0^n = 1 ,$$

quindi la serie converge ed ha somma 1 (che si può anche riscrivere come $\frac{1}{1-0}$, coerentemente coll'enunciato scritto sopra).

◇ Per $q=1$ vale $a_n=1$ per ogni $n\geq 0$. Di conseguenza, risulta

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} 1 = m+1 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty ,$$

cioé la serie diverge a $+\infty$.

◇ Per $q\neq 0,1$, risulta:

$$s_m = \sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} . \tag{1.1}$$

Se $-1<q<1$, risulta $q^{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, per cui $s_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$.

Se $q>1$, risulta $q^{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, per cui $s_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1-\infty}{1-q} = +\infty$.

Se $q\leq -1$, la successione q^{m+1} non ha limite, dato che non è infinitesima[4] e non può avere limite positivo o negativo poiché violerebbe il teorema di permanenza del segno (dato che il valore di q^{m+1} è negativo per m pari e positivo per m dispari). Se fosse $s_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} s$ per qualche valore $s\in\overline{\mathbb{R}}$, da (1.1) si otterrebbe

$$q^{m+1} = 1 + (q-1)s_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + (q-1)s ,$$

il che contraddirebbe il fatto che q^{m+1} non ha limite; quindi s_m non ha limite e la serie è irregolare. □

La dimostrazione dell'enunciato è conclusa, ma osserviamo in aggiunta che, sebbene la serie risulti irregolare sia per $q=-1$ che per $q<-1$, vi è una differenza qualitativa tra i due casi. Infatti, nel primo caso la successione delle somme parziali è limitata (risulta $s_m=1$ per m pari e $s_m=0$ per m dispari, per cui $|s_m|\leq 1$ per ogni m), mentre nel secondo no (risulta $|s_m| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$... perché?).

1.1.5 Costanti nel termine generale

Supponendo c costante reale non nulla e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ convergente o divergente, mostrare che:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} c\, a_n$$

[4] Poiché $|q^{m+1}| \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ se $q<-1$, mentre $|q^{m+1}|=1$ se $q=-1$.

hanno lo stesso carattere e

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} c\, a_n = c \cdot \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \,.$$

Questa proprietà può essere espressa a parole dicendo che: *le costanti moltiplicative non nulle si possono "portare fuori dalla serie"*.

[R: Chiamiamo s_n e σ_n le successioni delle somme parziali di a_n e $b_n := ca_n$, cioé

$$s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k \,, \quad \sigma_n := \sum_{k=n_0}^{n} b_k = \sum_{k=n_0}^{n} ca_k \,.$$

In base alle proprietà di somma e prodotto abbiamo:

$$\sigma_n = ca_{n_0} + ca_{n_0+1} + \cdots + ca_n = c \cdot (a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n) = cs_n \,.$$

Passando ai limiti, se $s_n \to s \in \overline{\mathbb{R}}$, abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} cs_n \,,$$

cioé la tesi. $\diamondsuit$ **]**

Si noti che se fosse $c=0$ avremmo a sinistra una serie di serie termine generale nullo:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} c\, a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} 0 \cdot a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} 0 \,.$$

Di conseguenza la successione delle somme parziali è nulla per ogni n e quindi la serie converge a 0, anche nel caso che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ sia divergente o irregolare.

1.1.6 "Soppressione" di un numero finito di termini

Supponendo che a_n sia ben definita per $n \geq n_1$ e che sia $n_2 > n_1$, mostrare che hanno lo stesso carattere le due serie:

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_2}^{+\infty} a_n$$

(notare che la seconda serie si può pensare come ottenuta dalla prima "sopprimendone" i primi $n_2 - n_1$ termini). Se sono convergenti, la loro somma è lo stesso valore?

[R: La differenza risulta:

$$\sum_{n=n_1}^{+\infty} a_n - \sum_{n=n_2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=n_1}^{n_2-1} a_n \,,$$

quindi la somma è la stessa solo se accade che $\sum_{n=n_1}^{n_2-1} a_n = 0$. $\diamondsuit$ **]**

1.1.7 Serie somma

Siano date: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ (con a_n, b_n definite almeno per $n \geq n_0$). Posto $c_n = a_n + b_n$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ è detta *serie somma* delle due serie precedenti. Mostrare che:

i) se le prime due serie convergono ed hanno somma rispettivamente A e B, allora anche la serie somma converge ed ha per somma $C = A + B$;
ii) se le prime due serie divergono entrambe a $+\infty$ (o entrambe a $-\infty$) allora anche la serie somma diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$);
iii) se una delle due serie date diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$) e l'altra converge, allora la serie somma diverge a $+\infty$ (o a $-\infty$).
iv) se una delle due serie è irregolare e l'altra converge, allora la serie somma è irregolare.

Si noti che se entrambe le serie sono irregolari, o divergenti ma con segni diversi, o anche una irregolare e l'altra divergente, il comportamento della serie somma non è prevedibile in modo generale e va analizzato caso per caso (in realtà, nel caso una sia irregolare e l'altra divergente si può per lo meno escludere la convergenza).

1.1.8 Serie e numeri periodici

La serie geometrica può essere usata per trasformare in frazione un numero razionale dato in forma decimale. Piuttosto che dare regole generali (che probabilmente molti studenti hanno imparato meccanicamente alle scuole dell'obbligo) pare più formativo illustrare come si può procedere con un esempio.

Ci poniamo il problema di trasformare in frazione il numero periodico: $0{,}3\bar{8}$.
Cominciamo col separare la parte periodica da quella non periodica: $0{,}3\bar{8} = 0{,}3 + 0{,}0\bar{8}$. Poi, scriviamo la parte periodica come somma di infinite frazioni, aventi al denominatore potenze crescenti di 10 e tutte collo stesso numeratore (coincidente col periodo del numero, che nel nostro caso è 8):

$$0{,}0\bar{8} = \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10000} + \dots .$$

Conviene ora raccogliere la prima frazione, in modo da far comparire una serie geometrica convergente, di cui conosciamo la somma:

$$0{,}0\bar{8} = \frac{8}{100}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{8}{100}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{8}{100}\cdot\frac{1}{1-(1/10)} = \frac{8}{100}\cdot\frac{10}{9} = \frac{8}{90} .$$

A questo punto, basta sommare la parte non periodica a quella periodica, ottenendo il risultato cercato:

$$0{,}3\bar{8} = \frac{3}{10} + \frac{8}{90} = \frac{35}{90} .$$

Non dovrebbe risultare difficile generalizzare il procedimento al caso di numeri periodici con periodo costituito da più di una cifra...

