

Analisi Matematica I, Geometria e Algebra Lineare: Dimostrazioni

Sophie Cavallini

9 febbraio 2020

Formula di De Moivre per il prodotto

Siano $z, w \in \mathbb{C}$, dove $z = \rho_1 [\cos \theta_1 + i \sin \theta_1]$, $w = \rho_2 [\cos \theta_2 + i \sin \theta_2]$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) + i(\cos(\theta_1) \sin(\theta_2) + \cos(\theta_2) \sin(\theta_1))] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Dim: Sia $t \in \mathbb{R}$ e scriviamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\vec{u} + t\vec{v}|^2 = (\vec{u} + t\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\vec{v}) = \\ &= t\vec{u} \cdot \vec{u} + t\vec{u} \cdot \vec{v} + t\vec{u} \cdot \vec{v} + t^2\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + t^2|\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

Cioè

$$|\vec{u}|^2 + 2t\vec{u} \cdot \vec{v} + t^2|\vec{v}|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ciò accade

$$\iff (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \leq 0 \iff (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \iff |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Cioè la tesi è dimostrata.

Rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari

Siano V_n, V_m spazio vettoriale di dim n e m rispettivamente. Sia $L : V_n \rightarrow V_m$ un'applicazione lineare. Siano poi fissate due basi $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ in V_n e $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\}$ e in V_m si scrivano infine dato $\vec{v} \in V_m, \vec{v} = x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n$ e $L(\vec{u}) = y_1\vec{v}_1 + \dots + y_m\vec{v}_m = \vec{v}$. Allora, posto

$$\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \exists! A \in M_m \mid \vec{v} = A\vec{x}$$

Se cambiassimo le basi cambierebbe la matrice A.

Dim: Si consideri il vettore $L(\vec{u}_1) \in V_m$. Allora per opportuni $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1} \in \mathbb{R}$ vale

$$L(\vec{u}_1) = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + a_{31}\vec{v}_3 + \dots + a_{m1}\vec{v}_m$$

Analogamente:

$$L(\vec{u}_2) = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 + \dots + a_{m2}\vec{v}_m$$

\vdots

$$L(\vec{u}_n) = a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \dots + a_{mn}\vec{v}_m$$

per opportuni $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n$. Si noti che tale numeri sono univocamente determinati in quanto le coordinate di ogni fissato vettore rispetto a una base assegnata sono uniche. Sia ora $\vec{u} = x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n \in V_n$. Vale:

$$\begin{aligned} L(\vec{u}) &= L\left(\sum_{j=1}^n x_j \vec{u}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(\vec{u}_j) = \sum_{j=1}^n \left(x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{v}_i\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \vec{v}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) \vec{v}_i = \sum_{i=1}^m y_i \vec{v}_i \end{aligned}$$

Dunque le componenti y_1, \dots, y_m di $L(\vec{u})$ sono date da $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, cioè posto $\vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ vale $\vec{y} = A\vec{x}$ con $A := (a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$. Tale matrice è unica, date le basi scelte per le precedenti considerazioni.

Determinante e sue proprietà

Sia $A \in M_{nn}$. Allora:

1. Se A ha 1 riga o 1 colonna di zeri, allora $\det A = 0$.
2. Scambiando due righe, o due colonne il determinante non cambia il segno. (P. ALTERNANZA)
3. Se A ha due righe, o due colonne uguali, allora $\det A = 0$

4. Sia $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$ dove $\vec{a}_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, \vec{a}_n = (a_{n1}, \dots, a_{nn})$, sia $\vec{b}_1 = (b_1, \dots, b_n)$ e siano

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora $\det \begin{pmatrix} \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$. Analogamente per le altre righe, o colonne. (P. MULTILINEARITÀ)

5. Se a una riga (rispettivamente colonna) si aggiunge una combinazione lineare delle altre righe (rispettivamente colonne) il determinante non cambia. (MOSSE DI GAUSS)
6. Se le righe, o le colonne, di A sono vettori linearmente dipendenti allora $\det A = 0$.

Dim:

1. Sviluppare lungo la riga, o la colonna, di zeri.
2. Vera per $n = 2$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc; \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = bc - ad = -\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(idem per le colonne).

Per $n = 3$ si sviluppi lungo la riga, o la colonna, rimasta invariata, e si usi il risultato per $n = 2$. Per dimensioni superiori si procedi ricorsivamente.

