Queste note intendono ampliare (e non sostituire) quanto già presente nel primo capitolo di:
[CM] Crasta, Malusa, *Elementi di Analisi Matematica e Geometria, con prerequisiti ed esercizi svolti* , La Dotta 2015.

0.1 Simboli logici

Si considerino due affermazioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, che possono eventualmente dipendere da una variabile che in esse compare. Ognuna di tali affermazioni potrebbe essere vera, eventualmente solo per alcuni valori della variabile, o falsa.

Colla notazione $\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}$ (dove il simbolo "$\wedge$", detto simbolo di *congiunzione logica*, si può leggere "et" o "e") si indica una nuova affermazione che si considera vera se e solo se sono vere sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$.

Colla notazione $\mathcal{A}\vee\mathcal{B}$ (dove il simbolo "$\vee$", detto simbolo di *disgiunzione logica*, si può leggere "vel" oppure "o") si indica una nuova affermazione che si considera vera se e solo se è vera una o entrambe delle affermazioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Colla notazione $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ (dove il simbolo "$\Rightarrow$", detto simbolo di *implicazione logica*, si può leggere "implica") si vuole intendere che se $\mathcal{A}$ risulta vera deve necessariamente essere vera anche $\mathcal{B}$, ovvero che "da $\mathcal{A}$ segue $\mathcal{B}$".

Colla notazione $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ (dove il simbolo "$\Leftrightarrow$", detto simbolo di *equivalenza logica*, si può leggere "equivale") si vuole intendere che valgono contemporaneamente: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$. La scrittura $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ si può anche leggere "(vale) $\mathcal{A}$ se e solo se (vale) $\mathcal{B}$".

0.2 Insiemi e numeri

Vedere prima di tutto [CM]. Un'insieme su cui sono definite due operazioni (dette somma e prodotto) soddisfacenti alle proprietà indicate in [CM] a pag. 4 è detto *campo*; se è inoltre definito un'ordinamento soddisfacente alle proprietà a pag. 5 è detto *campo ordinato*.

0.2.1 Densità di $\mathbb{R}$

Si può dimostrare la seguente proprietà di $\mathbb{R}$, detta solitamente *densità*:

$$a < b \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \exists\, q \in \mathbb{Q} : \; a < q < b\,, \\ \exists\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \; a < x < b\,. \end{array}$$

0.2.2 Sottinsiemi di $\mathbb{R}$ superiormente/inferiormente limitati

◇ *Un insieme non vuoto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *è detto* superiormente limitato *se e solo se:*

$$\exists\, \tilde{x} \in \mathbb{R} : \quad \tilde{x} \geq x \quad \forall\, x \in A \quad .$$

I valori $\tilde{x}$ *con tale proprietà sono detti* maggioranti *di* A (se ce n'è uno, quanti altri ce ne sono?). *Se esiste un maggiorante di* A *appartenente ad* A, *esso è detto* massimo *di* A *ed indicato con* $\max A$. Se esiste, il massimo di A è necessariamente unico (perchè?).

◇ *Un insieme non vuoto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *è detto* inferiormente limitato *se e solo se:*

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R} : \quad \tilde{x} \leq x \quad \forall x \in A \quad .$$

I valori $\tilde{x}$ *con tale proprietà sono detti* minoranti *di* A (se ce n'è uno, quanti altri ce ne sono?). *Se esiste un minorante di* A *appartenente ad* A*, esso è detto* minimo *di* A *ed indicato con* $\min A$. Se esiste, il minimo di A è necessariamente unico.

◇ *Un insieme che è contemporaneamente limitato superiormente ed inferiormente è detto* limitato. Verificare che A è limitato se e solo se:

$$\exists \tilde{x} \in \mathbb{R}^+ : \quad |x| \leq \tilde{x} \quad \forall x \in A \quad .$$

◇ Si può dimostrare[1] che: *se un sottinsieme di* $\mathbb{R}$ *è superiormente limitato, allora l'insieme dei suoi maggioranti ammette minimo. Tale valore viene detto* estremo superiore *di* A *e denotato con* $\sup A$.

◇ Si può dimostrare (farlo per esercizio!) che *se* A *ammette massimo esso coincide coll'estremo superiore di* A (e, di conseguenza, se A non ammette estremo superiore certamente non avrà massimo... ma rimane la possibilità che abbia estremo superiore e non massimo).

◇ Analogamente si ha che: *se un'insieme è inferiormente limitato, allora l'insieme dei suoi minoranti ammette massimo. Tale valore viene detto* estremo inferiore *di* A *e denotato con* $\inf A$. Si può dimostrare che se A ammette minimo, esso coincide coll'estremo inferiore di A.

◇ Nel caso $A \subseteq \mathbb{R}$ sia non vuoto e non superiormente limitato, esso non ammette estremo superiore, nel senso proprio del termine, poiché non ammette maggioranti. Tuttavia, per convenzione si usa scrivere:

$$\sup A = +\infty \quad .$$

Analogamente, scrivendo

$$\inf A = -\infty \quad ,$$

si intende dire che l'insieme A non ammette minoranti.

