LIMITI NOTEVOLI

TEOREMA

$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = l \iff \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ se $x_n \neq \bar{x}$ e per ogni successione $\{x_n\}$ t.c. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{x}$

TEOREMA

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

TEOREMA

Valgono le seguenti formule

① $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$ $[1^\infty]$

② $\lim_{y\to 0} (1+\alpha y)^{\frac{1}{y}} = e^\alpha$ $[1^\infty]$

③ $\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

④ $\lim_{y\to 0} \frac{a^y-1}{y} = \log a$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

⑤ $\lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\alpha-1}{y} = \alpha$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

DIM

① $t := \frac{x}{\alpha}$ $\Rightarrow$ $\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{\alpha}\cdot\alpha} = \left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^\alpha \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e^\alpha$ (ho sottointeso che funzione potenza è continua, cioè $x\to\bar{x}$, $e^x \to e^{\bar{x}}$)

② Nella ① pongo $y := \frac{1}{x}$

Quindi $\underbrace{\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} e^\alpha} = \underbrace{(1+\alpha y)^{\frac{1}{y}}}_{\xrightarrow[y\to\pm 0]{} e^\alpha}$

③ Sia da 2 che $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e$

Passando ai logaritmi ho $\frac{1}{y}[\log(1+y)] = \log(1+y)^{\frac{1}{y}} \xrightarrow[y\to 0]{} \log e = 1$ (ho sottointeso che il logaritmo è una funzione continua cioè $x\to\bar{x}$, $\log x \to \log\bar{x}$)

④ Pongo $z = a^y - 1$. Allora $z\to 0$ se $y\to 0$.

Vale $a^y = z-1 \Rightarrow y = \log_a(z-1) = \frac{\ln(z-1)}{\ln a}$. Dunque $\frac{a^y-1}{y} = \underbrace{\frac{z}{\log(z+1)}}_{\xrightarrow[y\to 0]{} 1} \cdot \log a \xrightarrow[y\to 0]{} \log a$

⑤ Pongo $z := (1+y)^\alpha - 1$ cioè $(1+y)^\alpha = z+1$ cioè $\alpha \log(1+y) = \log(z+1)$

si ha $z \to 0$ se $y \to 0$. Allora $\frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \frac{z}{\log(1+z)} \cdot \frac{\log(1+z)}{y} = \underbrace{\frac{z}{\log(1+z)}}_{\xrightarrow[y\to 0]{} 1} \alpha \underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\xrightarrow[y\to 0]{} 1} \xrightarrow[y\to 0]{} \alpha$

$\frac{\sin}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \iff \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \iff \sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

si mostra che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0$ e più in generale $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + o(x^{2m+2})$ per $x \to 0$

Formula di Taylor e resto di Peano

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1})$ per $x \to 0$

$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^m}{m!} + o(x^m)$ per $x \to 0$

$\frac{a^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} \log a$ quindi $\frac{e^y - 1}{y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$ quindi $e^y \xrightarrow[y\to 0]{} y + 1$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{m+1} \frac{x^m}{m} + o(x^m)$ per $x \to 0$

ESEMPIO

$\sin(\sin x) = \sin\Big(\underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}_{t}\Big) = \sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) = x - \frac{x^3}{6} + o(t^4) - \frac{1}{6}\underbrace{\left[x - \frac{x^3}{6} + o(t^4)\right]^3}_{} + o(x^4) =$

considero solo x perché altri termini avendo grado maggiore di 3 sono racchiusi in $o(x^4)$

$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$

In ogni punto gli sviluppi di Taylor cambiano

- Successione CONVERGE se ha un limite finito
- Successione DIVERGE se ha come limite $\pm\infty$

DEF Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Sia dunque $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione strettamente crescente di interi non negativi. La successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ viene detta SUCCESSIONE ESTRATTA da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e corrispondente agli interi $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

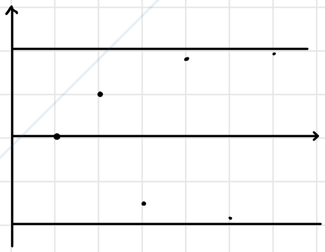
Si dice che $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ è un VALORE LIMITE di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $\exists$ una successione estratta $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k}=\ell$. La classe limite di $\{a_n\}$ è definita come l'insieme dei valori limite di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

