# Esami scritti di Analisi Matematica I 2018 - 2019

# 1 Esame del 30 gennaio 2019 - I$^o$ turno

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{2x+2}{x+4}\right) e^{1/(x+1)}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Studiare il segno della soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2 - f(x) \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$$

in un intorno destro e in un intorno sinistro di $1/2$.

**Esercizio 2, versione A.** (5 punti)

(a) Sia l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato. Dare la definizione di estremo inferiore di $A$.

(b) Stabilire se la successione

$$a_n = \arctan\left(\frac{2n+3}{n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

è monotona ed eventualmente di che tipo.

(c) Dato l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, determinare (se esistono) minimo o estremo inferiore, massimo o estremo superiore di $A$, motivando la risposta.

**SVOLGIMENTO**

**Esercizio 1.**

*a)* $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$.

Poiché $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$, $\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$ e $\frac{2x+2}{x+4} > 0$ in un intorno di $x = -1$, ponendo $s = 1/(x+1)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= 0, \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{s\to +\infty} \frac{2/s}{(1/s)+3}\, e^s = \lim_{s\to +\infty} \frac{2}{1+3s}\, e^s = +\infty. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 2.$$

Poiché $f(x) > 0$ in un intorno sinistro di $x = -4$ e $f(x) < 0$ in un intorno destro di $x = -4$, si ha che

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty.$$

Dunque

(a) La retta di equazione $x = -1$ è asintoto verticale destro di $f$.

(b) La retta di equazione $x = -4$ è asintoto verticale bilaterale di $f$

(c) La retta di equazione $y = 2$ è asintoto orizzontale bilaterale di $f$.

*b)* $f$ è composizione di funzioni derivabili sul suo dominio, e dunque è derivabile per ogni $x \in \text{dom} f$.

Inoltre

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\frac{2(x+4) - 2(x+1)}{(x+4)^2} + \frac{2(x+1)}{x+4} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2}\right] e^{1/(x+1)} = \\ &= \frac{2}{x+4}\left(\frac{3}{x+4} - \frac{1}{x+1}\right) e^{1/(x+1)} = \frac{2}{(x+4)^2} \cdot \frac{2x-1}{x+1}\, e^{1/(x+1)}. \end{aligned}$$

*c)* Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $f$ determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di $f'$.

Osserviamo che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1/2$. Inoltre

- $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (1/2, +\infty)$

- $f'(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-1, 1/2)$

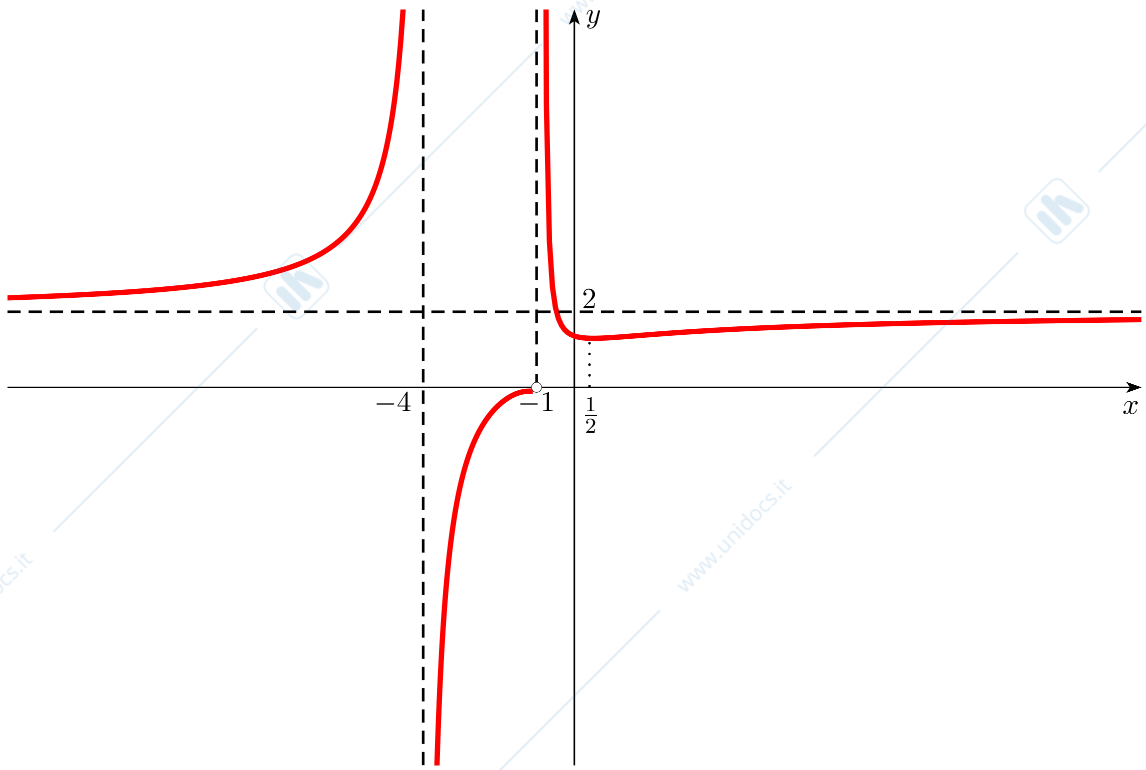
Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona. Inoltre, $f$ è continua in $x = 1/2$. Pertanto:

- $f$ è strettamente crescente su $(-\infty, -4)$, su $(-4, -1)$ e su $[1/2, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione di due qualunque degli intervalli),
- $f$ è strettamente decrescente su $(-1, 1/2]$.

Poiché $f$ è continua in $x = 1/2$, si ha che $x = 1/2$ è punto di minimo locale per $f$, che non ha altri punti di estremo.

Osserviamo inoltre che $f(1/2) = \dfrac{1+2}{4+1/2}\, e^{2/3} = \dfrac{2}{3}\, e^{2/3} > 0$.

*d*) Un grafico qualitativo di $f$ è




*e*) Consideriamo ora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2 - f(x). \\ y(1/2) = 0 \end{cases}$$

Poiché $f(1/2) \in (0, 2)$, $2 - f(1/2) > 0$. La funzione $g(x) = 2 - f(x)$ è continua sul suo dominio: per il Teorema della permanenza del segno esiste un intorno $I$ di $x = 1/2$ in cui $g(x) > 0$. Ne segue che la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy assegnato è tale che $y'(x) = g(x) > 0$ in $I$. Pertanto la soluzione è strettamente crescente in $I$.

Ricordando che $y(1/2) = 0$, possiamo concludere che $y(x) < 0$, $\forall x \in I \cap (-\infty, 1/2)$ e $y(x) > 0$, $\forall x \in I \cap (1/2, +\infty)$.

---

**Esercizio 2, versione A.**

*a)* Si dice estremo inferiore di un insieme inferiormente limitato $A$ il massimo dei minoranti di $A$, vale a dire quel numero reale $\ell$ tale che

- $\forall x \in A, \quad \ell \leq x$
- $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A$ tale che $\ell \leq x < \ell + \varepsilon$.

