(non è sempre facile trovare il primitiva (trovarla))

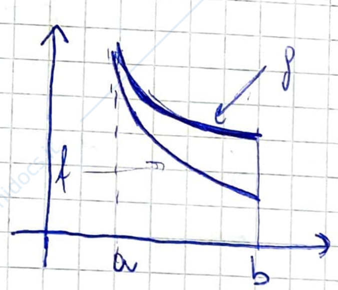
CRITERI di INTEGRABILITÀ

(per vedere se integrale esiste / non esiste converge / diverge ...)

Criterio del confronto: Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}(t, b)$, $\forall t > a$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $(a, b]$. Allora:

1) g integrabile $\Rightarrow$ f integrabile e $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

2) f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile (entrambi gli integrali divergono a $+\infty$)



- se g è integrabile io riesco a valutare l'area che si trova al di sopra di g $\Rightarrow$ riesco a farlo a maggior ragione per f
- se area sotto di f è troppo grande (va a ∞) lo sarà ancora di più anche quella di g

g si chiama maggiorante di f

Es $\int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge? diverge?

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \in \mathcal{C}^0((0, 2]) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(t, 2)$ con $0 < t \leq 2$; $f(x) > 0$ in $(0, 2]$

$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^2}{\sqrt{x}}$ in $(0, 2)$ (in $(0,2)$ vale al massimo e^2); $g(x) = \frac{e^2}{\sqrt{x}} = e^2 \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ (è una maggiorante di f)

g è integrabile in senso improprio in $[0, 2] \Rightarrow$ anche f lo è
f " " " " " in $[0, 2]$.

N.B. (ricordiamo fatto)
$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\,dx \quad \text{converge se } p < 1$$
qui $p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge

Criterio del confronto asintotico

Siano $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}(t, b)$ $\forall t > a$ e tali che $f > 0$, $g > 0$ in $(a, b]$. Se $f \sim g$ per $x \to a^+$ allora f integrabile $\Leftrightarrow$ g integrabile

(integrabile di nuovo converge o diverge in base a quello dell'altra)

Es $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{|1-x^2|}}$ converge? diverge?

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|1-x^2|}} \in C^0((1,2]) \Rightarrow f \in R(t,2) \text{ con } 1 < t \leq 2 \text{ ; } f > 0 \text{ in } (1,2]$$

(sto verificando le ipotesi)

Penso a cosa è asintotica per $x \to 1^+$

$|1-x|^2 = |1-x||1+x| \sim$
$\sim 2|1-x| \leq 2(x-1)$
si è creata la f.f.

$$x \to 1^+ : f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}(x-1)^{\frac{1}{3}}} = g(x)$$

$g(x)$ è integrabile in senso improprio in $[1,2]$? **SÌ** perché siamo nel caso $\frac{1}{(x-a)^p}$ con $p = \frac{1}{3}$ che è < 1

$\Rightarrow f$ è integrabile in senso improprio in $[1,2]$,

cioè $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{|1-x^2|}}$ converge

Es

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x+x^3} \quad \text{converge? diverge?}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x+x^3} \in C^0((0,1]) \text{, } f > 0 \text{ in } (0,1]$$

$\sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

quando $x \to 0^+$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = g(x) \quad p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow g$ è integrabile

$\Rightarrow$ anche f è integrabile in senso improprio in $[0,1]$ e

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{sen} x}}{x+x^3} dx \quad \underline{\text{converge}}$$

PENSO SEMPRE AD INTEGRALE COME AREA

Criterio dell'ordine di infinito

Conseguenza degli altri due e di quello che deriva dalla $\frac{1}{(x-a)^p}$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, non negativa e $f \in C^0((a,b])$ allora:

1) se f infinita per $x \to a^+$ di ordine $\leq \alpha < 1$, rispetto all'infinito campione $\frac{1}{x-a}$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ **converge**

(se l'ordine fosse $\leq \alpha$ significherebbe che la funzione sarebbe maggiorata da $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ $\Downarrow$ x crit. confronto = converge)

è $\sim \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ $\to$ quindi detto prima

2) se f è infinita per $x \to a^+$ di ordine $\geq 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ **diverge**

se $= 1$ asintotica a $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ $\Rightarrow$ diverge
se > 1 maggiore valore $\alpha > 1$ = diverge