1.1.9

Trasformare in frazione il numero periodico: $2{,}\overline{37}$.

[R: Procedendo analogamente all'esempio 1.1.8, troviamo:

$$2{,}\overline{37} = 2 + 0{,}\overline{37} = 2 + \left(\frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \dots\right) = 2 + \frac{37}{100}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n = 2 + \frac{37}{100}\cdot\frac{1}{1-(1/100)} = 2 + \frac{37}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{198}{99} + \frac{37}{99} = \frac{235}{99}\,.$$

$\diamondsuit$ **]**

1.1.10 Serie di Mengoli

Determinare la somma della seguente serie convergente (detta *di Mengoli*):

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\,,$$

dopo aver trovato un'espressione esplicita e finita[5] della corrispondente successione delle somme parziali.
Segnaliamo che l'esercizio ha uno svolgimento piuttosto breve, ma risulta difficile perché occorre avere l'idea giusta per riscrivere il termine generale in maniera opportuna (e poi osservare cosa succede alle somme parziali quando vengono riscritte di conseguenza...). Ci si ispiri inizialmente a ciò che si fa quando si deve integrare una funzione razionale.

[R: La successione delle somme parziali è:

$$s_m = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$$

Scritta s_m in questo modo, non si riesce a esplicitarla come richiesto. Però il termine generale della serie può essere riscritto nel seguente modo:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Allora possiamo scrivere:

$$s_m = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right) = 1 - \frac{1}{m+1}\,.$$

A questo punto è evidente che $s_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, per cui *la serie converge e la sua somma vale* 1. $\diamondsuit$ **]**

1.1.11 Serie telescopiche

La serie di Mengoli considerata nell'esercizio precedente è uno degli esempi più semplici di *serie telescopica*. Una serie è detta telescopica se la sua successione delle somme parziali s_m può essere riscritta come una somma di addendi dei quali si semplificano tutti tranne un numero finito di essi (numero indipendentemente da m, almeno definitivamente). Una definizione più precisa e formale di tale concetto non pare qui necessaria. Seguono altri esempi.

[5] Con "finita" si vuole intendere un'espressione che non sia una somma di infiniti termini.

1.1.12

Stabilire in base alla definizione il carattere della seguente serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) .$$

[R: Riscriviamo il termine generale:

$$a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} = \log(n+1) - \log n .$$

Allora la successione delle somme parziali risulta:

$$s_n = (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + \cdots + (\log(n+1) - \log n) = \log(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty .$$

Si tratta dunque di una serie telescopica che diverge logaritmicamente (nel senso che la successione delle somme parziali è asintotica a $\log n$). $\diamondsuit$ **]**

1.1.13 Serie di Mengoli generalizzata

Stabilire in base alla definizione il carattere della seguente serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^\gamma - n^\gamma}{(n+1)^\gamma \cdot n^\gamma} .$$

Può essere utile ispirarsi allo studio della serie di Mengoli, che corrisponde al caso particolare in cui $\gamma = 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^1 - n^1}{(n+1)^1 \cdot n^1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1) - n}{(n+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} .$$

[R: Riscriviamo il termine generale:

$$a_n = \frac{(n+1)^\gamma - n^\gamma}{(n+1)^\gamma \cdot n^\gamma} = \frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma} .$$

Allora abbiamo:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \left(\frac{1}{1^\gamma} - \frac{1}{2^\gamma}\right) + \left(\frac{1}{2^\gamma} - \frac{1}{3^\gamma}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma}\right) =$$

$$= \frac{1}{1^\gamma} - \frac{1}{(n+1)^\gamma} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\gamma} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma > 0 \\ 0 & \text{se } \gamma = 0 \\ -\infty & \text{se } \gamma < 0 \end{cases} .$$

Dunque la serie indicata: converge a 1 se $\gamma > 0$, converge a 0 se $\gamma = 0$, diverge a $-\infty$ se $\gamma < 0$. $\diamondsuit$ **]**

1.1.14 Serie a termini di segno costante

Def. *La serie*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

è detta:
a termini non negativi *se e solo se* $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$,
a termini non positivi *se e solo se* $a_n \leq 0 \ \forall n \geq n_0$.

Essa è detta:
a termini definitivamente non negativi *se e solo se esiste* $\tilde{n} \geq n_0$ *tale che* $a_n \geq 0 \ \forall n \geq \tilde{n}$,
a termini definitivamente non positivi *se e solo se esiste* $\tilde{n} \geq n_0$ *tale che* $a_n \leq 0 \ \forall n \geq \tilde{n}$.

1.2 Criteri per lo studio del carattere

1.2.1 Condizione necessaria alla convergenza

Tra quelle viste finora, tutte le serie convergenti hanno in comune il fatto che il loro termine generale tende a 0. E' facile intuire come questo non sia un caso, come afferma il seguente enunciato (la cui dimostrazione è un esercizio essenziale).

Teor. *Se* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *è convergente, necessariamente*[6] *il suo termine generale è infinitesimo (cioé* $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *).*
Viceversa, non tutte le serie col termine generale infinitesimo risultano convergenti.

[R: Detta s_n la successione delle somme parziali di a_n ed s il suo limite, abbiamo:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s - s = 0 \, .$$

Questo mostra che la condizione "$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$" risulta *necessaria* alla convergenza di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Per vedere che la condizione *non è sufficiente*, basta considerare la serie 1.1.12: il suo termine generale è infinitesimo, eppure la serie risulta divergente! $\diamondsuit$ **]**

1.2.2 Regolarità delle serie a termini di segno costante

Teorema *Le serie a termini di segno definitivamente costante (cioé non negativo o non positivo) non possono essere irregolari.*

[6] Lo studente avrà certamente incontrato varie volte delle proprietà che sono condizione "necessaria" o condizione "sufficiente" al verificarsi di qualcos'altro. L'assimilazione della differenza tra i due concetti è **indispensabile per passare l'esame**!

