

DEF Sia $[a, b]$ un intervallo. Siamo $\{x_k\}_{k=0, \dots, m}$ punti t.c. $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$. L'insieme di tali punti viene detto

PARTIZIONE di $[a, b]$

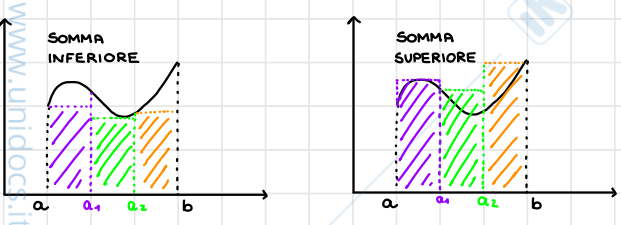
DEF Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, cioè $\exists m, M$ t.c. $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x$

Sia P una partizione di $[a, b]$. Siamo poi $m_k := \inf \{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ e $M_k := \sup \{f(x), x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

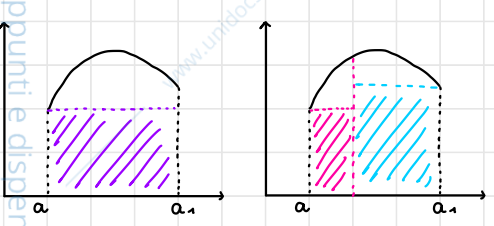
Si definiscono **infime** $s(P; f) := \sum_{k=1}^m m_k (x_k - x_{k-1})$ e **S(P; f) := \sum_{k=1}^m M_k (x_k - x_{k-1})**. Esse si definiscono rispettivamente **SOMMA**

INFERIORE e **SOMMA SUPERIORE** relative alla partizione di f

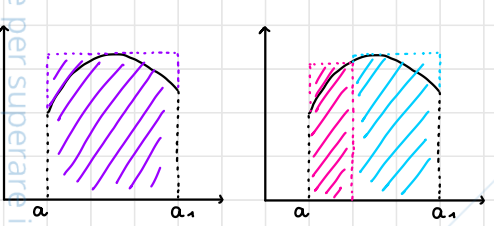
SIGNIFICATO GEOMETRICO



considero intervallo $[a, a_1]$



SOMMA INFERIORE → approssimazione per difetto
 le somme inferiori aumentano aggiungendo un punto a P



SOMMA SUPERIORE → approssimazione per eccesso
 le somme superiori diminuiscono aggiungendo un punto a P

Si vede che se P_1, P_2 sono due partizioni di $[a, b]$ e $P_1 < P_2$ allora

$$\left. \begin{aligned} s(P_1, f) &\leq s(P_2, f) \\ S(P_1, f) &\geq S(P_2, f) \end{aligned} \right\} \text{ dunque } s(P_1, f) \leq s(P_2, f) \leq S(P_2, f) \leq S(P_1, f)$$

Dunque $\sup := \{s(P, f), P \text{ partizione di } [a, b]\} \leq \inf \{S(P, f), P \text{ partizione di } [a, b]\}$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1], x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

FUNZIONE DI DIRICHLET

Su P partizione di $[0,1]$. Allora $s(P,f) = 0$ e $S(P,f) = 1 \quad \forall P$

$\sup := \{s(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\} \leq \inf \{S(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\}$ → non è detto che ci sia sempre \leq , a volte c'è solo il minore.

DEF: Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Dico che f è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se $\sup := \{s(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\} = \inf \{S(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\}$

In tal caso il comune valore si indica con $\int_a^b f(x) dx$

TEOREMA

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$. Allora f è integrabile su $[a,b]$

Dim

Sappiamo che f è uniformemente continua su $[a,b]$, cioè $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon)$ t.c. $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$ se $|x_1 - x_2| \leq \delta$

Sia P una partizione e si assuma che $\max\{x_i - x_{i-1}, i=1, \dots, m\} \leq \delta$