*b)* Consideriamo la successione

$$a_n = \arctan\left(\frac{2n+3}{n+1}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Osserviamo che

$$b_n = \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}.$$

Poiché, per ogni $n \geq 0$

$$b_{n+1} = 2 + \frac{1}{n+2} < b_n = 2 + \frac{1}{n+1},$$

la successione $b_n$ è strettamente decrescente. La funzione $\arctan(\cdot)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, e dunque la successione $a_n$ è strettamente decrescente.

Per mostrare che la successione è decrescente, si può usare anche un altro metodo. Infatti, la successione $a_n$ risulta essere la restrizione ai numeri naturali della funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)$$

definita su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Poiché

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \quad \forall x \in (-1, +\infty),$$

$f$ è strettamente decrescente su $(-1, +\infty)$. Ne segue che anche la sua restrizione ai numeri naturali, vale a dire $f(n) = a_n$ è strettamente decrescente.

*c*) Consideriamo l'insieme $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché la successione è strettamente decrescente, il massimo di $A$ risulta essere uguale ad $a_0 = \arctan 3$.

Il teorema sui limiti di funzioni monotone ci dice che

$$\inf A = \lim_{n \to +\infty} a_n = \arctan 2 \notin A.$$

Ne segue che $A$ ha massimo uguale a $\arctan 3$ ed ha estremo inferiore (ma non minimo) uguale a $\arctan 2$.

## 2 Esame del 30 gennaio 2019 - II$^o$ turno

**Esercizio 1.** (8 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{(x \ln |x| - x)} & \text{per } x \neq 0 \\ k & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

dove $k$ è un parametro reale.

(a) Determinare il valore di $k$ in modo che $f$ sia continua sul suo dominio. Calcolare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

*Si fissi ora $k$ come nel punto (a).*

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di $f(x)$, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando le risposte: (i) $f(x) \sim x^x$ per $x \to +\infty$; (ii) $f(x) = o(x^x)$ per $x \to +\infty$; (iii) $f(x) = x^x + o(1)$ per $x \to +\infty$.

**Esercizio 2, versione A.** (5 punti)

(a) Enunciare la proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione.

(b) Detta $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e pari, usare la proprietà di additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione per dimostrare che $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x) \sin x \, dx = 0$.

(c) Sia $g : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in [-3, 3]$ e $g(0) > 0$.
Dimostrare che $\displaystyle\int_{-3}^{3} g(x) \, dx > 0$.

---

**SVOLGIMENTO**

**Esercizio 1.**

*a)*
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $f$ è continua per $x \neq 0$, perché composizione di funzioni continue.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, e $f$ ha ordine di infinito maggiore di 1 rispetto a $x$: perciò $f$ non ha asintoto obliquo destro.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ e dunque $f$ ha asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 2$.
- $\lim_{x \to 0} f(x) = 2 + e^0 = 3$, e dunque $f$ è continua anche in $x = 0$ se e solo se $k = f(0) = 3$.

*b)* Fissiamo quindi $k = 3$. Abbiamo che $f$ è derivabile, perché composizione di funzioni derivabili, per ogni $x \neq 0$. Inoltre

$$f'(x) = e^{(x \ln|x| - x)} \left[ \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} - 1 \right] = (\ln|x|)\, e^{(x \ln|x| - x)}.$$

$f$ è continua in $x = 0$ e $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\infty$. Dal Teorema "del tappabuchi" segue che $f$ non è derivabile in $x = 0$, dove ha un punto a tangente verticale.

*c)* Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $f$ determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di $f'$.

$f'(x) = 0 \iff \ln|x| = 0 \iff x = \pm 1.$

Inoltre

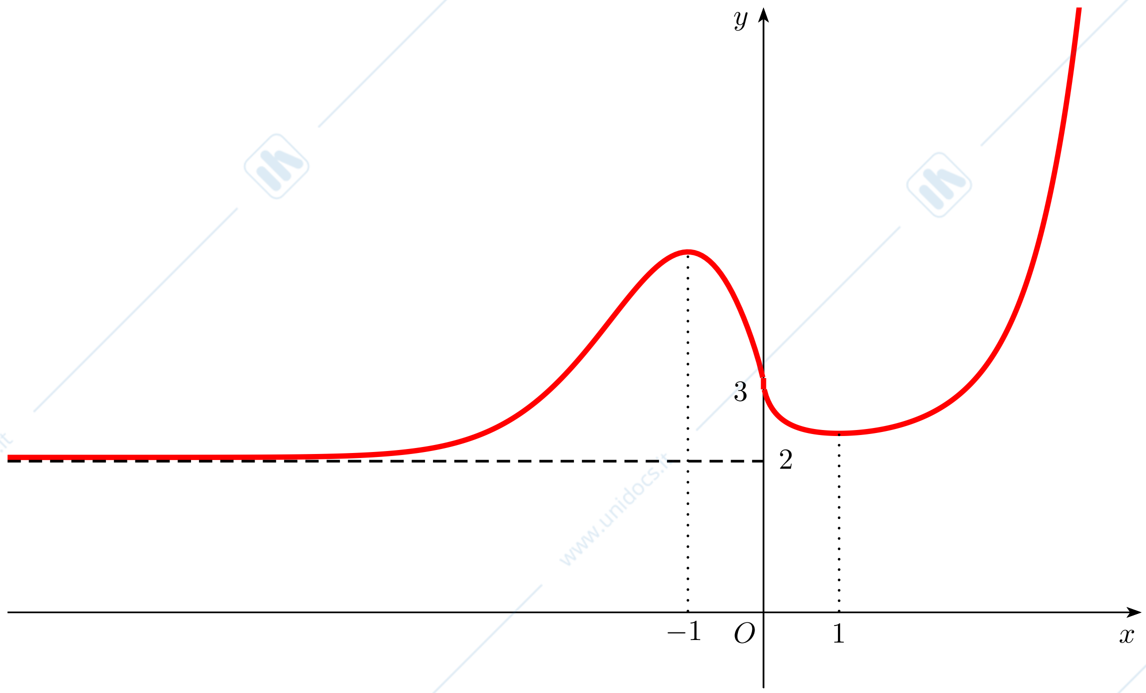
- $f'(x) < 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (0, 1).$
- $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$

Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona. Inoltre, $f$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi:

- $f$ è strettamente decrescente su $[-1, 1]$,
- $f$ è strettamente crescente su $(-\infty, -1]$ e su $[1, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli).

Ne segue che $x = -1$ è l'unico punto di massimo locale di $f$ e $x = 1$ è l'unico punto di minimo locale di $f$. Osserviamo inoltre che $f(1) = 2 + e^{-1} > 2$.

*d*) Un grafico qualitativo di $f$ è




*e*) Osserviamo che per ogni $x > 0$

$$f(x) = 2 + e^{(x \ln x - x)} = 2 + \left(e^{\ln x}\right)^x \cdot e^{-x} = 2 + x^x \cdot e^{-x}.$$

($i$) La prima affermazione è falsa.

Infatti, da quanto osservato sopra, otteniamo che $f(x) \sim x^x \cdot e^{-x}$ per $x \to +\infty$, e dunque è un infinito di ordine inferiore rispetto a $x^x$.

($ii$) La seconda affermazione è vera, infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x \cdot e^{-x}}{x^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

e dunque $f(x) = o(x^x)$, per $x \to +\infty$.