[**R:** Supponiamo che la serie sia a termini definitivamente non negativi, cioé che esista $\tilde{n}$ tale che, $\forall n \geq \tilde{n}$, risulti $a_n \geq 0$. Allora per $n \geq \tilde{n}$ risulta anche:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \, ,$$

perciò la successione delle somme parziali è definitivamente crescente. Dunque s_n deve ammettere limite, per noto teorema; ciò significa, per definizione, che la serie è regolare.
Analoga dimostrazione per le serie a termini non positivi (la si scriva per esercizio!). $\diamondsuit$]

1.2.3 Criterio del confronto

Teorema *Siano a_n e b_n definite da un certo n_0 in poi, tali che:*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \textit{almeno definitivamente}\, .$$

i) Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ converge, allora converge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

ii) Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora diverge anche $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Dim. Supponiamo che l'ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$ sia verificata per ogni $n \geq n_0$ e poniamo:

$$s_m := \sum_{n=n_0}^{m} a_n \, , \qquad \sigma_m := \sum_{n=n_0}^{m} b_n \, .$$

Dall'ipotesi $a_n \leq b_n$ segue che $s_m \leq \sigma_m$ per ogni $m \geq n_0$.
Dal fatto che si suppone a_n non negativa, segue che anche b_n lo è (essendo $a_n \leq b_n$); allora entrambe le successioni s_m e σ_m sono crescenti, per cui ammettono limite (finito o infinito).

i) Se si suppone inoltre che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ sia convergente, la successione σ_m tende a un valore finito ed è quindi limitata. Allora anche s_m è limitata (dato che $s_m \leq \sigma_m$) ed ammette limite finito, il che corrisponde a dire che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ è convergente.

ii) Se si suppone invece che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ sia divergente, risulta $s_m \longrightarrow +\infty$ e quindi, per confronto, anche $\sigma_m \longrightarrow +\infty$, il che corrisponde a dire che $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Se ora si suppone che l'ipotesi $0 \leq a_n \leq b_n$ sia verificata solo definitivamente, diciamo per $n \geq \tilde{n} > n_0$, si può comunque applicare quanto appena dimostrato alle serie "accorciate":

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} b_n \, .$$

Per 1.1.6, tali serie hanno lo stesso carattere di

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$$

e da ciò si ricava la tesi (fare il ragionamento in dettaglio per esercizio!). □

ATTENZIONE!
In base a quello che si legge nei compiti d'esame, pare che alcuni studenti pensino che, sotto le ipotesi all'inizio dell'enunciato, in aggiunta alle affermazioni *i*) e *ii*), valgano anche le seguenti:

iii) Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *converge, allora converge anche* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

iv) Se $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *diverge, allora diverge anche* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$.

Tali affermazioni **NON SONO VERE!**

Infatti, dato che $0 \le \frac{1}{n(n+1)} \le n$ per ogni $n \ge 1$, se fosse vera la *iii*), dalla convergenza della serie di Mengoli (1.1.10) seguirebbe quella della serie 1.1.2, che invece è divergente!
Se fosse vera la *iv*), dato che $(1/2)^n \le 1^n$ per ogni $n \ge 0$, dalla divergenza della serie geometrica (1.1.3) di ragione 1 seguirebbe la divergenza di quella di ragione $1/2$, che invece è convergente!
Se non si è ancora convinti, può essere utile provare a dimostrare *iii*) e *iv*) e vedere cosa c'è che non va...

1.2.4 Criterio del confronto asintotico (o dell'asintotico)

Teorema *Siano a_n e b_n definite da un certo n_0 in poi, tali che $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Sia $b_n > 0$ oppure $b_n < 0$ (almeno definitivamente). Allora le serie*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \qquad e \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Dim. Supponiamo sia $b_n > 0$. Dall'ipotesi di asintoticità si ottiene che, definitivamente:

$$\frac{1}{2} b_n \le a_n \le \frac{3}{2} b_n \,.$$

Usando il criterio del confronto (e 1.1.5) si dimostra la tesi... (scrivere la dimostrazione dettagliata per esercizio!)
Nel caso sia invece $b_n < 0$, si possono considerare le due serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-a_n) \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (-b_n) \,.$$

Poiché risulta $-a_n \sim -b_n > 0$, le due serie hanno lo stesso carattere per quanto già dimostrato. Ma in base a 1.1.5 la prima ha lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ e la seconda lo stesso carattere di $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$, da cui la tesi. $\square$

ATTENZIONE!
Il criterio dell'asintotico non si può usare per serie che non siano, almeno definitivamente, a segno costante.

1.2.5 Serie armonica

Def. *La serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *è detta* serie armonica.

Verificare che *si tratta di una serie divergente* (suggerimento: cercare una stima asintotica di $\frac{1}{n}$ con il termine generale di una delle serie di cui si è studiato il carattere in precedenza).

[**R:** Ricordando che

$$\log(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t\,,$$

deduciamo che

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

In base a 1.1.12, abbiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ è divergente. Allora per il criterio dell'asintotico 1.2.4 risulta divergente anche la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. $\diamondsuit$]

1.2.6 Serie armonica generalizzata

Def. *Si dice* serie armonica generalizzata con esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ *la serie:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

Teorema $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *risulta convergente per* $\alpha > 1$, *divergente per* $\alpha \leq 1$.

Dim. Per $\alpha = 1$ si tratta della serie armonica, già considerata nell'esercizio precedente (1.2.5).
Per $\alpha \neq 1$, si può sfruttare 1.1.13 come segue.

Poniamo $\alpha = \gamma + 1$ con $\gamma \neq 0$, da cui $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\gamma+1}}$.

Abbiamo che:

$$\frac{(n+1)^\gamma - n^\gamma}{(n+1)^\gamma \cdot n^\gamma} = \frac{(1+1/n)^\gamma - 1}{(n+1)^\gamma} \sim \frac{\gamma/n}{(n+1)^\gamma} \sim \frac{\gamma}{n^{\gamma+1}} \,.$$

Applicando 1.1.13 ed il criterio dell'asintotico, si ottiene che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\gamma}{n^{\gamma+1}}$ converge per ogni $\gamma > 0$, mentre diverge per ogni $\gamma < 0$.