Sono x_i' e x_i'' punti di massimo e di minimo per f su $[x_{i-1}, x_i]$ (tale punti esistono per il teorema di Weierstrass)

$$\begin{aligned} \text{Vale allora per tale partizioni} \quad 0 \leq S(P,f) - s(P,f) &= \sum_{i=1}^m M_i (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m m_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^m f(x_i') (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^m f(x_i'') (x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \underbrace{[f(x_i') - f(x_i'')]}_{\geq 0} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m \epsilon (x_i - x_{i-1}) = \epsilon (b-a) \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che se l'ampiezza di P cioè il numero $\max\{x_i - x_{i-1}, i=1, \dots, m\} \leq \delta$ allora $0 \leq S(P,f) - s(P,f) \leq \epsilon (b-a)$

Ma allora non è possibile che $\inf \{S(P,f), P \text{ partizione}\} < \sup \{s(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\}$ perché se ciò fosse

$$S(P,f) - s(P,f) \geq \inf \{S(P,f), P \text{ partizione}\} - \sup \{s(P,f), P \text{ partizione di } [a,b]\} > 0$$

TEOREMA

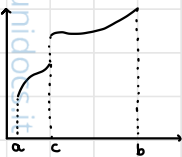
Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotona. Allora f è integrabile su $[a, b]$

Dim

Sia ad esempio f crescente. Allora $\forall \epsilon > 0$, presa una partizione \mathcal{P} di ampiezza $A(\mathcal{P}) \leq \epsilon$ vale $0 \leq S(\mathcal{P}, f) - s(\mathcal{P}, f) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}) \leq A(\mathcal{P}) \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = A(\mathcal{P})[F(b) - F(a)] \leq \epsilon [F(b) - F(a)]$

Si conclude come in precedenza

Sono integrabili anche funzioni che presentano un numero finito di discontinuità eliminabile o a salto



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

TEOREMA

Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili su $[a, b]$. Allora

- ① $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda f(x) + \mu g(x)$ è integrabile e vale $\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$ → integrale è un campo vettoriale
- ② Se $f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ → proprietà di ordinamento
- ③ $|f|$ è integrabile su $[a, b]$ e vale $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
- ④ **TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE**

Sia f continua su $[a, b]$. Allora $\exists c \in [a, b]$ t.c. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$

⑤ Se $c \in [a, b]$ allora $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

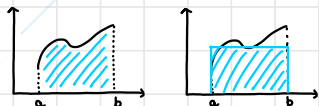
⑥ Inoltre, siano x_1, x_2, x_3 punti comunque ordinati tra loro e, se ad esempio $x_2 < x_1$ si ponga $\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx := - \int_{x_2}^{x_1} f(x) dx$

Allora vale $\int_{x_1}^{x_3} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$

Dim ④

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

A rettangolo



Siano M, m il max e il min rispettivamente di f su $[a, b]$. Allora $m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a)$

Allora $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$. Per il Teorema dei valori intermedi, valido essendo f continua, $\exists c \in [a, b]$ t.c. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

DEF Dico che una somma integrale del tipo $\sum_{k=1}^n F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ dove $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tende a $L \in \mathbb{R}$ se $A(P) \rightarrow 0$ se $\forall \epsilon > 0$

$$\left| \sum_{k=1}^n F(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - L \right| \leq \epsilon \text{ se } A(P) \leq \delta \text{ opportuno}$$

TEOREMA

Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann, allora le somme integrali relative a f tendono a $\int_a^b f(x) dx$ comunque siano scelti i punti x_k

TEOREMA (PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE o TEOREMA DI VALUTAZIONE)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[a, b]$ secondo Riemann. Sia G una sua primitiva in (a, b) cioè si abbia $G'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$. Si assuma che $G(a^+) := \lim_{x \rightarrow a^+} G(x)$ e $G(b^-) := \lim_{x \rightarrow b^-} G(x) \exists$ limiti. Allora $\int_a^b f(x) dx = G(b^-) - G(a^+)$

Dim

Pongo $G(a) := G(a^+)$, $G(b) := G(b^-)$. Con tale definizione G è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Sia P una partizione di $[a, b]$. Allora $G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^n [G(x_k) - G(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^n G'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ per opportuni $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ per teorema di Lagrange su $[x_{k-1}, x_k]$ per G

Ma il membro di destra è una somma integrale di f e sappiamo che essa tende a $\int_a^b f(x) dx$ (essendo per ipotesi f integrabile) se $A(P) \rightarrow 0$. Ma allora $G(b) - G(a) = \lim_{A(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(x) dx$