($iii$) L'affermazione che $f(x) = x^x + o(1)$ per $x \to +\infty$ è falsa.

Se fosse vera, $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x^x]$ dovrebbe essere nullo, mentre

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x^x) = \lim_{x\to+\infty} (2 + x^x e^{-x} - x^x) = 2 + \lim_{x\to+\infty} x^x(e^{-x} - 1) = -\infty.$$

**Esercizio 2, Versione A.**

*a*) Sia data una funzione integrabile $f$ su un intervallo chiuso e limitato $I$. Per ogni $a, b, c \in I$, è vero che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

*b*) Sia $f$ una funzione continua e pari su $[-3, 3]$. Allora la funzione $g(x) = f(x)\sin x$ è dispari; infatti $g(-x) = f(-x)\sin(-x) = -f(x)\sin x$. Consideriamo ora

$$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = \int_{-3}^{0} g(x)\,dx + \int_0^3 g(x)\,dx = I_1 + I_2.$$

Poniamo $t = -x$; abbiamo che

$$I_1 = \int_{-3}^{0} g(x)\,dx = \int_3^0 [-g(-t)]\,dt = \int_3^0 g(t)\,dt = -\int_0^3 g(t)\,dt = -I_2$$

e dunque

$$\int_{-3}^{3} f(x)\sin x\,dx = \int_{-3}^{3} g(x)\,dx = -I_2 + I_2 = 0.$$

*c*) Per ipotesi, $g$ è una funzione continua e non negativa su $[-3, 3]$. Inoltre $g(0) > 0$. Dal Teorema della permanenza del segno, segue che esiste un intorno $(-\delta, \delta)$ di 0 tale che $\forall x \in (-\delta, \delta),\ g(x) > \frac{g(0)}{2} > 0$.

Le proprietà degli integrali ci garantiscono che:

- Se $g(x) \geq 0$ su $[a, b]$, allora $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \geq 0$.
- Se $g(x) > \frac{g(0)}{2}$ su $(-\delta, \delta)$, $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} g(x)\,dx \geq \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(0)}{2}\,dx = 2\delta \cdot \frac{g(0)}{2} = \delta g(0)$.

Utilizzando poi la proprietà di additività rispetto al dominio, si ha che:

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3} g(x)\,dx &= \int_{-3}^{-\delta} g(x)\,dx + \int_{-\delta}^{\delta} g(x)\,dx + \int_{\delta}^{3} g(x)\,dx \\ &\geq 0 + \delta g(0) + 0 \geq \delta g(0) > 0.\end{aligned}$$

# 3 Esame del 12 febbraio 2019, I$^o$ turno

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - \log^3(x-1)|.$$

(a) Determinare il dominio e gli zeri di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ nel suo dominio e stabilire la natura degli eventuali punti di non derivabilità. Calcolare la funzione derivata $f'(x)$.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Stabilire, motivando opportunamente, se è vero che

$$\lim_{x\to 2^+} [f(x)] = [\lim_{x\to 2^+} f(x)]$$

dove $[\cdot]$ denota la funzione parte intera.

**Esercizio 2.** (5 punti)

(a) Scrivere la definizione di asintoto obliquo per $x \to +\infty$ per una funzione $f(x)$.

(b) Si consideri la seguente affermazione: se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un infinito di ordine $1/2$ rispetto al campione $u(x) = x^2 + 1$, per $x \to +\infty$, allora $f$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Vera o falsa? Se è vera, dimostrarla; se è falsa, trovare un controesempio.

(c) Si determini la parte principale e l'ordine di $f(x) = \sqrt{3 + (x + \sqrt{x})^2}$ rispetto al campione $u(x) = x$, per $x \to +\infty$ e si stabilisca se $f$ ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

---

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

*a*) $\mathrm{dom} f = (1, +\infty)$. Osserviamo inoltre che

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\iff \quad \log^3(x-1) = 1 \quad \iff \quad \log(x-1) = 1 \\ &\iff \quad x - 1 = e \quad \iff \quad x = e + 1. \end{aligned}$$

Dunque $f$ ha come unico zero $x = e + 1$.

Inoltre

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Poiché $f$ ha ordine di infinito minore di 1 rispetto a $x$, $f$ non ha asintoto obliquo destro.
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Dunque la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale (destro) di $f$.

Inoltre, poiché $1 - \log^3(x-1) > 0$ se e solo se $1 < x < e + 1$, abbiamo che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \log^3(x-1) & 1 < x \le e+1 \\ \log^3(x-1) - 1 & x > e + 1. \end{cases}$$

*b*) $f$ è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue. Inoltre, $f$ è certamente derivabile, perché composizione di funzioni derivabili, per ogni $x \in \mathrm{dom} f \setminus \{e + 1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -3\log^2(x-1) \cdot \dfrac{1}{x-1} & 1 < x < e+1 \\[2ex] 3\log^2(x-1) \cdot \dfrac{1}{x-1} & x > e+1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (e+1)^-} f'(x) &= -\frac{3\log^2 e}{e} = -\frac{3}{e} \\ \lim_{x \to (e+1)^+} f'(x) &= \frac{3\log^2 e}{e} = \frac{3}{e}. \end{aligned}$$

Poiché $f$ è continua in $x = e + 1$, possiamo ricorrere al Teorema "del tappabuchi" per concludere che

$$f'_-(e+1) = -\frac{3}{e} \neq f'_+(e+1) = \frac{3}{e}.$$

Dunque $f$ non è derivabile in $x = e + 1$, dove ha un punto angoloso.

*c*) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $f$ determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di $f'$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{3\log^2(x-1)}{x-1} = 0 \iff \log^2(x-1) = 0 \iff x-1 = 1 \iff x = 2.$$

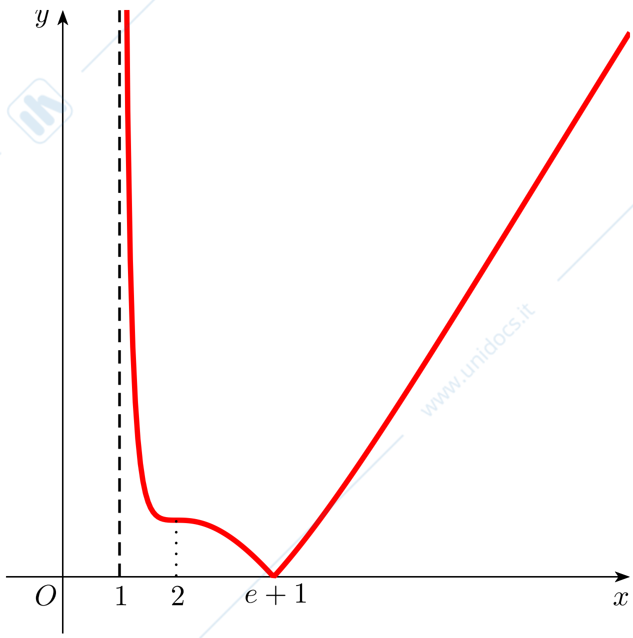
Dunque $f$ ha un unico punto critico, $x = 2$.

Inoltre $f'(x) > 0$ se $x > e+1$ e $f'(x) < 0$ se $1 < x < e+1$. Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona. Inoltre $f$ è continua in $x = e+1$. Ne segue che

- $f$ è strettamente decrescente su $(1, e+1]$ e che $x = 2$ è un punto di flesso a tangente orizzontale di $f$;
- $f$ è strettamente crescente su $[e+1, +\infty)$.