Es

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2|\lg x|} dx \text{ ?} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2|\lg x|} \in C^0((0,\tfrac{1}{2}]) \text{, } \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$f > 0$ in $(0, \frac{1}{2}]$

vediamo quale ordine di infinito

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2|\lg x|} \cdot x = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x|\lg x|} = +\infty$

confronto con $\frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ f é un infinito di ordine >1 rispetto a $\frac{1}{x}$ $\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2|\lg x|}dx$ $\boxed{\text{diverge}}$ a $+\infty$

$\boxed{\text{Es}}$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}|\lg x|}dx$? $\quad f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}|\lg x|} \in C^0((0,\frac{1}{2}]),\ f>0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{1/3}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|\lg x|} = 0 \Rightarrow$ ordine di infinito di f é $< \frac{1}{3}$ (é il nostro α) $\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ $\boxed{\text{converge}}$

OSS Ci sono $\rightarrow$ (criterio non dà informazioni) situazioni in cui posso dire che é <1 ma non $<\alpha$ di un numero strettamente <1

Se f é infinito di ordine <1 (ma non $\leq \alpha < 1$), il caso é dubbio

$\boxed{\text{Es}}$ $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\lg x|}dx$, $f(x) = \frac{1}{x|\lg x|}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|\lg x|} = 0$ (il problema é 0)

problema

$\Rightarrow$ f é un infinito di ordine <1;

$\alpha < 1$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x|\lg x|}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x|\lg x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-1}}{|\lg x|} = +\infty$

f é un infinito di ordine $> \frac{1}{x^\alpha}$, $\forall \alpha < 1$ $\quad$ Siamo nel caso di caso dubbio

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\lg x|}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\lg x}dx$ (tra 0 e $\frac{1}{2}$ il $\lg$ é negativo (cambio segno)) $\quad$ SI CALCOLA L'INTEGRALE //

$\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\lg x}dx = \left|\lg|\lg x|\right|_t^{\frac{1}{2}} = \lg|\lg \frac{1}{2}| - \lg|\lg t| =$

$= \lg|\lg 2| - \lg|\lg t|$

$\lim_{t\to 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\lg x}dx = \lim_{t\to 0^+} [\lg(\lg 2) - \lg|\lg t|] = -\infty$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x|\lg x|}dx = +\infty$, diverge a $+\infty$

OSS I criteri sopra enunciati valgono, con le opportune modifiche, anche nel caso $f: [a, b) \to \mathbb{R}$

FUNZIONE ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE

Def Si dice che f è *assolutamente integrabile* in $[a, b]$ se $|f(x)|$ è *integrabile* in $[a, b]$

Teor $\int_a^b |f(x)|\,dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ convergente — **Criterio dell'assoluta integrabilità**

OSS Non vale il viceversa

Es $\int_0^2 \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$? $\quad f(x) \in C^0((0, 2])$; $|f(x)| = \frac{|\operatorname{sen}\frac{1}{x}|}{\sqrt{x}} \geq 0$

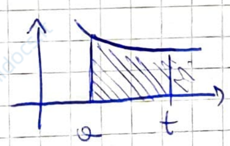
$|f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge $\frac{1}{(x-a)^p}\ldots$ $p = \frac{1}{2} < 1$ $\qquad |f(x)|$ è maggiorata

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto $\Rightarrow \int_0^2 |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_0^2 \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$ converge per il criterio dell'assoluta integrabilità.

INTEGRAZIONE SU INTERVALLI ILLIMITATI

Def Sia $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(a, t)$ $\forall t > a$. L'integrale improprio di f in $[a, +\infty)$ è definito formalmente da:



$$(2) \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Precisamente, se:

- il lim (2) $\exists$ finito, allora f si dice "*integrabile in senso improprio* in $[a, +\infty)$" o anche che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *è convergente*
- il lim (2) vale $+\infty$ o $-\infty$, allora f "*non è integrabile in senso improprio* in $[a, +\infty)$" e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è *divergente*

Integrali impropri su intervalli non limitati

22/12/2021

Es. $\int_a^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$, $\alpha \neq 0$; converge a $\frac{e^{-\alpha a}}{\alpha}$ se $\alpha > 0$, diverge a $+\infty$ se $\alpha < 0$

OSS Sia $p>0$. Per quali p converge $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$, con $a>0$?