$G(b) - G(a)$ non dipende dall'ampiezza della partizione quindi se $A(P) \rightarrow 0$ esso non modifica $G(b) - G(a)$

TEOREMA (SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann in $[a, b]$. Sia $c \in [a, b]$ e si ponga $F(x) := \int_c^x f(t) dt$. Allora F è continua in $[a, b]$. Inoltre se f è continua in $x_0 \in [a, b]$ allora F è derivabile in x_0 e vale $F'(x_0) = f(x_0)$

Dim

È per ipotesi limitata (essendo integrabile), dunque $\exists M$ t.c. $|f(x)| \leq M \forall x \in [a, b]$. Allora supponendo ad esempio $x > x_0$ vale $|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_c^x f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)| dt \leq \int_{x_0}^x M dt = M(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} 0$. Analogamente per $x \rightarrow x_0^-$

Dunque $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} F(x_0)$ cioè F è continua in $x_0 \in [a, b]$ e x_0 è arbitrario

Sia ora f continua in x_0 . Allora dato $h > 0$ si ha $\frac{1}{h} [F(x_0+h) - F(x_0)] = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$. La tesi sarà dimostrata se mostriamo che $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ rapporto incrementale

Valore $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt$

$f(x_0)$ è una costante $\rightarrow \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt = \frac{1}{h} f(x_0)(x_0+h-x_0) = \frac{1}{h} f(x_0)h = f(x_0)$

Quindi, se $h > 0$, vale $\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)| dt$

So che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ t.c. $|f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon$ se $|t - x_0| \leq \delta$ (f è continua in x_0).

Ma allora, se $h > 0$ è sufficientemente piccola si ha $\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \epsilon dt = \frac{1}{h} \epsilon h = \epsilon$

Analogamente per $h < 0$

Ne segue che $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(x_0)$ cioè la tesi

Primitive di una stessa funzione differiscono per delle costanti

$$F_1(x) := \int_{c_1}^x f(t) dt \quad F_2(x) := \int_{c_2}^x f(t) dt$$

$$F_2(x) - F_1(x) = F(c_2) - F(x) - (F(c_1) - F(x)) = F(c_2) - F(c_1) = \int_{c_1}^{c_2} f(t) dt \in \mathbb{R}$$

$$\int f(t) dt := \{ \text{insieme delle primitive di } f \}$$

INTEGRAZIONE

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$f(x)g(x) = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)] dx$$

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

ESEMPIO

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

$$\int_a^b (f(x)g(x)) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) =: [f(x)g(x)]_a^b$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$f: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ t.c. f, f' continue

supponiamo $f([\alpha, \beta]) = [a, b]$ cioè f suriettiva. Dunque presi $c < d, c, d \in [a, b] \exists \gamma, \sigma \in [\alpha, \beta]$ t.c. $f(\gamma) = c, f(\sigma) = d$. Sia F primitiva di f . Allora $\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$

D'altronde $(F \circ f)'(t) = F'(f(t)) f'(t) = f(f(t)) f'(t)$

Dunque $F \circ f$ è una primitiva di $f(f(t)) f'(t), t \in [\alpha, \beta]$

Ma allora $\int_{\gamma}^{\sigma} f(f(t)) f'(t) dt = F(f(\sigma)) - F(f(\gamma)) = F(d) - F(c)$

Ma $\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c) \rightarrow$ Dunque $\int_c^d f(x) dx = \int_{\gamma}^{\sigma} f(f(t)) f'(t) dt$ dove $f(\gamma) = c$ e $f(\sigma) = d$

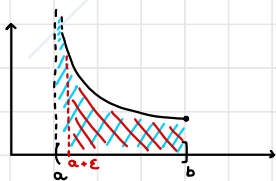
$x = f(t)$

$\frac{dx}{dt} = f'(t) \rightarrow dx = f'(t) dt$

Se inoltre f è iniettiva, dunque invertibile, allora $\gamma = f^{-1}(c)$ e $\sigma = f^{-1}(d)$

$$\int_{f(\gamma)}^{f(\sigma)} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\sigma} f(f(t)) f'(t) dt$$