Inoltre, $x = e+1$ è l'unico punto di estremo di $f$; in particolare è un punto di minimo assoluto, perché $f(e+1) = 0 \leq f(x)$ per ogni $x$ del suo dominio.

*d*) Un grafico qualitativo di $f$ è




*e*) Osserviamo che $f(2) = 1$, che esiste un intervallo $(2-\delta, 2)$ in cui $2 < f(x) < 3$ e che su $(2, e+1)$ $0 < f(x) < 1$. Ne segue che

$$[f(x)] = \begin{cases} 1 & x \in (2-\delta, 2) \\ 0 & x \in (2, e+1). \end{cases}$$

Dunque $\lim_{x \to 2^+} [f(x)] = 0$.

Inoltre, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 1$ e

$$\left[\lim_{x \to 2^+} f(x)\right] = [1] = 1 \neq \lim_{x \to 2^+} [f(x)] = 0.$$

Dunque è falso che i due limiti siano uguali.

---

**Esercizio 2.**

*a)* Se $f$ è definita su una semiretta $(\alpha, +\infty)$ ed esistono $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = ax + b + o(1), \qquad \text{per} \ \ x \to +\infty$$

si dice che $f$ ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ per $x \to +\infty$.

In modo equivalente, se $f$ è definita su una semiretta $(\alpha, +\infty)$ e

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$

si dice che $f$ ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ per $x \to +\infty$.

*b)* Ricordiamo che $f$ è un infinito di ordine $1/2$ rispetto a $x^2+1$, per $x \to +\infty$, se $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{(x^2+1)^{1/2}} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dato che $(x^2+1)^{1/2} \sim x$, per $x \to +\infty$, ne segue che $f$ ha ordine di infinito 1 rispetto a $x$ e $f(x) \sim \ell x$, per $x \to +\infty$ . Questa è una delle due condizioni necessarie affinché una funzione abbia asintoto. L'altra è che $f(x) - \ell x = b + o(1)$, per $x \to +\infty$. Ne segue che l'affermazione è falsa.

Per esempio, la funzione $f(x) = x + \log x$ soddisfa la condizione data, ma non ha asintoto obliquo, perché $f(x) - x = \log x$, e dunque non tende ad una costante $b$, per $x \to +\infty$.

*c)* Ricordando che $(1+t)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$, per $t \to 0$, si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3 + (x + \sqrt{x})^2} = \left\{(x+\sqrt{x})^2 \left[1 + \frac{3}{(x+\sqrt{x})^2}\right]\right\}^{1/2} = \\ &= |x + \sqrt{x}| \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{(x+\sqrt{x})^2} + o\left(\frac{1}{(x+\sqrt{x})^2}\right)\right] = \\ &= x + \sqrt{x} + o(1) \qquad \text{per} \ \ x \to +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che $f$ ha ordine di infinito 1 rispetto a $x$, per $x \to +\infty$, ma $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Dunque $f$ non ha asintoto obliquo.

---

# 4 Esame del 12 febbraio 2019, II$^o$ turno

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-1/\log(x^2-4)}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti. Stabilire, motivando opportunamente, se esistano punti nei quali sia possibile prolungare per continuità la funzione $f(x)$.

*Indicare quindi con $\tilde{f}(x)$ il prolungamento continuo di $f(x)$.*

(b) Studiare la derivabilità di $\tilde{f}(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di $\tilde{f}(x)$, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $\tilde{f}(x)$.

(e) Motivare i risultati di monotonia ottenuti al punto (c) anche senza l'uso della derivata.

**Esercizio 2.** (5 punti)

(a) Scrivere la formula di Taylor con resto di Peano di una funzione $y = f(x)$, puntualizzando le ipotesi sotto le quali la formula è valida.

(b) Il polinomio di Maclaurin di secondo grado di una funzione $f(x)$ è $Q_2(x) = 1 - x + 2x^2$. Scrivere il polinomio di Maclaurin di secondo grado $P_2(x)$ della funzione

$$g(x) = x + \log f(x).$$

(c) Dire se è vero che esiste un intorno $I$ di 0 tale che la funzione $g(x)$ definita al punto (b) è positiva in $I \setminus \{0\}$. Motivare la risposta.

---

**SVOLGIMENTO**

**Esercizio 1.**

*a)* $f$ è definita se e solo se $x^2-4>0 \;\wedge\; \log(x^2-4)\neq 0$ e cioè se e solo se $(x<-2 \vee x>2) \;\wedge\; x\neq\pm\sqrt{5}$.

Dunque $\mathrm{dom} f = (-\infty,-\sqrt{5})\cup(-\sqrt{5},-2)\cup(2,\sqrt{5})\cup(\sqrt{5},+\infty)$.

Osserviamo inoltre che $f(-x)=f(x)$, per ogni $x\in\mathrm{dom} f$; dunque $f$ è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse $y$. Inoltre,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} e^{-1/\log(x^2-4)} &= \lim_{x\to -2^-} e^{-1/\log(x^2-4)} = 1,\\
\lim_{x\to \sqrt{5}^+} e^{-1/\log(x^2-4)} &= \lim_{x\to -\sqrt{5}^-} e^{-1/\log(x^2-4)} = 0,\\
\lim_{x\to \sqrt{5}^-} e^{-1/\log(x^2-4)} &= \lim_{x\to -\sqrt{5}^+} e^{-1/\log(x^2-4)} = +\infty,\\
\lim_{x\to +\infty} e^{-1/\log(x^2-4)} &= \lim_{x\to -\infty} e^{-1/\log(x^2-4)} = 1.
\end{aligned}$$

Ne segue che $f$ ha un asintoto verticale sinistro di equazione $x=\sqrt{5}$ e un asintoto verticale destro di equazione $x=-\sqrt{5}$. Inoltre ha asintoto orizzontale bilaterale di equazione $y=1$.

Osserviamo inoltre che $f$ è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue. Inoltre, può essere prolungata per continuità in $x=\pm 2$. Otteniamo cosí la funzione, continua su $\mathrm{dom}\, f\cup\{\pm 2\}$:

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\mathrm{dom} f\\ 1 & x=\pm 2.\end{cases}$$

*b)* Osserviamo che $\tilde{f}$ non è derivabile in $x=\pm 2$, perché non sono punti interni al dominio. Essa è certamente derivabile, perché composizione di funzioni derivabili, per ogni $x\in\mathrm{dom} f$, dove si ha che:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}'(x) &= f'(x) = e^{-1/\log(x^2-4)}\cdot\frac{1}{\log^2(x^2-4)}\cdot\frac{2x}{x^2-4} = \\
&= e^{-1/\log(x^2-4)}\cdot\frac{2x}{(x^2-4)\log^2(x^2-4)}.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+}\tilde{f}'(x) &= \lim_{x\to(-2)^-}\tilde{f}'(x) = +\infty,\\
\lim_{x\to \sqrt{5}^+}\tilde{f}'(x) &= \lim_{x\to -\sqrt{5}^-}\tilde{f}'(x) = +\infty.
\end{aligned}$$

*c*) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $\tilde{f}$ determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di $\tilde{f}'$.