3. Se A ha ad esempio due righe uguali, $\det A$ è invariato se le scambio tra loro, ma per la 2. deve invece cambiare segno cioè $\det A = -\det A$, cioè $\det A = 0$.

4.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} &= (\lambda a_{11} + \mu b_1) A_{11} + \dots + (\lambda a_{1n} + \mu b_n) A_{1n} = \\ &= \lambda (a_{11} A_{11} + \dots + a_{1n} A_{1n}) + \mu (b_1 A_{11} + \dots + b_n A_{1n}) = \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Lavoriamo ad esempio sulla prima riga, vale:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} &= \\ &= \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \lambda_2 \det \begin{pmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Si assuma ad esempio $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$. Ragionando come prima:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \lambda_2 \det \begin{pmatrix} \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \det \begin{pmatrix} \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = 0$$

Formula esplicita per l'inversa

Sia $A \in M_{nn}$. Essa è invertibile $\iff \det A \neq 0$. Se ciò accade si ha inoltre che l'inversa, indicata con A^{-1} , è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

dove, data una matrice $B = (b_{ij})$ la sua matrice trasposta B^T è data da $B^T (b_{ij})$ ovvero dalla matrice ottenuta da B scambiando le righe con le colonne e A_{ij} sono i complementi algebrici.

Dim: Supponiamo che $\exists A^{-1}$. Allora:

$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = (\det A) (\det A^{-1})$. Dunque $\det A \neq 0$ (inoltre $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$).

Viceversa, supponendo $\det A \neq 0$ verifichiamo che la matrice A^{-1} esplicitamente scritta soddisfi $A \cdot A^{-1} = I_n$ (si procede analogamente per mostrare che $A^{-1} \cdot A = I_n$).

Sia b_{ki} l'elemento di posto k, i di $A \cdot A^{-1}$. Si ha:

$$b_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \left(\frac{1}{\det A} A_{ij} \right) = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{ij}$$

Sia ora $k = i$. Si ha:

$$b_{kk} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{kj} A_{kj} = \frac{\det A}{\det A} = 1, \forall k$$

Sia ora $k \neq 1$. Mostro che $b_{ki} = 0$.

Infatti sia B la matrice ottenuta da A sostituendo alla riga i una copia della riga k . Allora $\det B = 0$. Ma sviluppando $\det B$ lungo la sua i -esima riga ottengo:

$$0 = \det B = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \dots + a_{kn}A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{kj}A_{ij}$$

Cioè $b_{k1} = 0$ se $k \neq i$.

Teorema nullità più rango

Sia $L : V_n \rightarrow V_m$ un'applicazione lineare. Allora $\dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = n$.

Dim: Sia $k = \dim[\ker(A)]$ ($k \leq n$). Siano $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ una base di $\ker(L)$ possiamo allora scegliere $n - k$ ulteriori vettori tra loro indipendenti, indicati con $u_{k+1}, \dots, u_n | \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ siano una base di V_n .

Sia ora $\vec{v} \in V_n \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} | \vec{v} = \alpha_1 \vec{w}_1 + \dots + \alpha_k \vec{w}_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n$. Si ha $L(\vec{v}) = \alpha_1 L(\vec{w}_1) + \dots + \alpha_k L(\vec{w}_k) + \alpha_{k+1} L(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n L(u_n) = \alpha_{k+1} L(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n L(u_n)$. Ne segue che la $\dim(\operatorname{Im}(L)) \leq n - k$.

Mostro che vale l'uguale nella precedente relazione.

Per assurdo, siano $L(u_{k+1}), \dots, L(u_n)$ linearmente dipendenti. Allora:

$\exists \beta_{k+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli e $|\vec{0} = \beta_{k+1} L(u_{k+1}) + \dots + \beta_n L(u_n) = L(\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n)$, cioè $\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n \in \ker(L)$.

Assurdo perchè per costruzione nessuna combinazione lineare di u_{k+1}, \dots, u_n può appartenere a $\ker(L)$.