Di conseguenza, ricordando 1.1.5, si ottiene che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ risulta convergente per $\alpha > 1$, divergente per $\alpha < 1$. $\square$

1.2.7 Criterio del rapporto (per serie e successioni)

Teorema *Sia a_n una successione (definita da un certo n_0 in poi) definitivamente positiva, in senso stretto; esista $l := \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \in [0,+\infty]$.*

i) Se $l<1$, allora $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

ii) Se $l>1$, allora $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge.

iii) Se $l=1^+$, allora $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ è strettamente maggiore di 0 (eventualmente $+\infty$) e $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Dim. *i)* Essendo $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, in base alla definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0 \,, \quad \exists\, \tilde{n} = \tilde{n}(\varepsilon) \ : \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} < l + \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{n} \,.$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$ abbiamo che:

$$q := l + \varepsilon = \frac{2l+1-l}{2} = \frac{l+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \,.$$

Dunque, esiste $\tilde{n}$ tale che $\frac{a_n}{a_{n-1}} < q \ \ \forall n \geq \tilde{n}$.
Supponiamo $n > \tilde{n}$, per cui $n = \tilde{n} + k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Risulterà:

$$a_n < q\, a_{n-1} < q^2 a_{n-2} < \cdots < q^k a_{n-k} = q^{n-\tilde{n}} a_{\tilde{n}} = \left(\frac{a_{\tilde{n}}}{q^{\tilde{n}}}\right) q^n \,.$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} \left(\frac{a_{\tilde{n}}}{q^{\tilde{n}}}\right) q^n = \left(\frac{a_{\tilde{n}}}{q^{\tilde{n}}}\right) \sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} q^n$ è convergente, in quanto multipla di una serie geometrica di ragione $q<1$. Allora, per il criterio del confronto 1.2.3 anche $\sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} a_n$ è convergente, per cui lo è anche la serie data $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ (che ha lo stesso carattere per 1.1.6). Inoltre, dalla condizione necessaria alla convergenza 1.2.1, o direttamente dalla disuguaglianza $a_n < \frac{a_{\tilde{n}}}{q^{\tilde{n}}} q^n$ mostrata sopra, si ottiene che $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$ (il fatto che il limite sia 0 per eccesso segue dalla positività di a_n).

ii) Poniamo $b_n := (a_n)^{-1} \ \forall\, n \geq \tilde{n}$, dove $\tilde{n}$ è tale che $a_n > 0 \ \forall\, n \geq \tilde{n}$. Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^{-1} = l^{-1} .$$

Essendo per ipotesi $l > 1$, risulta $l^{-1} < 1$, quindi per *i)* dovrà essere $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$; allora:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty .$$

Inoltre, poiché la successione a_n non è infinitesima, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ non può convergere per 1.2.1; trattandosi di una serie a termini definitivamente positivi, per 1.2.2 dev'essere divergente (a $+\infty$).

iii) Ricordiamo che la scrittura $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1^+$ significa, per definizione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \qquad \wedge \qquad \exists\, \tilde{n} : \ \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \ \ \forall\, n \geq \tilde{n} .$$

Ciò implica che, per ogni $n \geq \tilde{n}$, risulta $a_n \geq a_{n-1}$, cioé la successione è definitivamente crescente e quindi ammette limite. Tale limite non è prevedibile in base alla sole ipotesi formulate, ma non può essere che strettamente positivo (eventualmente $+\infty$), dato che $a_n \geq a_{\tilde{n}} > 0$.
Dunque a_n non può essere infinitesima e la sua serie (essendo a termini definitivamente positivi) è divergente. □

Osservazioni 1) Si può verificare per esercizio che, per ogni funzione reale f con dominio superiormente illimitato, risulta la seguente uguaglianza (alquanto intuitiva se pensata graficamente):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) .$$

In particolare, per qualunque successione c_n sarà:

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} c_{n+1} .$$

Applicando ciò alla successione $c_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}$ dell'enunciato precedente, si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Perciò, nell'usare il criterio, si può determinare il valore l calcolando uno qualunque dei due limiti.

2) Se risulta $l=1$ ma non per eccesso, il teorema non fornisce nessuna informazione. Se si prendono in esame le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

si nota che per entrambe risulterebbe $l=1^-$, ma mentre la prima diverge la seconda converge (per 1.2.6).
Quindi, nel caso si cerchi di applicare il criterio del rapporto e si trovi che $l=1$ ma non per eccesso, il criterio non è utilizzabile.

1.2.8 Criterio della radice

Teorema *Sia a_n una successione (definita da un certo n_0 in poi) definitivamente non negativa, e tale che esista* $l := \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0,+\infty]$.

i) *Se $l<1$, allora $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge e $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.*

ii) *Se $l>1$, allora $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge.*

iii) *Se $l=1^+$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ non è inferiore a 1 (eventualmente può essere $+\infty$) e $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Dim. Ci sono alcune analogie colla dimostrazione del criterio del rapporto.

i) Dall'ipotesi $l<1$ segue l'esistenza di $\tilde{n} \geq n_0$ e $q<1$ tali che:

$$\sqrt[n]{a_n} < q \qquad \text{e quindi (elevando a potenza } n\text{–esima)} \qquad a_n < q^n$$

... in base a ciò si può arrivare alla tesi.

ii) Dall'ipotesi $l>1$ segue che definitivamente $\sqrt[n]{a_n} > q > 1$ e quindi $a_n > q^n$... e si può arrivare alla tesi.

Scrivere la dimostrazione dettagliata per esercizio! □

Osservazione Se risulta $l=1$ ma non per eccesso, l'enunciato non fornisce nessuna informazione. Se si prendono in esame le due serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,,$$

si può verificare che per entrambe risulterebbe $l=1^-$, ma mentre la prima diverge la seconda converge (per 1.2.6).
Quindi, nel caso si cerchi di applicare il criterio della radice e si trovi che $l=1$ ma non per eccesso, il criterio non è utilizzabile.[7]

[7] In realtà, per il criterio della radice (ma non per quello del rapporto), si potrebbe verificare che anche nel caso in cui sia $l=1$ ma né per eccesso né per difetto (eventualità che può esser poco familiare ma non si può escludere!), la serie diverge.

1.2.9 Convergenza assoluta

Definizione *Si dice che la serie* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente *se e solo se converge la serie dei moduli, cioé la serie:* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$.

Teorema *Le serie assolutamente convergenti sono convergenti.*

Dim. Definiamo, per ogni numero reale t, la *parte positiva* e la *parte negativa* rispettivamente come:

$$t^+ := \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0\,, \end{cases} \qquad t^- := \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0\,. \end{cases}$$

(Si noti che, nonostante il nome, la parte negativa di t è un valore positivo o nullo!)
In base a tale definizione si controlla (esercizio!) che risulta:

$$t = t^+ - t^- \,, \quad |t| = t^+ + t^- \,, \quad 0 \leq t^+ \leq |t| \,, \quad 0 \leq t^- \leq |t| \,.$$

Allora, dall'ipotesi di convergenza su $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$, segue per il criterio del confronto la convergenza di

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n^+ \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n^- \,.$$

Per 1.1.7–i), segue che converge anche:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} (a_n^+ - a_n^-) \quad . \qquad \square$$

Osservazione Il teorema afferma che la convergenza assoluta implica la convergenza, detta a volte "convergenza semplice" (dove il termine ha lo stesso identico significato del termine "convergenza").
Viceversa, vi sono serie convergenti che non sono assolutamente convergenti, come $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ [8]; perciò la convergenza "semplice" non garantisce (ma nemmeno esclude) la convergenza assoluta.
Detto altrimenti: *la convergenza assoluta è una condizione sufficiente ma non necessaria alla convergenza e la convergenza è una condizione necessaria ma non sufficiente alla convergenza assoluta.*

1.2.10 Serie a termini di segno alterno

Definizione *Una serie del tipo* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ *, con* b_n *(definitivamente) di segno costante, è detta* serie a termini (definitivamente) di segno alterno.