0.2.3 Valore assoluto o modulo

Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce *modulo* o *valore assoluto* di x:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad .$$

Si noti che per $x = 0$ vale

$$|x| = x = -x = 0 \quad ,$$

perciò è equivalente definire il modulo di x anche come

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

oppure

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

[1] In questo caso non è richiesto di farlo per esercizio (si dovrebbe usare la completezza di $\mathbb{R}$).

o ancora

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad .$$

Osserviamo inoltre che

$$|x| = \sqrt{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

(mentre è un grave errore scrivere che $\sqrt{x^2} = x$, a meno che non si sappia che $x \geq 0$).

0.2.4 Distanza fra numeri reali

Supponiamo noto il fatto che si può mettere in corrispondenza l'insieme dei numeri reali con l'insieme dei punti d'una retta, che viene solitamente detta *retta reale* (vedere anche [CM] pag. 7). Dati due numeri reali a e b, definiamo la loro distanza come:

$$d(a,b) := |b-a|$$

(si verifica che corrisponde alla distanza geometrica dei punti corrispondenti sulla retta).
Si noti che, essendo $|t| = |-t| \ \forall t \in \mathbb{R}$, vale:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b| = d(b,a) \quad .$$

0.2.5 La disuguaglianza $|A| \leq B$

Siano A e B numeri reali, eventualmente funzioni di qualche variabile. Allora:

$$|A| \leq B \quad \Leftrightarrow \quad -B \leq A \leq B \quad .$$

Dim.

$$|A| \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{cases} A \geq 0 \\ A \leq B \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ A \geq -B \end{cases} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\, 0 \leq A \leq B \ \vee \ -B \leq A \leq 0 \,) \quad \Leftrightarrow \quad -B \leq A \leq B \quad . \qquad \square$$

Si noti che se vale $|A| \leq B$ necessariamente $B \geq 0$.

Analogamente:

$$|A| < B \quad \Leftrightarrow \quad -B < A < B \quad .$$

In tal caso necessariamente $B > 0$.

0.2.6 La disuguaglianza triangolare

Proposizione

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad . \tag{1}$$

Dim. In base alla definizione del valore assoluto avremo che:

$$-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \quad \text{e} \quad -|\beta| \leq \beta \leq |\beta| \quad .$$

Sommando le due coppie di disugualianze otteniamo:

$$-(|\alpha| + |\beta|) \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta| \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

(dove l'ultima equivalenza è ottenuta applicando il risultato visto alla sezione precedente...). □

Corollario

$$\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad |a-b| \leq |a-c| + |c-b| \quad .$$

Dim. Basta aggiungere e togliere c all'interno del membro a sinistra e poi applicare la proposizione mostrata sopra (con $\alpha = a-c$ e $\beta = c-b$):

$$|a-b| = |(a-c)+(c-b)| \leq |a-c| + |c-b| \quad . \qquad \square$$

Leggendo questa disuguaglianza in termini di distanze tra punti della retta reale abbiamo:

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad . \tag{2}$$

Dunque la distanza tra due punti non può superare la somma delle distanze dei due punti da un terzo punto qualunque. Ciò è analogo al fatto che la lunghezza di un lato di un triangolo non può superare la somma delle lunghezze degli altri due lati; così si spiega il nome *disuguaglianza triangolare*, che viene usato indifferentemente per indicare sia la (1) che la (2).

0.2.7 Intorni

Si definisce *intorno sferico di raggio* δ *di* $x_0 \in \mathbb{R}$ l'insieme:

$$I_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : \ d(x, x_0) < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad .$$

L'aggettivo "sferico" serve a distinguere quello che abbiamo introdotto da altri tipi di intorni che, almeno per ora, non consideriamo. Può quindi essere sottinteso.[2]

0.2.8 Punti d'accumulazione

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che x_0 è *punto d'accumulazione di A* (o anche *punto d'accumulazione per A*) se e solo se ogni intorno sferico di x_0 contiene punti di A distinti da x_0.

Si noti che, in base a tale definizione, un punto d'accumulazione di A potrebbe essere punto di A ma anche punto non appartenente ad A.

0.2.9 Estremo superiore e punti d'ccumulazione

Supponendo $A \subseteq \mathbb{R}$, non vuoto e superiormente limitato, verificare per esercizio che:

$\sup A \in A \qquad \vee \qquad \sup A$ *è punto d'accumulazione di A.*

Analoga afffermazione si può fare riguardo ad inf...

[2] Il termine "sferico" deriva dal fatto che, se x e x_0 fossero punti dello spazio tridimensionale (invece che punti di una retta), l'insieme dei punti x soddisfacenti la disuguaglianza $d(x, x_0) < \delta$ corrisponderebbe all'interno di una sfera (di raggio δ e centro x_0).