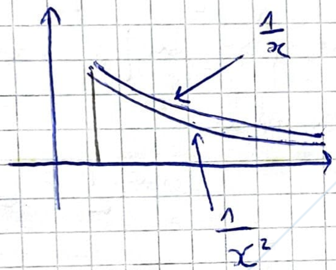
Si trova che

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \quad (a>0) \text{ converge se } p>1, \text{ diverge se } p \leq 1$$

CONTRARIO di prima

$\int_a^b \frac{1}{(x-1)^p}\,dx$: converge per $p<1$, diverge per $p \geq 1$ × funzione non limitata su intervallo limitato

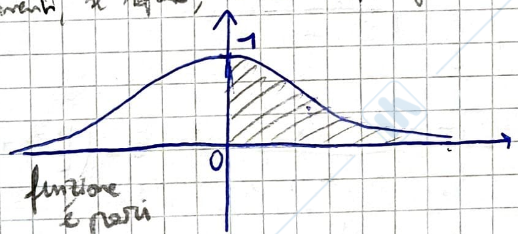
In particolare: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{a^{1-p}}{p-1}$, se $p>1$



$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ...

se gli esponenti sono >1 → area è calcolabile / abbastanza piccola, altrimenti, se sopra, area troppo grande

Es $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

0 → più comodo per calcoli, non sarebbe sbagliato altro modo

$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + c \qquad [\arctan x]_0^t \to \arctan t - \arctan 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} \arctan t \to \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan t \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \implies \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Criteri di integrabilità

Criterio del confronto Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{R}(a, t)$, $\forall t > a$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, +\infty)$. Allora

1) g integrabile → f integrabile e $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

2) f non integrabile $\Rightarrow$ g non integrabile (con entrambi gli integrali divergenti a $+\infty$)

$\frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ converge se $p>1$ ...

Es. Studiare $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

se converge con $g \Rightarrow$ converge anche con f

$f(x)=e^{-x^2}\in C^0(\mathbb{R})$, $f\geq 0$ in $[1,+\infty)$;

g è detta maggiorante

f: minorante

N.B. $e^{-\alpha x}$ con $\alpha>0$ integrabile in ogni intervallo $[a,+\infty)$ VISTO L'ULTIMA VOLTA

$x\geq 1$, $x^2\geq x$, $-x^2\leq -x$

$e^{-x^2}\leq e^{-x}$

$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge a: $e^{-1} \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \frac{1}{e}$

c'è convergenza e so anche che $\int$ è numero positivo $<\frac{1}{e}$

Criterio del confronto asintotico Siano $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f,g\in\mathcal{R}(a,t)\ \forall t>a$, tali che $f>0$ e $g>0$ in $[a,+\infty)$. Se $f\sim g$ per $x\to+\infty$, allora: f integrabile $\Leftrightarrow g$ integrabile

a t

se sono $\sim$, hanno stesso comportamento integrabilità

Es: $\int_2^{+\infty}\frac{x^2+x}{x^4+1}\,dx$

$f(x)=\frac{x^2+x}{x^4+1}\in C^0([2,+\infty))$

$f>0$ in $[2,+\infty)$

per $x\to+\infty$: $f(x)\sim\frac{x^2}{x^4}=\frac{1}{x^2}=g(x)$

$g(x)=\frac{1}{x^2}$ è integrabile in $[2,+\infty)$

$\Rightarrow$ per il crit. confronto asintotico, f è integrabile in $[2,+\infty)$

ATTENZIONE la funzione asintotica può essere integrabile in un intervallo $\neq$ da quello di partenza

$\Rightarrow$ mezzo

Es. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+2}{x^4+x+1}\,dx$

$f(x)=\frac{x^2+2}{x^4+x+1}\in C^0([0,+\infty))$,

$f>0$ in $[0,+\infty)$

$f(x)\sim\frac{1}{x^2}$ per $x\to+\infty$

$\frac{1}{x^2}$ è integrabile in $[1,+\infty)$

$\Rightarrow f$ è integrabile per il criterio di confronto asintotico in $[1,+\infty)$