[8] La serie dei moduli corrispondente è la serie armonica, non convergente, mentre la serie stessa converge per il criterio di Leibnitz (1.2.11).

1.2.11 Criterio di Leibnitz

Teorema *Sia b_n, con $n \geq n_0$, il termine generale di una successione numerica infinitesima, definitivamente non negativa e non crescente. Allora:*
i) la serie

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n\, b_n$$

è convergente.
ii) Detta s la somma della serie e detta s_n la somma parziale n–esima, cioé

$$s_n := \sum_{m=n_0}^{n} (-1)^m\, b_m \quad e \quad s := \lim_{n\to+\infty} s_n\,,$$

si ha che

$$|s - s_n| \leq b_{n+1} \qquad \forall\, n \geq \tilde{n}\,,$$

essendo $\tilde{n}$ tale che b_n risulti non negativa e non crescente per $n \geq \tilde{n}$.
Inoltre per $n \geq \tilde{n}$ risulta: $s_n \geq s$ per n pari e $s_n \leq s$ per n dispari.

Si noti che, sotto le stesse ipotesi, segue subito che converge anche

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, b_n$$

$\Big($infatti, per 1.1.5, vale: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, b_n = -\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n\, b_n\Big)$.

Dim. Chiave della dimostrazione sono alcune proprietà delle somme parziali corrispondenti ad n pari e dispari; tali proprietà discendono dalle ipotesi fatte sulla successione b_n e dal fatto che, per ottenere s_{n+1} da s_n, bisogna sottrarre o sommare un termine, a seconda che n sia pari o dispari.

Consideriamo un indice pari ed il suo successivo pari, diciamo $n=2m$ e $n=2m+2$, con $m \geq \tilde{n}/2$ (per cui $2m, 2m+2 \geq \tilde{n}$). Risulta:

$$s_{2m+2} = s_{2m} - b_{2m+1} + b_{2m+2}\,.$$

Grazie al fatto che b_n è decrescente per $n \geq \tilde{n}$, risulta $b_{2m+2} \leq b_{2m+1}$; ne segue $-b_{2m+1} + b_{2m+2} \leq 0$, da cui:

$$s_{2m+2} \leq s_{2m}\,.$$

D'altra parte, abbiamo anche $b_{2m+1} \leq b_{2m}$, per cui $b_{2m} - b_{2m+1} \geq 0$ e

$$s_{2m+1} = s_{2m-1} + b_{2m} - b_{2m+1} \geq s_{2m-1}\,.$$

Ora, pensando ad s_{2m} e s_{2m+1} come a due successioni di variabile m, ciò significa che la prima è decrescente e la seconda crescente. Quindi entrambe devono ammettere limite. Inoltre, i due limiti devono coincidere poiché, detto $s = \lim\limits_{m\to+\infty} s_{2m}$, grazie al fatto che b_n è infinitesima deve risultare:

$$s_{2m+1} = s_{2m} - b_{2m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} s - 0 = s\ .$$

Inoltre, essendo s_{2m} decrescente ed s_{2m+1} crescente, dovrà essere: $s_{2m} \geq s$ per qualunque $m \geq \tilde{n}/2$ ed $s_{2m+1} \leq s$ per qualunque $m \geq \tilde{n}/2$.

Riassumendo, posto $s = \lim\limits_{m\to+\infty} s_{2m}$, abbiamo mostrato che vale la seguente catena di infinite disuguaglianze (dove compaiono prima tutti gli infiniti termini con indice dispari crescente, poi s, quindi tutti i termini con indici pari decrescenti):

$$s_{\tilde{n}+1} \leq s_{2m+1} \leq \cdots \leq s \leq \cdots \leq s_{2m+2} \leq s_{2m} \leq \cdots \leq s_{\tilde{n}+2} \leq s_{\tilde{n}}\ .$$

Deduciamo allora:

$$|s - s_{2m}| \underset{[s\leq s_{2m}]}{=} s_{2m} - s \underset{[s\geq s_{2m+1}]}{\leq} s_{2m} - s_{2m+1} = b_{2m+1}\ ,$$

$$|s - s_{2m+1}| \underset{[s\geq s_{2m+1}]}{=} s - s_{2m+1} \underset{[s\leq s_{2m+2}]}{\leq} s_{2m+2} - s_{2m+1} = b_{2m+2}\ .$$

Quindi, che n sia pari o dispari ($n \geq \tilde{n}$), risulta comunque:

$$|s - s_n| \leq b_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Ciò implica che $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} s$, il che significa che $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ è una serie convergente e la parte i) della tesi è dimostrata.

Assodato che $s = \lim\limits_{m\to+\infty} s_{2m}$ è la somma della serie, se si rivede la dimostrazione fatta fin qui si può notare che le disuguaglianze affermate nella seconda parte della tesi risultano già dimostrate. □

1.2.12 Serie e integrali impropri

Lemma *Sia f continua, decrescente e positiva su $[n_0, +\infty)$, per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $n \geq n_0$:*

$$\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)\ .$$

Dim. Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n_0$. Per ogni $x \in [k, k+1]$, grazie all'ipotesi di monotonia risulta:

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)\ .$$

Integrando sull'intervallo $[k, k+1]$ si ottiene[9]:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(k)$$

Sommando su tutti i k da n_0 a n:

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k)\,.$$

Riscrivendo il termine a sinistra come:

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) = f(n_0+1) + \cdots + f(n+1) = \sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k)\,,$$

la tesi è ottenuta. □

Basandosi sulle disuguaglianze garantite dal lemma precedente, si può dimostrare (passando al limite per $n \to +\infty$ e lavorandoci sopra) il seguente risultato.

Teorema *Sia f continua, decrescente e positiva su $[n_0, +\infty)$, per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$. Allora l'integrale improprio $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ e la serie $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} f(k)$ hanno lo stesso carattere. Inoltre, nel caso l'integrale e la serie siano convergenti, detta s la somma della serie e s_n la sua successione delle somme parziali, risulta, per ogni $n \geq n_0$:*

$$0 \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.2}$$

Dim. Suddividiamo la dimostrazione in 6 punti.