Per cui $\dim(\operatorname{Im}(L)) = n - k \implies \dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = n$. Se $k = 0$. Si ha $\ker(L) = \{\vec{0}\}$ dunque non sono presenti i vettori \vec{w}_i mentre vi sono n vettori \vec{u} e la \dim è identica. Se $k = n$ $\dim(\ker(L)) = n$, cioè vi sono n vettori $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in \ker(L)$ indipendenti. Ma allora tale insieme è una base di V_n (che ha dimensione n per Hp). Ma allora $\forall \vec{v} \in V_n \exists \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R} | \vec{v} = \gamma_1 \vec{w}_1 + \dots + \gamma_n \vec{w}_n$. Allora $L(\vec{v}) = \gamma_1 L(\vec{w}_1) + \dots + \gamma_n L(\vec{w}_n) = 0 \forall \vec{v}$. Allora $\operatorname{Im}(L) = \{\vec{0}\}$ $\dim(\operatorname{Im}(L)) = 0$. Per cui $\dim(\ker(L)) + \dim(\operatorname{Im}(L)) = 0$.

Condizione di diagonalizzabilità in termini di autovalori

Sia $A \in M_{nn}$. Allora A è diagonalizzabile su \mathbb{R} (rispettivamente su $\mathbb{C} \iff \mathbb{R}^n$ (rispettivamente su \mathbb{C}^n) ha una base di autovettori. In tal caso, detta $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ una tale base e detti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli

autovalori corrispondenti, vale $\Lambda = S^{-1}AS$ con $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ e $S := (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Dim: Sia A diagonalizzabile ad esempio su \mathbb{R} . Allora esistono Λ diagonale e S invertibile $| \Lambda =$

$S^{-1}AS$. Sia $S = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ e sia $A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Allora da $\Lambda = S^{-1}AS$ si ottiene

$S\Lambda = AS$. D'altronde $S\Lambda = (\lambda_1 \vec{a}_1, \dots, \lambda_n \vec{a}_n)$, e sappiamo che $AS = (A\vec{a}_1, \dots, A\vec{a}_n)$ si riscrive come $A\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1, \dots, A\vec{a}_n = \lambda_n \vec{a}_n$. Cioè gli $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sono gli n autovettori di A . Ma per costruzione tali vettori sono indipendenti, perchè S è invertibile.

La dimostrazione del viceversa segue ripetendo i passaggi nel verso opposto.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato e infinito. Allora A ammette almeno un punto di accumulazione.

Dim: ($n = 2$). A è limitato. Dunque A è contenuto in un opportuno rettangolo $[p, q] \times [r, s] := \{(x, y), x \in [p, q], y \in [r, s]\}$. Dividiamo $[p, q]$ e $[r, s]$ in due parti uguali individuano così 4 rettangoli di ugual area. In almeno uno di questi, indicato con $[p_1, q_1] \times [r_1, s_1]$, cadono infiniti punti di A . Iterando la procedura individuo rettangoli della forma $[p_n, q_n] \times [r_n, s_n]$ dove, ad esempio sull'asse x : $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ e $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_n$. Inoltre $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n \leq q_n \leq \dots \leq q_2 \leq q_1$.

Inoltre $q_n - p_n = \frac{q-p}{2^n}$ e, se $h, k \leq n$, vale $p_h \leq p_n \leq q_n \leq q_k$. Sia ora $P := \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, $Q := \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Ma allora q_k è un maggiorante di P , cioè $\sup P \leq q_k \forall k$.

Ma allora il numero $\sup P$ è un minorante di Q , e quindi si ha $\sup P \leq \inf Q$. D'altronde, $\inf Q \leq q_n \forall n$, $\sup P \geq p_n \forall n$ e quindi $0 \leq \inf Q - \sup P \leq q_n - p_n = \frac{q-p}{2^n} \forall n$. Ciò mostra che $\inf Q - \sup P = 0$, cioè $\inf Q = \sup P$. Si ponga $\bar{x} = \inf Q = \sup P$.

Procedendo analogamente sulle y individuo un valore \bar{y} . Mostro che (\bar{x}, \bar{y}) è di accumulazione per A . Infatti notiamo che $(\bar{x}, \bar{y}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} R_k$, dove R_k sono i rettangoli prima individuati. Sia ora $B_R((\bar{x}, \bar{y}))$

fissata. È chiaro che, per n abbastanza grande $R_n \subset B_R((\bar{x}, \bar{y}))$. Ma per R_n per costruzione contiene infiniti punti di A , dunque lo stesso vale per $B_R((\bar{x}, \bar{y}))$. Ma R è arbitrario, dunque (\bar{x}, \bar{y}) è di accumulazione per A .