$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx}+\boxed{\int_1^{+\infty}f(x)\,dx}$ converge

di Riemann

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ converge

integrale di una funzione continua (su $[0,1]$)

Criterio dell'ordine di infinitesimo

Sia $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, non negativa e continua in $[a, +\infty)$. Allora:

1) Se f è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine $\geq \alpha > 1$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)$ converge

2) Se f è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine $\leq 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge (se va a 0 ma è più lenta)
(oppure $f(x) \to \ell \neq 0$)

OSS Se f è infinitesima per $x \to +\infty$ di ordine > 1 (ma non $\geq \alpha > 1$), non si può dire nulla (caso dubbio)

se va a 0 abbastanza velocemente converge altrimenti no

Es
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2 \log x}\,dx, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 \log x} \in C^0([2, +\infty)), \; f > 0 \text{ in } [2, +\infty)$$

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\log x} \xrightarrow{\text{è infinitesimo}} 0 \text{ per } x \to +\infty \Rightarrow f \text{ è un infinitesimo di ordine } > 2 \Rightarrow$$
$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

- guardo dove è continua
- guardo dove è >0

Es
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx$$

per ordine di infinit. il denom. confronto "con quello che ho"

$$f(x) = \frac{1}{x \log x} \in C^0([2, +\infty)), \quad f(x) > 0 \text{ in } [2, +\infty), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\log x} \to 0 \text{ per } x \to +\infty \Rightarrow \text{ordine di infinitesimo di } f \text{ è } > 1.$$

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{1}{x \log x} \cdot x^\alpha = \frac{x^{\alpha-1}}{\log x} \longrightarrow +\infty \quad \forall \alpha > 1 \Rightarrow \text{ordine di inf} < \alpha \; \forall \alpha > 1$$

$\Rightarrow$ criterio dell'ordine di infinitesimo non dà informazioni.

$$\int_2^t \frac{1}{x \log x}\,dx = \Big| \log |\log x| \Big|_2^t = \log(\log t) - \log(\log 2) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx \text{ diverge a } +\infty$$

$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-a)^p}\,dx$ converge se $p>1$

OSS

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta}\,dx$$

$a>1$ $\longrightarrow$ $+\infty$

Si trova che

- se $\alpha>1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, converge
- se $\alpha=1$, $\beta>1$, converge
- se $\alpha=1$, $\beta\le 1$, diverge
- se $\alpha<1$, $\forall \beta\in\mathbb{R}$, diverge

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log x)^\beta}\,dx$$

$\boxed{a>1}$

OSS I criteri sopra enunciati si estendono in modo ovvio al caso $f:(-\infty,b]\to\mathbb{R}$

Def f si dice assolutamente integrabile in $[a,+\infty)$ se $|f|$ è integrabile in $[a,+\infty)$

Teor (Criterio di assoluta integrabilità)

Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge $\overset{\text{allora}}{\Longrightarrow}$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

OSS. Non vale il viceversa

Es $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x \log(x+3)}{(x+1)^4}\,dx$ $\qquad f(x)=\frac{x\operatorname{sen}x \log(x+3)}{(x+1)^4}$

non posso dire positiva o negativa in tutto l'intervallo di integrazione

$f(x)\in C^0([0,+\infty))$

in questo intervallo è positivo

$|f(x)| = \frac{x|\operatorname{sen} x|\log(x+3)}{(x+1)^4} \le \frac{x\log(x+3)}{(x+1)^4} = g(x)$ è un maggiorante del $|f(x)|$

$\log(1+x+2)\sim x+2\sim x$
$\Rightarrow$ NON CAPISCO

$g(x)\sim \frac{x\log x}{x^4} = \frac{\log x}{x^3} = h(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x} = 0 \Rightarrow h$ è un infinitesimo di ordine >2

$\Rightarrow h$ è integrabile $\Rightarrow g$ è integrabile $\Rightarrow |f|$ è integrabile $\Rightarrow$

per crit confronto asintotico

per il crit del confronto

$\Rightarrow f$ è integrabile $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

per il crit di assoluta integrabilità