RECAP - TEORIA

SPAZIO VETTORIALE

- sono in esso definite le operazioni di SOMMA & PRODOTTO

COMBINAZIONE DI VETTORI

- DIPENDENTI $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots \lambda_n \underline{v}_n = 0$
- INDIPENDENTI $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots \lambda_n \underline{v}_n = 0$ solo per $\lambda_1 \dots \lambda_n = 0$

BASE un set di vettori $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una BASE di V se:

- $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ sono INDIPENDENTI
- E $\forall \underline{v} \in V \ \exists \ \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

SPAZIO VETTORIALE CON PRODOTTO SCALARE

è uno spazio in cui sono definite le seguenti proprietà per un'operazione $\underline{v} \cdot \underline{w}$

- $\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{v}$
- $\underline{u}(\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{u} \cdot \underline{w}$
- $\lambda \underline{v} \cdot \underline{w} = \lambda(\underline{v} \cdot \underline{w})$
- $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$

MODULO DEL VETTORE ($\underline{v} \in V$ (con prodotto scalare)

- $|v| \geq 0$
- $|\lambda \underline{v}| = |\lambda||\underline{v}|$
- $|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$ (chauchy-Swartz)
- $|\underline{u} + \underline{v}| \leq |\underline{u}| + |\underline{v}|$ (triangolare)

BASE ORTONORMALI

- Una base ortonormale è costituita da $v_1 \dots v_n$

$v_i \cdot v_j = 0 \quad \forall i,j \in N \quad |v_i| = 1$

APPLICAZIONI LINEARI

Sia $L: V_1 \to V_2$ è detta LINEARE se

$L(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda L(w_1) + \mu L(w_2)$

MATRICI

→ SOMMA $A+B = (a_{ij} + b_{ij})$ da $i = 1 \dots m$, $j = 1 \dots m$ $M_{n \times m}$

→ PRODOTTO $M_{mn} \times M_{nc}$

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $AA^{-1} = A^{-1}A = A$

$AB \in_{nn}$ prodotto tra 1 riga per tutta la colonna. Metti le posizioni.

DETERMINANTE:

→ 0: le righe / colonne sono l d

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

RANGO dimensione massima per cui $\det(A) \neq 0$

MATRICE INVERSA ok $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^T$$

- se A, B sono invertibili $\Rightarrow AB$ invertibile $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

SISTEMI LINEARI $A\underline{x} = \underline{b}$

OMOGENEO: $b_i = 0 \ \forall i$ $(A\underline{x} = 0)$

NON OMOGENEO: b_i non tutti nulli $(A\underline{x} \neq 0)$

TEOREMA DI CRAMER $\det A \neq 0 \rightarrow$ il sistema ha 1 soluzione

se la matrice A è non singolare

e neq = n incognite

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

$A_1 =$ matrice ottenuta sostituendo alla colonna n la colonna dei coefficienti noti

IMMAGINE E KER

▶ Siano V_n e V_m in $\mathbb{K}$ $\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{w} \rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$

▶ $Im(\mathcal{L}) = \{\underline{w} \in V_m$ t.c. $\exists \underline{u} \in V_n \ \mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{w}\}$

▶ $\ker(\mathcal{L}) = \{\underline{u} \in V_n$ t.c. $\mathcal{L}(\underline{u}) = \underline{0}\}$

[$\dim Im(\mathcal{L}) = rk A$] [$\dim \ker \mathcal{L} = n$]

NULLITÀ + RANGO [$\dim Im + \dim \ker = n$]

PROPRIETÀ $\mathcal{L}: V \rightarrow W$

- INIETTIVA $\Leftrightarrow \ker \mathcal{L} = \{\underline{0}\} \Leftrightarrow \dim Im \mathcal{L} = \dim V$
- SURIETTIVA $\Leftrightarrow \dim(Im \mathcal{L}) = \dim W$