Il numero e

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \forall n$ è una successione che ammette limite finito indicato con e .

Dim: Mostro che $\{a_n\}$ è crescente e successivamente che è limitata. Calcolo:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n-1})^{-1}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} \geq \\ &\geq \frac{1 - n \frac{1}{n^2}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n-1} = 1 \quad \forall n \geq 2 \implies \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1 \end{aligned}$$

dunque è crescente.

Mostro che $\{a_n\}$ è limitata. Sia infatti $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Si ha $b_n > a_n \forall n$. Mostro che b_n è decrescente. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^n} = \frac{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n+1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n+1})^n} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}{(\frac{n^2-1}{n^2})^n} = \\ &= \frac{\frac{n+1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n} < \frac{\frac{n+1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2-1}} \end{aligned}$$

Ma $1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$. Quindi $\frac{b_n}{b_{n+1}} < \frac{\frac{n+1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2-1}} < \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+1}{n}} = 1 \forall n \geq 2$. Dunque b_n è monotona decrescente per cui a_n è limitata e sta tra 2 e 3. Con n sufficientemente grande si ottengono un buon numero di cifre di e .

Teorema degli zeri

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ si supponga $f(a)f(b) < 0$. Allora $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = 0$.

Dim: Divido $[a, b]$ in due parti di uguale ampiezza, $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$. Se $f(\frac{a+b}{2})$ la tesi è vera. Altrimenti in esattamente uno di tali sottointervalli cambia il segno della funzione agli estremi. Sia $[a_1, b_1]$ tale intervallo.

Iterando il procedimento ottengo una successione di intervalli $[a_n, b_n] \mid :$

1. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente
3. $f(a_n)f(b_n) < 0$

(a meno che si trovi, a un passo finito, uno zero di f)

Da (2) segue che $\{a_n\}, \{b_n\}$ ammettono limiti l_1 e l_2 . Ma $[a_n, b_n]$ è contenuto in $(a, b) \forall n$, dunque le due successioni sono limitate, dunque $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. D'altronde $a_n < b_n \forall n$; quindi $l_1 \leq l_2$. Inoltre da (1) abbiamo che $l_2 - l_1 =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Dunque $l_2 = l_1$ indico con l tale numero. Si ha, per la continuità di f in l $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)f(b_n) = f(l)^2$. D'altronde, da (3), $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$ (per il th. della permanenza del segno), cioè $f(l)^2 \leq 0$, cioè $f(l) = 0$. Dunque la tesi è verificata.

Teorema di Heine-Cantor

Sia $f : K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con K compatto e f continua su K . Allora f è uniformemente continua su K .

Dim: Per assurdo. Suppongo f non uniformemente continua su K . Allora $\exists \epsilon > 0 \mid \forall \delta \exists$ punti $x_\delta, y_\delta \in K$ con $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$, ma $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \epsilon$. Scelgo ora $\delta = \delta_k = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ e indichiamo con x_k e y_k : corrispondenti x_δ, y_δ . Essendo K compatto \exists una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}$ che converge, per $h \rightarrow +\infty$, a $x \in K$ (si ricorda che K essendo compatto è compatto per successioni). D'altronde: $|y_{k_h} - x| = |y_{k_h} - x_{k_h} + x_{k_h} - x| \leq |y_{k_h} - x_{k_h}| + |x_{k_h} - x| \leq \frac{1}{k_h} + |x_{k_h} - x| \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} |x_{k_h} - x| = 0$, dato che $x_{k_h} \rightarrow x$ per $h \rightarrow +\infty$. Quindi $\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{k_h} + |x_{k_h} - x| = 0$ e anche $\lim_{h \rightarrow +\infty} |y_{k_h} - x| = 0$. Quindi $\lim_{h \rightarrow +\infty} y_{k_h} = x$. Ma allora $|f(x_{k_h}) - f(y_{k_h})| \leq |f(x_{k_h}) - f(x)| + |f(y_{k_h}) - f(x)| \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} 0$ per la continuità di f in $x \in K$. Ma, per l'hp. di assurdo si aveva $|f(x_{k_h}) - f(y_{k_h})| \geq \epsilon \forall h \in \mathbb{N}$, assurdo. La tesi è verificata.