1) Cominciamo a osservare che dall'ipotesi di positività di f segue che la serie e l'integrale improprio sono regolari. Questo in particolare garantisce che sia:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{(per def.)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \int_{n_0}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{\text{(proprietà dei limiti a } +\infty\\ \text{di funzioni traslate)}}}{=}$$

[9] Occorre osservare che, poiché si pensa a k come fissato, $f(k+1)$ è una costante e si può portare fuori dall'integrale, per cui $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x = f(k+1)\int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}x = f(k+1)\cdot[x]_k^{k+1} = f(k+1)$.
Analogamente per l'integrale di $f(k)$.

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_{n_0}^{x+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

dove l'ultima uguaglianza non è necessariamente vera per una qualunque funzione definita su $[n_0,+\infty)$. [10]

2) Se la serie è convergente, cioé la successione delle somme parziali ha limite $s\in\mathbb{R}$, risulta:

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{(per lemma)}}{\leq} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = s\,,$$

per cui anche l'integrale improprio è convergente (ed ha un valore che non può essere superiore a s).

3) Se l'integrale improprio è divergente, la serie non può essere convergente, altrimenti avremmo contraddizione con 2); quindi, essendo la serie regolare, sarà anch'essa divergente.

4) Supponiamo ora che l'integrale sia convergente e di valore $I\in\mathbb{R}$.
Riscriviamo la successione delle somme parziali:

$$s_n = f(n_0) + \cdots + f(n) = f(n_0) + \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k)\right) - f(n+1)\,.$$

Essendo l'integrale convergente ed f definitivamente positiva, necessariamente essa sarà infinitesima, per cui $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1)=0$. Allora:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = f(n_0) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0+1}^{n+1} f(k)\,.$$

Applicando il lemma otteniamo ora:

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq f(n_0) + \lim_{n\to+\infty} \int_{n_0}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x = f(n_0) + I\,,$$

per cui la serie è convergente (ed ha somma non superiore a $f(n_0)+I$).

5) Se la serie è divergente, l'integrale non può essere convergente, altrimenti avremmo contraddizione con 4); quindi, essendo l'integrale regolare, sarà anch'esso divergente.

6) Rimane da dimostrare le disuguaglianze (1.2), supponendo che serie e integrale siano convergenti.
Essendo la serie a termini positivi, la successione delle somme parziali è crescente, per cui essa approssima la somma della serie per difetto, cioé vale

$$s_n \leq s \qquad \Leftrightarrow \qquad s - s_n \geq 0\,.$$

La prima disuguaglianza è così mostrata. Per la seconda, abbiamo:

$$s - s_n = \left(\lim_{m\to+\infty} s_m\right) - s_n = \lim_{m\to+\infty} (s_m - s_n) =$$

[10] Infatti, se non sapessimo che l'integrale è regolare, dall'esistenza del limite a destra, che è il limite di una successione, non seguirebbe automaticamente l'esistenza di quello a sinistra, che è invece il limite di una funzione (si riveda il paragrafo **??**).

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{k=n_0}^{m} f(k) - \sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m} f(k) =$$

$$= \left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right) + 0 = \left(\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m} f(k)\right) + \lim_{m\to+\infty} f(m+1) =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{m+1} f(k) \underset{\text{(per lemma)}}{\leq} \lim_{m\to+\infty}\int_{n}^{m+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{n}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad . \qquad \square$$

1.2.13

Utilizzare il teorema precedente per stabilire il carattere della serie armonica generalizzata (già discussa in 1.2.6).

1.2.14 Carattere di $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$

Teor. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}$ *converge se e solo se:* $\alpha>1$ *oppure* $\begin{cases}\alpha=1\\ \beta>1\end{cases}$.
In tutti gli altri casi la serie diverge.

Dim. Per $\begin{cases}\alpha=0\\ \beta\leq 0\end{cases}$ e per $\alpha<0$, si nota che il termine generale della serie non è infinitesimo, per cui la serie non può convergere; trattandosi di una serie a termini positivi, non può essere irregolare e sarà quindi divergente.
Negli altri casi, si può applicare il teorema su serie e integrali. □

1.3 Somme di serie convergenti

Piuttosto di rado si riesce a determinare esattamente la somma di una serie convergente (come accade ad esempio per la serie geometrica). In generale bisogna accontentarsi di determinare il valore della somma in modo approssimato; introduciamo meglio il problema.

1.3.1 Resto m–esimo e approssimazioni

Sia $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *convergente. Il resto m–esimo della serie è definito da:*

$$R_m := s - s_m \ ,$$

dove s *ed* s_m *denotano rispettivamente: la somma della serie e la sua somma parziale m–esima.*

Si noti che *il resto è una successione infinitesima*; infatti, per definizione di serie convergente:

$$\lim_{m\to+\infty}(s-s_m)=s-s=0\,.$$

Ci si può ora porre il problema di determinare m in modo che R_m risulti, in valore assoluto, più piccolo di un prefissato $\delta>0$.
Se si riesce a determinare tale valore m, allora si dirà che *il valore s_m approssima la somma della serie s con un errore inferiore a δ*.
Nel caso si riesca inoltre a stabilire che $s_m>s$ o $s_m<s$, si dirà che *il valore s_m approssima la somma della serie per eccesso* o *per difetto* (rispettivamente).

Osservazione
Fissato $m>n_0$, per $n>m$ abbiamo:

$$s_n=\sum_{k=n_0}^{n}a_k=\sum_{k=n_0}^{m}a_k+\sum_{k=m+1}^{n}a_k=s_m+\sum_{k=m+1}^{n}a_k\,.$$

Risulta allora:

$$R_m=s-s_m=\left(\lim_{n\to+\infty}s_n\right)-s_m=\lim_{n\to+\infty}\left(s_m+\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right)-s_m=s_m+\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=m+1}^{n}a_k\right)-s_m=\sum_{k=m+1}^{+\infty}a_k\,.$$

Dunque il resto di una serie convergente è esso stesso una serie, che differisce dalla serie di partenza per la soppressione di un numero finito di termini (precisamente: i primi $m-n_0+1$ termini).

1.3.2 Approssimazione di serie a segno alterno

Nel caso una data serie convergente risulti a segno alterno e soddisfi le ipotesi del criterio di Leibnitz (cosa che non tutte le serie convergenti a segno alterno fanno!), per determinarne un valore approssimato si può sfruttare la parte *ii*) dell'enunciato 1.2.11.