ESEMPIO

$a_n=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) \quad n\geq 1$

$a_{2k}=1-\frac{1}{2k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$

$a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1}-1\xrightarrow[k\to+\infty]{}-1$



TEOREMA

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Allora

1. $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \Longleftrightarrow$ la classe limite di $\{a_n\}$ è data dal solo valore ℓ
2. la classe limite di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è vuota (conseguenza del teorema Bolzano-Weierstrass)
3. la classe limite è chiusa

DEF Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Allora il massimo (rispettivamente minimo) elemento della classe limite (eventualmente $+\infty$ o $-\infty$) viene detto limite superiore (rispettivamente inferiore) e indicato con $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ (rispettivamente $\liminf_{n\to+\infty} a_n$)

DEF Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione.

Dico che essa è di Cauchy se $\forall\varepsilon>0\ \exists\bar{n}$ t.c. $|a_n-a_m|\leq\varepsilon$ se $n,m\geq\bar{n}$

CONTROESEMPIO

$a_0 = 1$ $a_1 = 1.4$ $a_2 = 1.41$ $a_3 = 1.414$

$n > m$ $0 < a_n - a_m \leq 10^{-m}$ $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ ma non converge in $\mathbb{Q}$ (converge a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

TEOREMA

Sia $\{a_n\}$ una successione. Allora essa è convergente $\Leftrightarrow$ è di Cauchy

Dim

1. se è convergente $\Rightarrow$ è di Cauchy

Si assuma $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}$ t.c. $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq \bar{n}$. Allora $\forall n, m > \bar{n}$ vale

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq \underbrace{|a_n - \ell|}_{\varepsilon} + \underbrace{|\ell - a_m|}_{\varepsilon} \leq 2\varepsilon$$

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

2. se è di Cauchy $\Rightarrow$ è convergente

Se $\{a_n\}$ è di Cauchy allora è limitata. Infatti, posto $\varepsilon = 1$ si ha $|a_n - a_{\bar{n}}| \leq 1$ $\forall n \geq \bar{n}$ cioè $a_{\bar{n}} - 1 \leq a_n \leq a_{\bar{n}} + 1$ $\forall n \geq \bar{n}$ (a_n è compreso tra due valori)

Mostro che $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Se $A := \{a_n \; n \in \mathbb{N}\}$ può accadere che A sia finito. Allora $\exists \ell \in \mathbb{R}$ e $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione strettamente crescente di interi t.c. $a_{n_k} = \ell$ $\forall k$, in particolare $a_{n_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Se invece A è illimitato, allora essendo A anche limitato è applicabile il teorema di Bolzano-Weierstrass e dunque A ha un punto di accumulazione. Sia $\ell \in \mathbb{R}$ tale punto. Allora per costruzione $\exists$ una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $a_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$.

Mostro che $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Sia $\varepsilon > 0$, siano $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ t.c. $|a_{n_k} - \ell| \leq \varepsilon$ $\forall k \geq \bar{n}_1$ e $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq \bar{n}_2$. Ma allora

$|a_n - \ell| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - \ell| \leq |a_n - a_{n_k}| + \underbrace{|a_{n_k} - \ell|}_{\leq \varepsilon} \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ se n è abbastanza grande. Dunque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

SPAZIO METRICO = spazio in cui è definito il concetto di distanza

X insieme

$d \; X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $d(x;y) = d(y;x)$ $\forall x,y \in X$

$d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$ $\forall x,y,z \in X$

$d(x;y) \geq 0$ $\forall x,y \in X$ e $d(x;y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Se sono definite queste proprietà X è uno spazio metrico

<u>ESEMPIO</u>

V campo vettoriale con prodotto scalare

$|\vec{v}| := (\vec{v} \cdot \vec{v})^{1/2}$

$d(\vec{v};\vec{w}) := |\vec{v}-\vec{w}|$ → soddisfa proprietà sopra elencate

SPAZIO METRICO COMPLETA

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$

Dico che tale successione è di Cauchy se $\exists \varepsilon>0$ $\exists \bar{n}$ $d(x_n,x_m) \le \varepsilon$ se $n,m \ge \bar{n}$