Algebra delle derivate

Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $x_0 \in (a, b)$. Allora sono derivabili in x_0 le funzioni $\lambda f + \mu g$, fg , f/g (quest'ultima se $g(x_0) \neq 0$) e vale:

- $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$;
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (FORMULA DI LEIBNIZ);
- $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$;

Dim:

1.

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda f + \mu g)(x_0 + h) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{h} = \\ & = \frac{(\lambda f)(x_0 + h) + (\mu g)(x_0 + h) - (\lambda f)(x_0) - (\mu g)(x_0)}{h} = \\ & = \lambda \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mu \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) \end{aligned}$$

Perchè essendo f e g sono derivabili in x_0 per hp.

2.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0)g(x_0)}{h} = \\ & = \frac{1}{h} [f(x_0 + h)g(x_0 + h) - f(x_0 + h)g(x_0) + f(x_0 + h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)] = \\ & = f(x_0 + h) \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \\ & \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0), \text{ perchè } f(x_0 + h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0). \end{aligned}$$

Perchè essendo f derivabile in x_0 è continua in tal punto. Dove si è usata l'hp. di derivabilità e il fatto che f , essendo derivabile in x_0 , è in ivi continua.

3. Calcolo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)} \right] = \frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{hg(x_0 + h)g(x_0)} = \\ &= -\frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

In quanto g è derivabile dunque continua in x_0 .

Dunque:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0) \cdot \frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

Derivata della funzione composta

Siano $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R} \mid g \circ f$ sia ben definita $\forall x \in (a, b)$. Si assuma che f sia derivabile in $x_0 \in (a, b)$ e che g sia derivabile in $f(x_0) \in (c, d)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

In notazione di Leibniz, con $y = f(x)$ e $z = g(x)$: $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Dim: g è differenziabile in $y_0 := f(x_0)$, cioè $g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + o(k)$ per $k \rightarrow 0$. Pongo $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$. Allora $k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (per la continuità di f in x_0) e $\frac{k}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)$. Si noti che $y_0 + k = f(x_0 + h)$. Allora:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0))}{h} &= \frac{g(y_0 + k) - g(y_0)}{h} = \frac{1}{h}(g'(f(x_0))k + o(k)) = \\ &= g'(f(x_0)) \cdot \frac{k}{h} + \frac{o(k)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(f(x_0))f'(x_0) \end{aligned}$$

($\frac{o(k)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$) Dato che $\frac{k}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0)$ e, quindi, $\frac{o(k)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Teorema di De l'Hospital

Siano $f, g \in (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (a, b finiti o infiniti) e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ oppure a $+\infty$ oppure a $-\infty$ e inoltre f e g derivabili in (a, b) e $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (con $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \neq 0$).

Allora $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Analogo risultato vale per $x \rightarrow b^-$.

Dim: Caso $a \in \mathbb{R}$, forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

1. Caso $L \in \mathbb{R}$. Per hp. vale $\forall \epsilon > 0 \exists t_0 \mid$ se $t \in (a, t_0)$ vale $L - \epsilon \leq \frac{f'(t)}{g'(t)} \leq L + \epsilon$. D'altronde fissati y e $x \mid a < y < x < t_0$ vale il th. di Cauchy nell'intervallo $[y, x]$. Allora $\exists c \in [y, x] \mid \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Per costruzione $c \in (a, t_0)$ e dunque $L - \epsilon \leq \frac{f'(c)}{g'(c)} \leq L + \epsilon$, e dunque $L - \epsilon \leq \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \leq L + \epsilon \forall y, x \mid a < y < x < t_0$. Per $y \rightarrow a$, si ha che usando il fatto che $\lim_{y \rightarrow a^+} f(y) = \lim_{y \rightarrow a^+} g(y) = 0$, $L - \epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \epsilon \forall x \in (a, t_0)$. Dunque per def. di limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. $L = +\infty$ (il caso $L = -\infty$ è analogo).

Per definizione vale $\forall M \exists t_0 \mid \frac{f'(t)}{g'(t)} \geq M$ se $t \in (a, t_0)$. Procedendo esattamente come prima si ottiene, se $a < y < x < t_0$ vale $\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \geq M$. Per $y \rightarrow a^+$ si ha allora $\frac{f(x)}{g(x)} \geq M$ se $a < x < t_0$. Per definizione di limite vale allora $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} +\infty$.