Consideriamo, ad esempio, il problema di determinare con errore inferiore a $\delta=1/100$ la somma s della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$, che verifica le ipotesi del criterio di Leibnitz. In base a 1.2.11–*ii*), il resto m–esimo soddisfa $|R_m|\le b_{m+1}$ con $b_n=1/n^5$, per cui $|R_m|\le\dfrac{1}{(m+1)^5}$.
Determiniamo m in modo che quest'ultimo valore risulti inferiore a δ:

$$\frac{1}{(m+1)^5}<\frac{1}{100}\quad\Leftrightarrow\quad(m+1)^5>100\quad\Leftrightarrow\quad m>\sqrt[5]{100}-1\,.$$

Con una calcolatrice si trova che $\sqrt[5]{100}-1=1{,}51\ldots$; allora il più piccolo intero m tale che $m>\sqrt[5]{100}-1$ (e quindi $b_{m+1}<1/100$) è $m=2$. [11]

[11] E' **importante** segnalare un modo alternativo di determinare il valore m (particolarmente utile agli esami, dove non si dispone di calcolatrice!).
Invece di risolvere la disequazione in m come abbiamo fatto sopra, si può semplicemente andare a calcolare i valori di b_{m+1} per valori di m crescenti, fino a che risulta $b_{m+1}=\frac{1}{(m+1)^5}<\frac{1}{100}$.

Questo ci garantisce dunque che $|R_2| \leq b_{2+1} < 1/100$, per cui il valore

$$s_2 = \sum_{n=1}^{2} \frac{(-1)^n}{n^5} = -1 + \frac{1}{2^5} = \frac{-32+1}{32} = -\frac{31}{32}$$

approssima la somma della serie con errore inferiore a $1/100$.
Inoltre, poiché 2 è pari, per 1.2.11 risulta che $s_2 \geq s$ e quindi possiamo concludere che:
il valore $-31/32$ *approssima per eccesso (con errore inferiore al centesimo) la somma della serie assegnata.* Più esplicitamente, ciò significa che il valore s appartiene all'intervallo:

$$\left(-\frac{31}{32} - \frac{1}{100}, -\frac{31}{32}\right) = \left(-\frac{3132}{3200}, -\frac{31}{32}\right).$$

L'esercizio è così concluso, ma pare opportuno riprendere ancora quel che abbiamo fatto con una diversa impostazione formale, per chiarirsi meglio le idee.

Scriviamo la serie assegnata nel seguente modo che, pur essendo formalmente meno preciso, fa "vedere" un po' di più l'oggetto matematico che stiamo trattando:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^5} = -1 + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} - \frac{1}{5^5} + \dots .$$

Vediamo una somma di infiniti termini, alternativamente negativi e positivi e di valore assoluto decrescente e infinitesimo. Se si va a studiare la dimostrazione del criterio di Leibnitz, si capisce che, grazie alle ipotesi, succede che la somma degli infiniti termini che seguono un dato termine è sempre inferiore a quest'ultimo. Perciò, per avere un'appossimazione della somma della serie con errore inferiore a δ basta trovare il primo termine di modulo inferiore a δ e approssimare la somma della serie con la somma di tutti i termini lo precedono.
Esaminando i moduli dei termini della serie in sequenza (cioé: 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{243}\dots$) si vede che il primo ad essere inferiore a $1/100$ è il terzo: $\frac{1}{243}$. Allora, se consideriamo la somma dei termini che lo precedono ($-1 + \frac{1}{2^5} = -\frac{31}{32}$), otteniamo un'approssimazione della somma della serie con errore inferiore a $\frac{1}{243}$, quindi inferiore anche al valore $\delta = 1/100$, che avevamo stabilito come errore massimo da non superare. Inoltre, dato che il primo termine che non abbiamo sommato è $-\frac{1}{3^5} < 0$, il valore della somma della serie è in realtà inferiore a $-31/32$, quindi abbiamo approssimato la somma della serie per eccesso.

Se avessimo voluto determinare la somma della serie con maggior precisione, ad esempio con errore inferiore a $1/1000$, osservato che $\frac{1}{243} > \frac{1}{1000}$ avremmo considerato il termine successivo, osservando che:

$$\frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}.$$

Per $m=1$ si trova $b_{1+1} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} > \frac{1}{100}$ mentre per $m=2$:

$$b_{2+1} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} < \frac{1}{100}.$$

In questo modo si vede che $m=2$ è il più piccolo intero tale che $b_{m+1} < \frac{1}{100}$.

Avremmo allora concluso che il valore di $-1+\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}$ approssima la somma della serie con errore inferiore a $1/1000$. In questo caso l'approssimazione sarebbe stata per difetto perché il primo termine che non sommiamo (cioé $\frac{1}{4^5}$) ha segno positivo e quindi la somma di tutti gli infiniti termini della serie risulta superiore ad esso.

1.3.3 Approssimazione sfruttando integrali

Vediamo come può essere sfruttato il teorema 1.2.12 per stimare il resto m–esimo d'una serie. Consideriamo, ad esempio, il problema di determinare la somma di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^9}$ con errore inferiore a 10^{-3}.

Indicate rispettivamente con s e s_m la somma e la somma parziale m–esima della serie, applichiamo 1.2.12 con $f(x)=\frac{1}{x^9}$. Risulta:

$$0 \le s - s_m \le \int_m^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_m^{+\infty} \frac{1}{x^9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8m^8}\,.$$

Dunque, affinché sia $s-s_m<10^{-3}$, basta che sia:

$$\frac{1}{8m^8} < \frac{1}{1000} \qquad \Leftrightarrow \qquad m^8 > \frac{1000}{8} = 125\,.$$

Si nota che $2^8=256>125$, perciò:

$$s - s_2 \le \frac{1}{8\cdot 256} = \frac{1}{2048}\,.$$

Se calcoliamo

$$s_2 = \sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n^9} = \frac{1}{1^9}+\frac{1}{2^9} = 1+\frac{1}{512} = \frac{513}{512}\,,$$

possiamo esser certi che approssimando s con $513/512$ commettiamo un errore inferiore a $1/1000$ (anzi, inferiore a $1/2048$). Inoltre, poiché $s\ge s_2$, l'approssimazione è per difetto. Più precisamente, possiamo dire con certezza che:

$$\frac{513}{512} \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^9} \le \frac{513}{512}+\frac{1}{2048}\,.$$

1.4 Serie di Taylor

Sia f una funzione reale di variabile reale, derivabile infinite volte in un punto x_0, interno al suo dominio. Allora è possibile considerare la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,,$$

dove per convenzione si deve intendere $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$ e $(x-x_0)^0=1$, anche per $x=x_0$ [12].
Tale serie ha come somma parziale m–esima il polinomio di Taylor d'ordine m di f centrato in x_0 ed è quindi detta *serie di Taylor di f centrata in x_0* (*serie di MacLaurin di f* se $x_0=0$).