Si mostra che se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge (cioè se $\exists x \in X$ t.c. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \bar{n}$ con $d(x_n,x) \le \varepsilon$ $\forall n \ge \bar{n}$) allora è di Cauchy

<u>DEF</u> Dico che X è completo se ogni successione di Cauchy in X converge in X

(Uno spazio metrico completo è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy convergono)

<u>TEOREMA</u>

$\mathbb{R}$ è uno spazio metrico completo ($\mathbb{Q}$ non lo è)

$\mathbb{R}^n$ $d(\vec{x};\vec{y}) := |\vec{x}-\vec{y}|$

Si mostra analogamente che $\mathbb{R}^n$ è completo

<u>DEF</u> Sia $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di X che appartenga a X. Dico che f è continua in x_0 se

$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$

↓

. $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta$ t.c. $|f(x)-f(x_0)| \le \varepsilon$ se $|x-x_0| \le \delta$, $x \in X$ (se $x=x_0$ condizione $|f(x)-f(x_0)| \le \varepsilon$ è sempre vera)

. f continua in $\bar{x} \iff \forall$ successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ t.c. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{x}$ $x_n \in X$ definitivamente vale $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\bar{x})$

(se $x=\bar{x}$ la condizione continua a valere)

<u>ESEMPIO</u>

logaritmo continuo in x_0

$\log x \xrightarrow[x\to x_0]{} \log x_0$

$|\log x - \log x_0| \le \varepsilon \iff \left|\log \frac{x}{x_0}\right| \le \varepsilon$ ① $x > x_0$ $\log \frac{x}{x_0} \le \varepsilon \iff \frac{x}{x_0} \le e^{\varepsilon} \iff x \le x_0 e^{\varepsilon}$

② $x < x_0$ $\log \frac{x}{x_0} \le \varepsilon \iff \frac{x_0}{x} \le e^{\varepsilon} \iff x \ge x_0 e^{-\varepsilon}$

$|\log x - \log x_0| \le \varepsilon$ se $x_0 e^{-\varepsilon} \le x \le x_0 e^{\varepsilon}$ (intorno centrato in x_0)

Sono definite, dove definite, le seguenti funzioni

. x^{α}, $\log_a x$, b^x, $\sin x$, $\cos x$

TEOREMA

Siano $f, g: X \to \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in X$. Allora sono continue in x_0

① $\lambda f + \mu g \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

② fg

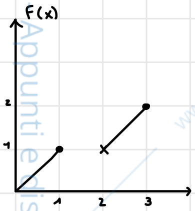
③ $\frac{f}{g}$ se $g(x_0) \neq 0$

TEOREMA

Siano f, g funzioni t.c f è continua in x_0, g è continua in $f(x_0)$ e, ad esempio, $g \circ f$ è ben definita in un intorno di x_0

Allora $g \circ f$, è continua in x_0

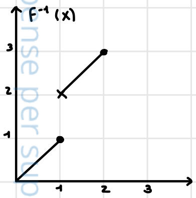
ESEMPIO



$f: [0;1] \cup (2;3] \to [0;2]$

funzione è invertibile perché è biettiva nel suo dominio

funzione è continua in ogni punto del suo dominio



$f^{-1} [0;2] \to [0;1] \cup (2;3]$

funzione discontinua in $x = 1$

FALSO → Inversa di una funzione continua è continua

TEOREMA

Sia $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in I e invertibile, con I invertibile. Allora f^{-1} è continua dove definita

Allora funzioni inverse delle funzioni trigonometriche e iperboliche sono continue

Due particolari tipi di discontinuità sono . SALTO $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

. ELIMINABILE $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

TEOREMA

Sia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ monotona

Allora f ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità. Ciascuno di tali punti (se esistono) è un punto di discontinuità a salto cioè $\exists$ finiti $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (x_0 punto di discontinuità)

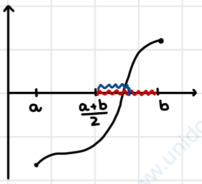
$\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \text{ se } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta \text{ t.c. } |f(x)-\ell|\le\varepsilon \text{ se } x_0<x\le x_0+\delta\right)$

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continua su $[a;b]$. Si supponga che $f(a)f(b)<0$

Allora $\exists\,\ell\in[a;b]$ t.c. $f(\ell)=0$

Dim



Divido $[a;b]$ in due parti di uguale ampiezza, $\left[a;\frac{b+a}{2}\right],\left[\frac{a+b}{2};b\right]$

Se $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ la tesi è vera. Altrimenti in esattamente uno di tali intervalli la funzione cambia segno agli estremi. Sia $[a_1;b_1]$ tale intervallo.