INTEGRALI ALL'INFINITO



DEF Sia $f: (a, b]$ t.c. sia integrabile in $[a+\epsilon, b] \forall \epsilon > 0$ e sufficientemente piccolo. Dico che f è integrabile in senso improprio, o generalizzato, se \exists limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad x \in (0, 1] \text{ e } \alpha > 0$

$$\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{\epsilon}^1 = \frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad \text{se } \alpha \neq 1$$

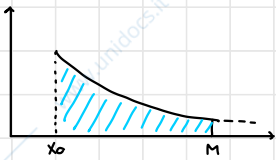
Ma $\frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha \in (0, 1) \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$ Inoltre $\int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\log x]_{\epsilon}^1 = \log \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} +\infty$

Dunque $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$ è integrabile in senso generalizzato in $(0, 1] \iff \alpha < 1$

$\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato in un intorno destro di $x_0 \iff \alpha < 1$

DEF Sia $f: [x_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile su $[x_0, M]$ $\forall M > x_0$. Dico che f è integrabile in senso improprio o generalizzato

in $[x_0, +\infty)$ se ed solo se $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^M f(x) dx \exists$ finito



$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad x \geq 1$$

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-1} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^M = \frac{M^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\text{se } \alpha = 1 \quad \int_1^M \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^M = \log M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} +\infty$$

Dunque $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty)$ $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$$f(x) = \frac{1}{x^a (\log x)^b} \quad x \geq 2$$

è integrabile in senso improprio in $[2, +\infty)$ $\Leftrightarrow a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ oppure se $a = 1$ e $b > 1$

TEOREMA DEL CONFRONTO

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Si assuma $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a, b]$

Allora se g è integrabile in senso improprio in $(a, b]$, anche f lo è.

Se invece f non è integrabile in senso improprio in $(a, b]$ neppure g lo è.

Analoghi risultati valgono per funzioni definite su $[a, b)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty; b)$

TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ positive e integrabili $[a+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$. Si assume poi $f(x) \sim_{x \rightarrow a^+} g(x)$. Allora f è integrabile in senso improprio in (a, b) $\Leftrightarrow g$ lo è

Analogo risultato vale per funzioni definite su $[a, +\infty)$

$$f \sim_{x \rightarrow a^+} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2}_{\text{definitivamente per } x \rightarrow a^+} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{2} < f(x) < 2g(x)$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

ESEMPIO

$$\int_1^0 \left[\frac{\log(2 - \sqrt{\cos x})}{x^3} \right]$$

logaritmo non ha singolarità quando $0 < x < 1$

la funzione integranda può avere singolarità nell'intervallo di integrazione solo se $x \rightarrow 0$

$$\sqrt{\cos x} = \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$\log(2 - \sqrt{\cos x}) = \log\left(2 - 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

$$f(x) = \left[\frac{\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)}{x^3} \right]^{1/2} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

$$g(x) = \int_1^{+\infty} \left[\frac{\log(2 - \sqrt{\cos x})}{x^3} \right]$$

g è integrabile per $x \rightarrow 0^+$

$$0 \leq g(x) \leq \frac{(\log 2)^{1/2}}{x^{3/2}}$$

↙ integrabile per $x \rightarrow +\infty$

per il teorema del confronto

$g(x)$ è integrabile

TEOREMA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e integrabile in $[a + \varepsilon, b]$. Si assuma $|f|$ sia integrabile in senso improprio su $(a, b]$

Allora anche f è integrabile e vale $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Analogo risultato vale per funzioni definite su $[a, +\infty)$

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Area $|f(x)|$ è infinita $\rightarrow f(x)$ integrabile anche se $|f(x)|$ non lo è

Area $f(x)$ è definita

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$

$$\left. \begin{aligned} & \int_1^M \frac{\sin x}{x} dx \text{ è integrabile} \iff \text{è integrabile} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} dx \\ & \text{Ma } \frac{\cos x}{x^2} \text{ è integrabile in } [1; +\infty). \text{ Infatti } \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2} \\ & \text{integrabile in } [1; +\infty) \end{aligned} \right\}$$