Pare naturale chiedersi se tale serie è sempre convergente e, in caso di convergenza, se la somma è f, come pare spontaneo attendersi. Sebbene non sia qui possibile una trattazione completa della questione, che coinvolgerebbe l'introduzione di vari concetti e teoremi, è interessante considerare alcuni esempi significativi.

1.4.1 Serie esponenziale

Teorema *La serie di MacLaurin della funzione $f(x)=e^x$ converge ad $f(x)$ per ogni valore reale di x; in simboli:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Dim. Per $x=0$, la serie a destra ha tutti i termini nulli tranne il primo e l'uguaglianza si riduce a $e^0=1$, vera.
Supponiamo $x\neq 0$ ed $m\geq 0$; essendo $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, per la formula di MacLaurin di f con resto di Lagrange, esiste un valore $c(x,m)$, compreso fra 0 ed x, tale che:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \frac{f^{(m+1)}(c(x,m))}{(m+1)!}\, x^{m+1}\,.$$

Inserendo i valori e spostando alcuni termini:

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} = e^x - \frac{e^{c(x,m)}}{(m+1)!}\, x^{m+1}\,. \tag{1.3}$$

Essendo $c(x,m)$ compreso fra 0 ed x ed essendo l'esponenziale crescente, sarà:

$$e^{c(x,m)} \leq k := e^{\max\{0,x\}} \qquad \forall\, m\geq 0\,.$$

Ne segue:

$$\left|\frac{e^{c(x,m)}}{(m+1)!}\, x^{m+1}\right| = \frac{e^{c(x,m)}}{(m+1)!}\, |x|^{m+1} \leq \frac{k\,|x|^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \forall\, m\geq 0\,.$$

Applicando il criterio del rapporto alla successione $\frac{k\,|x|^{m+1}}{(m+1)!}$, si verifica che essa è infinitesima per qualunque $x\neq 0$. Allora da (1.3) si ottiene:

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} = \lim_{m\to+\infty}\left(e^x - \frac{e^{c(x,m)}}{(m+1)!}\, x^{m+1}\right) = e^x - 0 = e^x\,,$$

[12] Ciò non toglie che, nel calcolo dei limiti, 0^0 sia una forma indeterminata. Il punto è che, se $x=x_0$, il primo termine della serie sarebbe $f(x_0)$ e bisognerebbe scrivere la serie indicando separatamente il primo termine, cioé: $f(x_0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,0^n = f(x_0)$. Per snellire la scrittura, si conviene che, solo in questo contesto, valga $0^0=1$.

che per definizione equivale alla tesi. □

Osservazione

Dunque si può esprimere il numero di Nepero anche come:

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

1.4.2 Altre serie di MacLaurin

Teorema

$$(a)\quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad (b)\quad \mathrm{Ch}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$(c)\quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad (d)\quad \mathrm{Sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

$$(e)\quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \qquad \forall\, x \in (-1,1]\,,$$

$$(f)\quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall\, x \in [-1,1]\,,$$

Osservazioni

1) Per le prime 4 serie la dimostrazione è analoga a quella della serie esponenziale e può essere svolta come esercizio.
Per la altre due, la dimostrazione è più complessa ed usa un altro approccio.

2) Si sono considerate serie di MacLaurin perché sono quelle di applicazione più frequente, ma naturalmente si potrebbero considerare anche le serie di Taylor con centro $x_0 \neq 0$.

3) Non sempre le serie di Taylor convergono per ogni x, come mostrano le serie (e) e (f).

4) Anche se la serie di Taylor di una funzione f converge, non è detto che abbia per somma proprio $f(x)$. Ad esempio, si consideri:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0\,. \end{cases}$$

Si potrebbe verificare che $f^{(n)}(0)=0$ per ogni n, per cui la serie di MacLaurin di f è la serie di termine generale 0, che converge per ogni $x \neq 0$ con somma $0 \neq f(x)$.

1.5 Cenno alle serie di numeri complessi ed all'esponenziale complesso

Anche per successioni $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ a valori complessi (cioé le funzioni definite per ogni naturale $n\geq n_0$ con codominio $\mathbb{C}$), si può formulare il concetto di limite, per cui si può parlare anche di serie di numeri complessi e definire il concetto di convergenza (che corrisponderà alla convergenza della successione delle somme parziali, come per le serie di numeri reali).
Si dimostra che per le serie di numeri complessi continua a valere il criterio di convergenza assoluta (la convergenza della serie dei moduli garantisce la convergenza) e si può verificare che risulta assolutamente convergente (per ogni $z\in\mathbb{C}$): $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.
Poiché tale serie dipende formalmente da $z\in\mathbb{C}$ nello stesso modo in cui la serie 1.4.1 dipende formalmente da $x\in\mathbb{R}$, pare naturale definire l'esponenziale di un numero complesso proprio mediante tale serie, cioé porre:

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad \forall\, z\in\mathbb{C}\ .$$

Si potrebbe poi dimostrare[13] che da tale definizione segue la proprietà:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2} \qquad \forall\, z_1, z_2\in\mathbb{C}\ .$$

Allora, denotando $x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$ e ponendo $z_1=x$, $z_2=iy$, si ottiene:

$$e^z = e^x\cdot e^{iy}\ .$$

Ma per definizione vale:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iy)^n}{n!} = \frac{(iy)^0}{0!}+\frac{(iy)^1}{1!}+\frac{(iy)^2}{2}+\ldots = 1+iy-\frac{y^2}{2}-i\,\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\,\frac{y^5}{5!}+\ldots =$$

$$= \left(1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4!}+\ldots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\ldots\right) = \cos y + i\sin y\ ,$$

dove nell'ultimo passaggio si sono usate le serie (a) e (c) del teorema 1.4.2.
Abbiamo così riottenuto una formula che, parlando di numeri complessi, avevamo dato senza spiegazioni:

$$e^z = e^x\,(\,\cos y + i\sin y\,)\ .$$

[13] Una traccia dela dimostrazione è presente, ad esempio, su [BPS1], pag. 255.