Iterando il procedimento ottengo una successione di intervalli $[a_n;b_n]$ t.c.

1. $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$
2. $\{a_n\}$ è crescente, $\{b_n\}$ è decrescente
3. $f(a_n)f(b_n)<0$ (a meno che si trovi a un passo finito uno zero di f)

Da ② segue che $\{a_n\},\{b_n\}$ ammettono limiti ℓ_1,ℓ_2. Ma $[a_n;b_n]\subset[a;b]$ $\forall n$, dunque le due successioni sono limitate dunque $\ell_1,\ell_2\in\mathbb{R}$

D'altronde $a_n<b_n$, $\forall n$ quindi $\ell_1\le\ell_2$

Inoltre da ① abbiamo $\ell_2-\ell_1=\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}=0$

Dunque $\ell_2-\ell_1=0$. Indico con ℓ tale numero

Si ha per la continuità di f in ℓ, $f(a_n)f(b_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)^2$

D'altronde, da ③ $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)f(b_n)\le 0$ cioè $f(\ell)^2\le 0$, cioè $f(\ell)=0$

COROLLARIO (TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI)

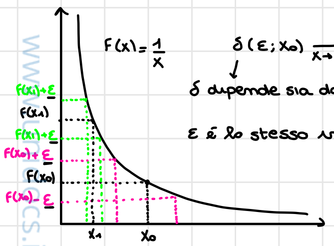
Sia $f:I\to\mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I. Allora f assume tutti i valori compresi tra $\inf\{f(x),x\in I\}$ e $\sup\{f(x),x\in I\}$

Dim

Sia λ uno dei valori compresi tra inf e sup. Allora $\exists\, x_1, x_2$ t.c. $\inf f \le f(x_1) \le \lambda \le f(x_2) \le \sup f$. Sia ad esempio $x_1 < x_2$ e sia $g(x) = f(x) - \lambda$ con $x \in [x_1; x_2]$

Allora g è continua su $[x_1; x_2]$ e vale $g(x_1) \le 0$, $g(x_2) \ge 0$. Per il teorema precedente $\exists\, c \in [x_1; x_2]$ t.c. $g(c) = 0$ cioè t.c. $f(c) = \lambda$

f continua in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon)$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ se $|x - x_0| \le \delta$ (DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ)



$\delta(\varepsilon; x_0) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

δ dipende sia da x_0 che da ε

ε è lo stesso in questo caso $\to$ nonostante ciò se cambio x_0 cambia anche δ

DEF Sia $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dico che f è UNIFORMEMENTE CONTINUA in X se $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ se $\forall x, x_0$ t.c. $x, x_0 \in X$ e $|x - x_0| \le \delta$

SUCCESSIONE IN $\mathbb{R}^m$

$\{\underline{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^m$

Dico che $\underline{x}_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se $\overbrace{|\underline{x}_k - \underline{x}|}^{\text{reale}} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ (tutte le componenti di $\underline{x}_k$ tendono alle rispettive componenti di $\underline{x}$)

DEF Dico che $A \subset \mathbb{R}^m$ è compatto per successione se $\forall \{\underline{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ ammette una sottosuccessione $\{\underline{x}_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a un opportuno elemento $\underline{x} \in A$

TEOREMA

$A \subset \mathbb{R}^m$ è compatto $\iff$ A è compatto per successioni

TEOREMA

Sia $f: K \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ continua in K con K compatto. Allora $f(K)$ è compatto

$f(K) := \{ y \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists\, \underline{x} \in K$ con $f(\underline{x}) = y \}$

DIM

Mostro che $F(K)$ è compatto per successioni, cioè che da ogni successione in $F(K)$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a un elemento di $F(K)$.