Osserviamo che $\tilde{f}'(x) \neq 0$ per ogni punto di $\operatorname{dom} f$. Inoltre:

$$\tilde{f}'(x) > 0 \iff \left( \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} \right) \wedge (x \in \operatorname{dom} f) \iff x > 0$$

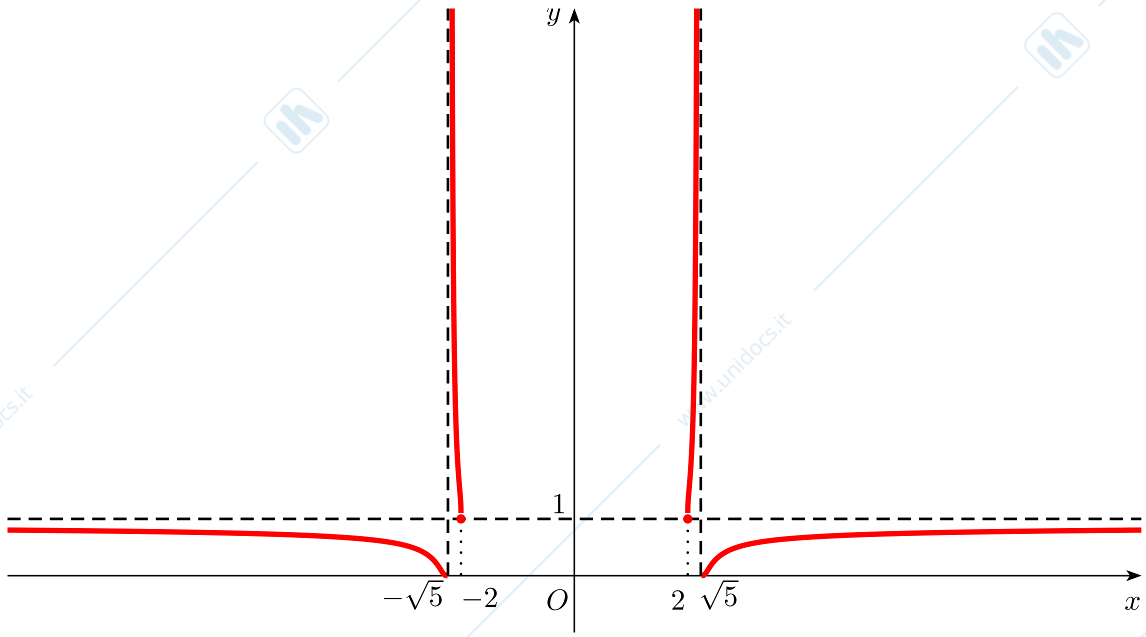
ed è negativa negli altri punti in cui è definita.

Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona. Ne segue che

- $\tilde{f}$ è strettamente crescente su $[2, \sqrt{5})$ e su $(\sqrt{5}, +\infty)$;
- $f$ è strettamente decrescente su $(-\infty, -\sqrt{5})$ e su $(-\sqrt{5}, -2]$.

Inoltre i punti $x = 2$ e $x = -2$ sono gli unici punti di minimo locale di $\tilde{f}$, che non ha punti di massimo locale né punti di estremo assoluto.

*d*) Un grafico qualitativo di $\tilde{f}$ è




*e*) Per mostrare qualitativamente quali sono gli intervalli di monotonia di $\tilde{f}$ conviene studiarla solo per le $x > 0$, e poi procedere per simmetria.

Osserviamo che $g_1(x) = x^2 - 4$ è strettamente crescente per ogni $x > 0$. Inoltre $g_1(x) > 0$ per ogni $x > 2$.

Dunque $g_2(x) = \log(x^2 - 4)$ è strettamente crescente per ogni $x > 2$, e non è definita per $0 < x \leq 2$. Inoltre, $g_2(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt{5}$ e $g_2(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt{5}$ .

Allora $g_3(x) = \dfrac{1}{\log(x^2-4)}$ è strettamente decrescente in $(2, \sqrt{5})$ e in $(\sqrt{5}, +\infty)$, ma non sull'unione dei due intervalli.

Cambiando segno, otteniamo che $g_4(x) = -\dfrac{1}{\log(x^2-4)}$ è strettamente crescente in $(2, \sqrt{5})$ e in $(\sqrt{5}, +\infty)$, ma non sull'unione dei due intervalli.

Componendo poi con la funzione esponenziale in base $e$, che è strettamente crescente, otteniamo la funzione $f$, che ha gli stessi intervalli di monotonia di $g_4$. Poiché $\tilde{f}$ è continua in $x = 2$, possiamo dire che $\tilde{f}$ è strettamente crescente in $[2, \sqrt{5})$ e in $(\sqrt{5}, +\infty)$, ma non sull'unione dei due intervalli.

Poiché $\tilde{f}$ è pari, possiamo concludere lo studio, dicendo che $\tilde{f}$ è strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{5})$ e in $(-\sqrt{5}, -2]$, ma non sull'unione dei due intervalli.

---

**Esercizio 2.**

*a)* Se $f$ è definita e derivabile $n-1$ volte in un intorno di $I$ di $x_0$ e derivabile $n$ volte in $x_0$, vale la Formula di Taylor con in resto di Peano, di ordine $n$, centrata in $x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

per $x \to x_0$.

*b)* Per ipotesi, $g(x) = x + \log\left[1 - x + 2x^2 + o(x^2)\right]$, per $x \to 0$. Utilizzando lo sviluppo di Maclaurin $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, per $t \to 0$, e ponendo $t = -x + 2x^2$ otteniamo:

$$\begin{aligned} g(x) &= x + (-x + 2x^2) - \frac{1}{2}(-x + 2x^2)^2 + o\left((-x + 2x^2)^2\right) = \\ &= 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = \frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right), \qquad \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Ne segue che $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2$ è il polinomio di Maclaurin di grado 2 di $g$.

*c)* Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = \frac{3}{2} > 0.$$

Per il Teorema della permanenza del segno, esiste un intorno $I$ di $x = 0$ in cui $g$ ha lo stesso segno di $x^2$. Dunque, per ogni $x \in I \setminus \{0\}$, $g(x) > 0$.

---

# 5 Esame del 28 giugno 2019

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\log|-x+4| + \frac{(x-1)^2}{2}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $\tilde{f}(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di $\tilde{f}(x)$, precisando se sono relativi o assoluti. Determinare il segno dei valori massimi e minimi.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $\tilde{f}(x)$.

(e) Data la funzione $g(x) = f(-|x|)$, tracciarne qualitativamente il grafico e studiarne la derivabilità nel suo dominio.

**Esercizio 2.** (5 punti)

(a) **Versione A.** Dare la definizione di primitiva di una funzione $f$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

**Versione B.** Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

(b) **Versione A.** È vero che, se $f(x)$ è continua su $I$, allora la funzione $\dfrac{f(x)}{1+(f(x))^2}$ ammette almeno una primitiva su $I$? Motivare la risposta.

**Versione B.** È vero che, se $f(x)$ è continua su $I$, allora la funzione $\log 3 + (f(x))^2$ ammette almeno una primitiva su $I$? Motivare la risposta.