ROUCHÉ-CAPELLI

Un sistema ha soluzioni se e solo se $rk A = rk A|b$

DIAGONALIZZABILITÀ

$S^{-1}AS = \Lambda$ → diagonale

↓ invertibile

AUTOVALORI & AUTOVETTORI $\quad A\underline{v} = \lambda \underline{v}$

autovettore

↳ autovalore relativo all'autovettore

POLINOMIO CARATTERISTICO $\quad \det(A - \lambda I_n) = 0$

MOLTEPLICITÀ

- ALGEBRICA molteplicità dell'autovalore
- GEOMETRICA $\dim[\mathrm{Im}(A - \lambda_0 I)]$ $= rk(A - \lambda_0 I)$

NB : • autovettori di autovalori distinti sono l.i

•) $mg \leq ma$

DIAGONALIZZABILITÀ $\Rightarrow ma = mg \quad \forall$ autovalore

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ANALISI

FORMULA DI TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + f^k(x_0)(x-x_0)^k$$

$n \to \infty$; $n \to 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k(x_0) \; (x-x_0)^k}{k!}$$

$$\left[P_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)(x-x_0)^k}{k} \right]$$ polinomio di Taylor

FUNZIONE INTEGRABILE SECONDO RIEMANN

$$\sup s(P,f) = \inf S(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

PROPRIETÀ INTEGRALI

- linearità $\lambda f + \mu g$ integrabile $\Rightarrow \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$
- ordinamento $f(x) \leq g(x)$ $\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$
- modulo $|f|$ è integrabile e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt$$

→ F è continua su [a,b]
→ se f è continua in x_0 F è derivabile in x_0

INTEGRALI IMPROPRI

INTERVALLI ILLIMITATI:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F_a(x)$$

esempi

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx \Rightarrow \text{DIVERGENTE}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x)dx \Rightarrow \text{OSCILLANTE}$$

► Se f è positiva e localmente integrabile $[a,+\infty)$ il suo integrale improprio converge o diverge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt \begin{cases} \text{converge} & a>1 \\ \text{diverge} & a\le 1 \end{cases}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$0 \leq f(x) \leq g(x)$

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

- se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ DIVERGE
- se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

f localmente integrabile $\quad f(x) \sim \frac{l}{x^a} \quad x \to \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \sim \int_a^{+\infty} \frac{l}{x^a}\,dx \quad \begin{cases} \to \text{CONVERGE} & a > 1 \\ \to \text{DIVERGE} & a \leq 1 \end{cases}$$

CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$I = [a; +\infty)$ $\quad f$ integrabile a segno variabile

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ CONVERGA} \to \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ CONVERGE}$$

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{x \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

FUNZIONI ILLIMITATE SU INTERVALLI ILLIMITATI

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$$

$$\int_0^a \frac{1}{t^a} dt \begin{cases} \text{CONVERGE} & \alpha < 1 \\ \text{DIVERGE} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^e \frac{1}{(1-x)^a}$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano f, g due funzioni localmente integrabili $[0;a]$ $\quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$

$$0 \leq \int_0^a f(t)dt \leq \int_0^a g(t)dt$$

- $\int_0^a f(t)dt$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ DIVERGE
- $\int_0^e g(t)dt$ CONVERGE $\Rightarrow \int_0^a f(t)dt$ CONVERGE

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

- $f(x) \sim \dfrac{l}{(b-x)^a} \quad x \to b^- \quad [a;b)$

$\int_a^b f(x)dx$ CONVERGE $\Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(b-x)^a}dx$ CONVERGE $a < 1$

$\int_a^b f(x)dx$ DIVERGE $\Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(b-x)^a}$ DIVERGE $a \geq 1$

$$f(x) \sim \frac{\ell}{(x-a)^{\alpha}} \quad x \to a^+ \qquad I = (a, b]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ CONVERGE } \Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx \text{ CONVERGE } \qquad \alpha < 1$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ DIVERGE } \Leftrightarrow \int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx \text{ DIVERGE } \qquad \alpha \geq 1$$