Sia allora $\{y_n\}_n \subset F(K)$. Allora $\exists \underline{x}_n \in K$ t.c. $F(\underline{x}_n) = y_n$.

Essendo K compatto, dunque compatto per successioni $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K$ t.c $x_{n_i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} \underline{x} \in K$

Ma F è continua in $\underline{x}$ e dunque $F(\underline{x}_{n_i}) \xrightarrow[i\to+\infty]{} F(\underline{x})$. D'altronde $f(\underline{x}_{n_i}) = y_{n_i}$ per costruzione. Dunque $y_{n_i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} F(\underline{x}) \subset F(K)$

Quindi $\exists$ una sottosuccessione di $\{y_n\}$ che converge a un elemento $y \in F(K)$

Quindi $F(K)$ è compatto per successioni, dunque $F(K)$ è compatto

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $F: K \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in K, con K compatto. Allora F ammette massimo e minimo assoluti

DIM

Per il precedente teorema $F(K)$ è compatto dunque esso è chiuso e limitato

Essendo limitato i numeri $m := \inf\{F(\underline{x})$ con $\underline{x} \in K\}$ e $M := \sup\{F(\underline{x})$ con $\underline{x} \in K\}$ sono finiti ($\in \mathbb{R}$). D'altronde $F(K)$ è chiuso.

Mostro, ad esempio, usando tale fatto, che $\exists \overline{x} \in K$ t.c $F(\overline{x}) = M$.

Si noti che se $X \in \mathbb{R}$ è un insieme limitato allora o $\sup X$ ($\in \mathbb{R}$) è un punto isolato (cioè non di accumulazione) di X e in tal caso esso appartiene X oppure $\sup X$ è un punto di accumulazione di X. Ma se X è chiuso allora equalmente $\sup X \in X$ (un insieme è chiuso $\Longleftrightarrow$ esso contiene i suoi punti di accumulazione)

Sia ora $X = F(K)$. Per quanto detto $M \in F(K)$ cioè $\exists \underline{x} \in K$ t.c. $F(\underline{x}) = M$

Procedimento analogo per dimostrare che $m = F(\underline{x}_2)$

COROLLARIO

Sia $F[a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora F ammette massimo e minimo assoluti

(IPOTESI: intervallo limitato, chiuso, continuo)

TEOREMA di Heine - Cantor)

Sia $f: K \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su K con K compatto. Allora F è uniformemente continua su K

DIM (X ASSURDO)

Per assurdo suppongo F non uniformemente continua su K. Allora $\exists \varepsilon > 0$ t.c $\forall \delta$ $\exists$ punti $x_\delta, y_\delta \in K$ con $|x_\delta - y_\delta| \leq \delta$ ma $|F(x_\delta) - F(y_\delta)| > \varepsilon$

Scelgo $\delta = \delta_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ e indichiamo x_k, y_k i corrispondenti x_δ, y_δ

Essendo K compatto $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{k_h}\}_{h\in\mathbb{N}}$ che converge, per $h \to +\infty$, a $x \in K$ (K essendo compatto, è compatto per successioni)

D'altronde $|y_{k_h} - x| = |y_{k_h} - x_{k_h} + x_{k_h} - x| \leq \underbrace{|y_{k_h} - x_{k_h}|}_{\leq \frac{1}{k}} + |x_{k_h} - x| \leq \frac{1}{k_h} + |x_{k_h} - x| \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0$

$x_{k_h} \xrightarrow[h\to+\infty]{} x$

Quindi $y_{k_h} \xrightarrow[h\to+\infty]{} x$. Ma allora $|F(x_{k_h}) - F(y_{k_h})| = |F(x_{k_h}) - F(y_{k_h}) + F(x) - F(x)| \leq |F(x_{k_h}) - F(x)| + |F(y_{k_h}) - F(x)| \xrightarrow[h\to+\infty]{} 0$ per la continuità di F in $x \in K$

Ma per l'ipotesi di assurdo, si aveva $|F(x_{k_h}) - F(y_{k_h})| \geq \varepsilon$ $\forall h \in \mathbb{N}$, assurdo perché $|F(x_{k_h}) - F(y_{k_h})|$ tende a 0 per $k \to +\infty$