(c) Determinare tutte le primitive della funzione $f(x) = x|x-1|$ su $\mathbb{R}$.

---

**SVOLGIMENTO**

**Esercizio 1.**

*a)* $f$ è definita se e solo se $|-x+4|>0$ e cioè se e solo se $x \neq 4$.

Dunque $\mathrm{dom} f = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.

Inoltre,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty.$$

$f$ non ha asintoti obliqui, dato che ha ordine di infinito 2 rispetto a $x$, per $x \to \pm\infty$.

$f$ ha asintoto verticale bilaterale di equazione $x = 4$.

Osserviamo inoltre che $f$ è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue.

*b)* Osserviamo che $f$ è derivabile in tutto il dominio, perché è composizione di funzioni derivabili. Infatti la funzione $|-x+4|$ non è derivabile solo in $x = 4$, dove $f$ non è definita.

Per ogni $x \in \mathrm{dom} f$, si ha che:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{x-4} + (x-1) = \frac{(x-1)(x-4)+2}{x-4} = \\ &= \frac{(x-3)(x-2)}{x-4}. \end{aligned}$$

*c)* Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $f$ determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di $f'$.

Osserviamo che

$$\begin{array}{lcl} f'(x) = 0 & \iff & x = 3 \vee x = 2 \\ f'(x) > 0 & \iff & x \in (2,3) \cup (4, +\infty) \\ f'(x) < 0 & \iff & x \in (-\infty, 2) \cup (3, 4). \end{array}$$

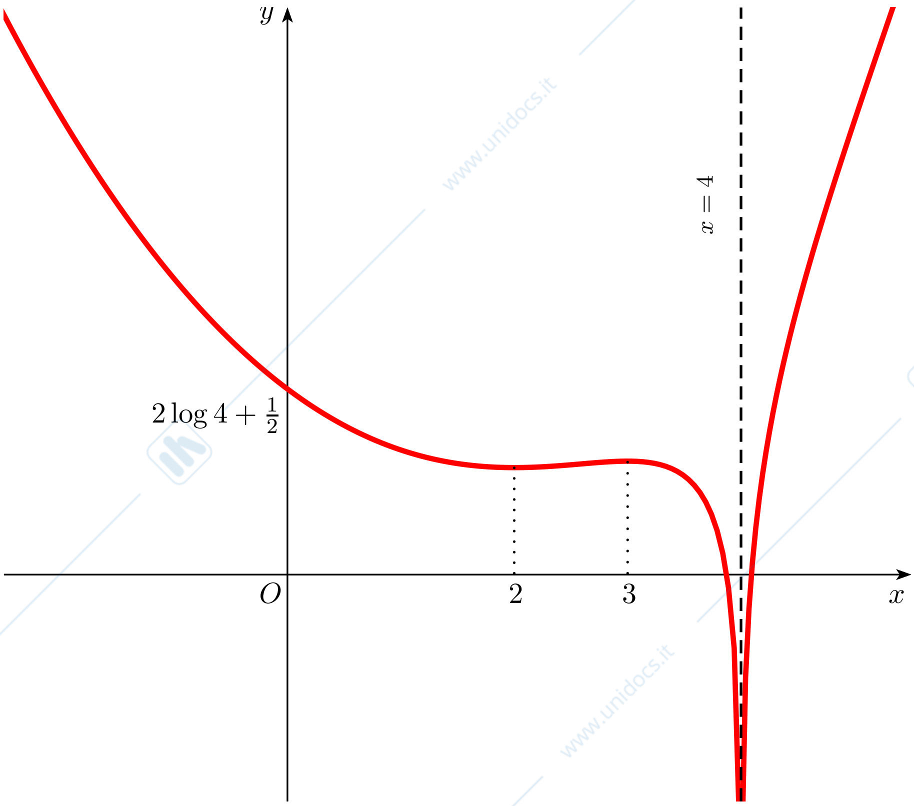
Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona. Ne segue che

- $f$ è strettamente crescente su $[2, 3]$ e su $(4, +\infty)$;
- $f$ è strettamente decrescente su $(-\infty, 2]$ e su $[3, 4)$.

Inoltre il punto $x = 2$ è l'unico punto di minimo locale e $x = 3$ è l'unico punto di massimo locale di $f$, che non ha punti di massimo o minimo assoluto, essendo illimitata superiormente e inferiormente.

Inoltre, $f(2) = 2\log 2 + \dfrac{1}{2} > 0$ e $f(3) = 2\log 1 + 2 = 2 > 0$.

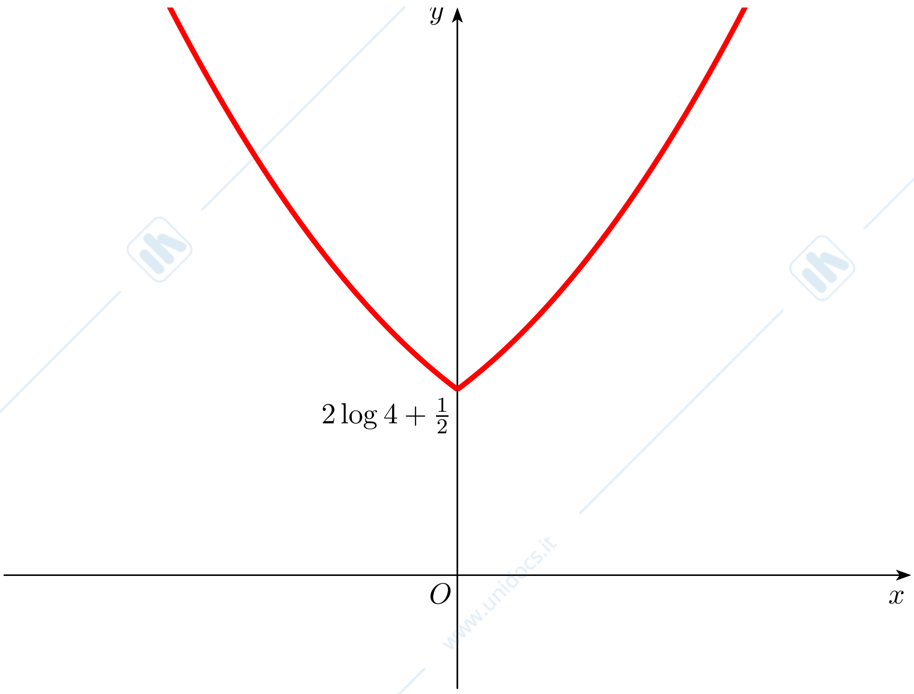
*d*) Un grafico qualitativo di $f$ è




*e*) Osserviamo che

$$g(x) = f(-|x|) = \begin{cases} f(x) & x \leq 0 \\ f(-x) & x > 0. \end{cases}$$

Dunque il grafico di $g$ è simmetrico rispetto all'asse $y$, e per $x < 0$ è uguale al grafico di $f$.




Inoltre,

$$g'(x) = \begin{cases} f'(x) = \dfrac{(x-3)(x-2)}{x-4} & x < 0 \\ -f'(-x) = -\dfrac{(-x-3)(-x-2)}{-x-4} = \dfrac{(x+3)(x+2)}{x+4} & x > 0. \end{cases}$$

$g$ è continua in $x = 0$ e derivabile altrove, quindi per studiare la derivabilità di $g$ in $x = 0$ possiamo usare il Teorema del "tappabuchi".

$$\lim_{x\to 0^-} g'(x) = -\frac{3}{2} = g'_-(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \frac{3}{2} = g'_+(0)$$

Ne segue che $g$ non è derivabile in $x = 0$, dove ha un punto angoloso.