Integrabilità delle funzioni continue

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$. Allora f è integrabile su $[a, b]$.

Dim: Sappiamo che f è uniformemente continua su $[a, b]$, cioè $\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) \mid |f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$ se $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Sia \mathcal{P} una partizione e si assuma che, $\max\{x_i - x_{i-1}, i = 1 \dots n\} \leq \delta$. Siano x'_i, x''_i punti di massimo e minimo per f in $[x_{i-1}, x_i]$ (tali punti \exists per il th. di Weierstrass). Vale allora, per tali partizioni

$$0 \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n f(x'_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f(x''_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n [f(x'_i) - f(x''_i)](x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \epsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a)
\end{aligned}$$

Abbiamo mostrato che se l'ampiezza di \mathcal{P} , cioè il numero $\max\{x_i - x_{i-1}, i = 1 \dots n\}$ è $\leq \delta$ allora $0 \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \leq \epsilon(b - a)$. Ma allora non è possibile che $\inf\{S(\mathcal{P}, f, \mathcal{P} \text{ partizione})\} < \sup\{s(\mathcal{P}, f), \mathcal{P} \text{ partizione}\}$ perchè se così fosse varrebbe $S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) \geq \inf\{S(\mathcal{P}, f), \mathcal{P} \text{ partizione}\} - \sup\{s(\mathcal{P}, f), \mathcal{P} \text{ partizione}\} \geq 0$. Quindi la tesi è valida.

Teorema della media integrale

Sia f continua su $[a, b]$. Allora $\exists c \in [a, b] \mid \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$.

Dim: La tesi si può riscrivere come $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

Siano M, m il max e il min rispettivamente di f in $[a, b]$. Allora

$$m(b - a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M \, dx \leq M(b - a)$$

Allora $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$. Per il th. dei valori intermedi valido essendo f continua,

$$\exists c \in [a, b] \mid f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Primo teorema del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$ secondo Riemann. Sia G una sua primitiva in (a, b) , cioè abbia $G'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$. Si assuma che $G(a^+) := \lim_{x \rightarrow a^+} G(x)$, $G(b^-) := \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) \exists$ finiti. Allora:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b^-) - G(a^+)$$

Dim: Pongo $G(a) := G(a^+)$ e $G(b) := G(b^-)$. Con tale definizione G è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Sia \mathcal{P} una partizione di $[a, b]$. Allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n [G(x_i) - G(x_{i-1})] \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \sum_{i=1}^n G'(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

per opportuni $\hat{x}_i \in (x_{i-1}, x_i)$ e applicando Lagrange su $[x_{i-1}, x_i]$ per G . Ma il membro di destra della formula è una somma integrale di f e sappiamo che essa tende a $\int_a^b f(x) dx$ (essendo f per hp. integrabile) se $A(\mathcal{P}) \rightarrow 0$. Ma allora

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{A(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\hat{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx$$

Dunque la tesi è verificata.

Secondo teorema del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Sia $c \in [a, b]$ e si ponga $F(x) := \int_c^x f(t) dt$.

Allora F è continua in $[a, b]$. Inoltre se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$. F viene chiamata funzione integrale e f funzione integranda.

Dim: f è per hp. limitata (essendo integrabile), dunque $\exists M \mid |f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. Allora supponendo ad esempio $x > x_0$, vale

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} 0 \end{aligned}$$

Analogamente $x \rightarrow x_0^-$. Dunque $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} F(x_0)$, cioè F è continua in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è arbitrario, dunque F è continua in $[a, b]$. Sia ora f continua in x_0 . Allora dato $h > 0$ si ha:

$$\frac{1}{h} [F(x_0 + h) - F(x_0)] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

La tesi sarà dimostrata se mostriamo che $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Vale:

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt$$

Quindi se $h > 0$, vale:

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \quad (1)$$

So che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \mid |f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$ se $|t - x_0| \leq \delta$ (f è continua in x_0).

Ma allora, se $h > 0$ è sufficientemente piccolo si ha, da (1):

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dx = \frac{1}{h} \cdot \epsilon \cdot h = \epsilon$$

Analogamente per $h < 0$, ne segue che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)$, cioè la tesi è vera.