---

**Esercizio 2.**

*a*) **Versione A.**

Si dice primitiva di $f$ su $I$ (se esiste) una funzione $F$ derivabile su $I$ e tale che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$.

**Versione B.**

Si dice che una funzione $f$ è continua in $x_0 \in \mathrm{dom} f$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\; |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Equivalentemente, indicato con $I_\varepsilon(x)$ l'intorno di $x$ di raggio $\varepsilon$:

$$\forall I_\varepsilon f(x_0) \; \exists I_\delta(x_0) \;\; x \in I_\delta(x_0) \cap \mathrm{dom}\, f \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in I_\varepsilon f(x_0).$$

Inoltre, $f$ è continua su $I$ se è continua per ogni $x \in I$.

*b*) **Versione A** Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale discende che tutte le funzioni continue su un intervallo $I$ hanno primitive su $I$.

Osserviamo che $1 + (f(x))^2 > 0$ e continua per ogni $x \in I$; dunque anche $\dfrac{f(x)}{1 + (f(x))^2}$ è continua su $I$, perché è quoziente di funzioni continue, con il denominatore diverso da 0. Dunque la funzione ammette primitive su $I$.

**Versione B**

In questo caso, si ha $3 + (f(x))^2 > 0$ e continua per ogni $x \in I$. Componendo con la funzione logaritmo, si ottiene $\log(3 + (f(x))^2)$ che è definita e continua su $I$, perchè composizione di funzioni continue. Dunque la funzione ammette primitive su $I$.

*c*) La funzione

$$f(x) = x|x - 1| = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ -x^2 + x & x < 1. \end{cases}$$

Per determinarne le primitive, calcoliamo prima di tutto le primitive $F_1$ definite per $x < 1$ e le $F_2$ definite per $x > 1$.

Abbiamo che:

$$\begin{cases} F_1(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + k_1 & x < 1 \\[2ex] F_2(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + k_2 & x > 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} F_1(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + k_1 = \frac{1}{6} + k_1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 1^+} F_2(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + k_2 = -\frac{1}{6} + k_2 \end{cases}$$

Per avere funzioni continue anche in $x = 1$ poniamo

$$F(1) = \lim_{x \to 1^-} F_1(x) = \frac{1}{6} + k_1 = \lim_{x \to 1^+} F_2(x) = -\frac{1}{6} + k_2$$

e dunque $k_1 = k_2 - \frac{1}{3}$. Otteniamo così, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le funzioni continue:

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + k - \frac{1}{3} & x \geq 1 \\ \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + k & x > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \neq 1$; inoltre $F$ è continua in $x = 1$ e $\lim_{x \to 1^-} F'(x) = \lim_{x \to 1^+} F'(x) = f(1) = 0$. Il Teorema del "tappabuchi" ci permette di concludere che $F$ è derivabile anche in $x = 1$ e $F'(1) = 0$.

Abbiamo così che le funzioni $F(x)$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, costituiscono l'insieme delle primitive di $f$ su $\mathbb{R}$.

# 6 Esame del 10 settembre 2019

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{3\sqrt[3]{x-1}}{x+1}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata. Stabilire la natura degli eventuali punti di non derivabilità.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di $f(x)$, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Si consideri la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(y(x)) \\ y(0) = 3, \end{cases}$$

dove $f$ è la funzione considerata sopra. Dire se la funzione $y(x)$ è convessa o concava nel punto di ascissa $x = 0$.

**Esercizio 2.** (5 punti)

(a) Calcolare il valore dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}\, dt.$$

(b) Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}\, dt, \quad x \geq 0.$$

Mostrare che la funzione $F(x^5)$ è crescente sull'intervallo $[0, +\infty)$.

(c) Determinare l'estremo superiore della funzione $F(x^5)$ sull'intervallo $[0, +\infty)$.

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

*a*) $f$ è definita se e solo se $x+1 \neq 0$.

Dunque dom$f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Anche se non è richiesto esplicitamente, in questo caso è facile studiare il segno di $f$; risulta:

$$\begin{array}{lll} f(x) > 0 & \text{se e solo se} & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ f(x) = 0 & \text{se e solo se} & x = 1, \\ f(x) < 0 & \text{se e solo se} & x \in (-1, 1). \end{array}$$

Inoltre,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty.$$

Ne segue che $f$ ha un asintoto verticale bilaterale di equazione $x = -1$ e un asintoto orizzontale bilaterale di equazione $y = 0$.

Osserviamo inoltre che $f$ è continua sul suo dominio, perché composizione di funzioni continue.

*b*) Osserviamo che la funzione $\sqrt[3]{x-1}$ non è derivabile in $x = 1$, mentre lo è altrove. Dunque $f$ è certamente derivabile in dom$f \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dobbiamo valutare separatamente la derivabilità di $f$ in $x = 1$. A tale scopo calcoliamo la derivata là dove è definita.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\,\frac{\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}(x+1) - (x-1)^{1/3}}{(x+1)^2} = \\ &= 3\,\frac{x+1-3(x-1)}{3(x+1)^2(x-1)^{2/3}} = \frac{-2x+4}{(x+1)^2(x-1)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che il denominatore è strettamente positivo per ogni $x \in \text{dom}(f)$. Inoltre $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 2$ e

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = +\infty.$$

Poiché $f$ è continua in $x = 1$ e derivabile in un intorno di 1, escluso 1, dal Teorema del "tappabuchi" segue che il punto $x = 1$ è un punto di non derivabilità; più precisamente, è un punto a tangente verticale.

*c*) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di $f$ studiamo zeri e segno di $f'$. Poichè il denominatore di $f'$ è positivo là dove $f'$ è definita, per studiarne il segno basta studiare il segno del numeratore. Ne segue che:

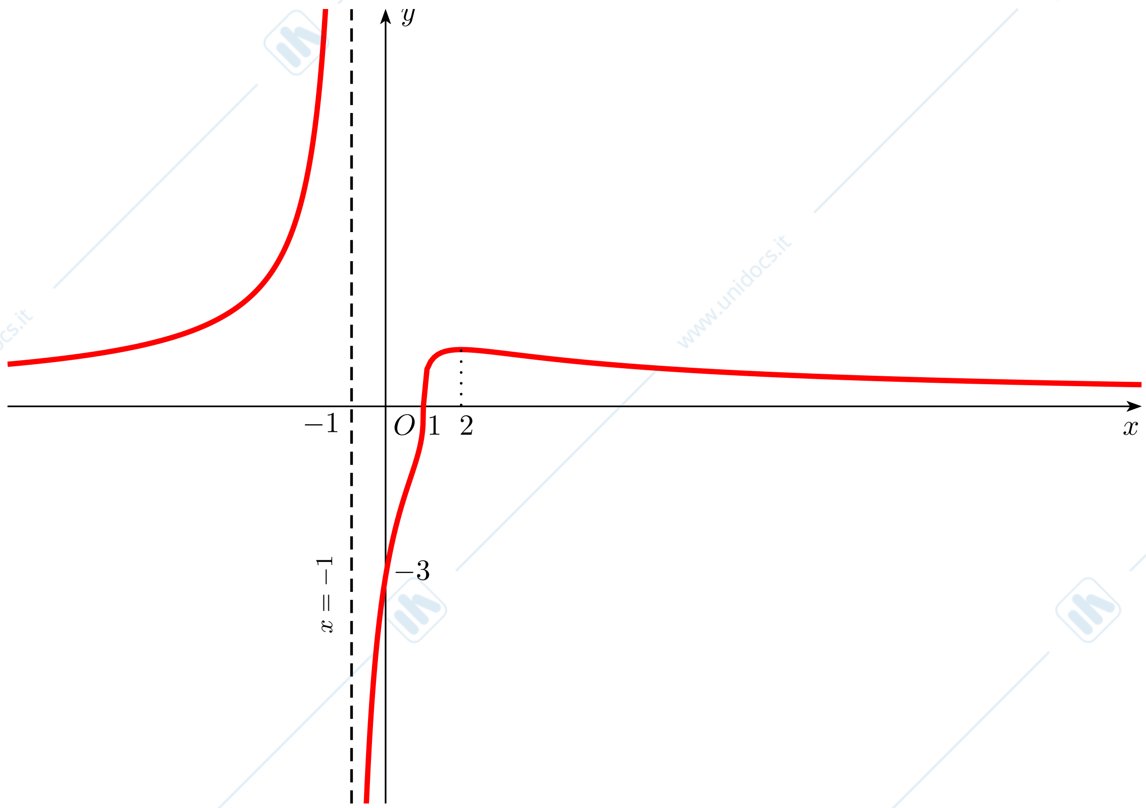
- $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2)$;
- $f'(x) < 0 \iff x \in (2, +\infty)$;
- $f'(x) = 0 \iff x = 2$.

Una generalizzazione del teorema di Lagrange ci permette di affermare che se una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile in $(a, b) \setminus \{c\}$ è tale che il segno di $f'$ è costante e $\neq 0$ in $(a, b) \setminus \{c\}$, allora $f$ è monotona su $[a, b]$. Ne segue che

- $f$ è strettamente crescente su $(-\infty, -1)$ e su $(-1, 2]$;
- $f$ è strettamente decrescente su $[-2, +\infty)$.

Inoltre il punto $x = 2$ è l'unico punto di estremo: in particolare, è un punto di massimo locale e non assoluto, dato che $f$ è illimitata superiormente.

*d*) Un grafico qualitativo di $f$ è



*e*) Osserviamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione locale $\varphi(x)$, dato che $f$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in $(1, +\infty)$. Allora:

$$\varphi'(x) = f(\varphi(x)),$$

quindi

$$\varphi''(x) = f'(\varphi(x))\varphi'(x) = f'(\varphi(x))f(\varphi(x))$$

e

$$\varphi''(0) = f'(\varphi(0))f(\varphi(0)) = f'(3)f(3) < 0.$$

Ne segue che $\varphi$ è concava in $x = 0$.

---

**Esercizio 2.**

*a*) Osserviamo che la funzione integranda

$$f(t) = \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}$$

è continua e strettamente positiva su $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $f(t) \sim e^{-(t+3)}$, per $t \to +\infty$, i teoremi del confronto asintotico ci permettono di concludere che l'integrale improprio converge ad un valore positivo.

Per calcolare il valore dell'integrale improprio, ricordiamo che

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{z \to +\infty} \int_0^z \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}\, dt.$$

Per calcolare quell'integrale definito, possiamo procedere in due modi.

*Metodo 1*

$$\int_0^z \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}\, dt = \frac{3}{e^3} \int_0^z \frac{1}{3 + e^t}\, dt.$$

Ponendo $s = e^t$, abbiamo che $ds = e^t\, dt$, da cui segue che $dt = \dfrac{1}{s}\, ds$. Quindi

$$\int_0^z \frac{3}{3e^3 + e^{t+3}}\, dt = \frac{3}{e^3} \int_1^{e^z} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3 + s}\, ds.$$

Utilizzando il metodo dei fratti semplici, vediamo che

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3 + s} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{3 + s} \right].$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{e^3}\int_0^z \frac{1}{3+e^t}\,dt &= \frac{3}{e^3}\int_1^{e^z} \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{3+s}\,ds = \\
&= \frac{3}{e^3}\int_1^{e^z} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{3+s}\right] ds = \\
&= \frac{1}{e^3}\left[\log\frac{s}{3+s}\right]_1^{e^z} = \frac{1}{e^3}\left[\log\frac{e^z}{3+e^z}-\log\frac{1}{4}\right].
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{z\to+\infty}\int_0^z \frac{3}{3e^3+e^{t+3}}\,dt = \lim_{z\to+\infty}\frac{1}{e^3}\left[\log\frac{e^z}{3+e^z}-\log\frac{1}{4}\right] = e^{-3}\log 4.$$

*Metodo 2*

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{3}{3e^3+e^{t+3}}\,dt &= \frac{1}{e^3}\int_0^z \frac{1}{3+e^t}\,dt = \frac{1}{e^3} = \int_0^z \frac{3+e^t-e^t}{3+e^t}\,dt = \\
&= \frac{1}{e^3}\int_0^z \left[1-\frac{e^t}{3+e^t}\right] dt = \frac{1}{e^3}\Big[t-\log(3+e^t)\Big]_0^z = \\
&= \frac{1}{e^3}\left[z-\log(3+e^z)+\log 4\right] = \frac{1}{e^3}\left[z-\log(e^z(3e^{-z}+1))+\log 4\right] = \\
&= \frac{1}{e^3}\left[z-z-\log(3e^{-z}+1)+\log 4\right] = \frac{1}{e^3}\left[\log 4-\log(3e^{-z}+1)\right]
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\int_0^{+\infty} \frac{3}{3e^3+e^{t+3}}\,dt = \lim_{z\to+\infty}\frac{1}{e^3}\left[\log 4-\log(3e^{-z}+1)\right] = e^{-3}\log 4.$$

*b)* Poiché $f(t)>0$, per ogni $t\in\mathbb{R}$, la funzione integrale $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. La funzione $g(t)=t^5$ è anch'essa strettamente crescente su $\mathbb{R}$, dunque $F(x^5)$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ (e in particolare su $[0,+\infty)$) perché composizione di funzioni strettamente crescenti.

Possiamo ottenere lo stesso risultato applicando il Teorema fondamentale del calcolo integrale, che ci garantisce - dato che la funzione integranda è continua - che $F$ è derivabile e che $F'(x)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Allora:

$$\frac{d}{dx}F(x^5) = F'(x^5)(x^5)' = f(x^5)\cdot 4x^4 > 0$$

per ogni $x\neq 0$. Dunque $F(x^5)$ è crescente su $\mathbb{R}$, e quindi anche su $[0,+\infty)$.

*c*) Applicando il teorema sui limiti di funzioni monotone alla funzione strettamente crescente $F(x^5)$ otteniamo che

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} F(x^5) = \lim_{x\to+\infty} F(x^5) = \lim_{z\to+\infty} F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = e^{-3}\log 4.$$