

ANALISI I - RACCOLTA DOMANDE DI TEORIA**(1° PROVA ITINERE)**

- Dimostrare che se la serie converge, la successione è infinitesima
- **Dimostrazione convergenza assoluta**
- Dimostrare divergenza serie armonica
- Definizione di successione convergente
- Enunciare e dimostrare teorema unicità del limite per successioni
- Dimostrare irrazionalità radice di 2
- Data una successione infinitesima, stabilire il comportamento di alcune serie (Compito1-05)
- Data una serie a termini positivi e convergente, dimostrare che una serie converge (Compito2)
- Enunciare e dimostrare la condizione necessaria di convergenza delle serie. Mostrare con un esempio che tale condizione non è sufficiente.
- Definire la serie geometrica
- Dare la definizione di successione limitata
- Dare la definizione di successione divergente
- Enunciare il Teorema dei 2 Carabinieri
- Dimostrare che data una successione limitata e una successione infinitesima allora la successione prodotto è infinitesima.
- Definire estremo superiore e massimo
- Fornire un esempio di insieme che non ammette estremo superiore, e di un insieme che ammette estremo superiore ma non massimo.
- Enunciare l'Assioma di Completezza
- Dare la definizione di serie convergente
- Dare la definizione di serie assolutamente convergente
- Discutere la relazione tra convergenza e convergenza assoluta di una serie.
- Come si dimostra la convergenza della serie armonica a segno alterno? E quanto vale la somma della serie?
- Enunciare e dimostrare la condizione necessaria di convergenza di una serie. Tale condizione è anche sufficiente?
- Esprimere in termini formali (cioè attraverso la definizione) il fatto che una successione NON sia infinitesima
- Enunciare una delle versioni del Teorema della Permanenza del Segno per le successioni
- Enunciare i due criteri del confronto per le serie a termini positivi
- Dare la definizione di numero razionale
- Mostrare un esempio di successione indeterminata ma non limitata
- Sia data una successione indeterminata, e una divergente a $+\infty$. È necessariamente vero che il prodotto tra le due $\rightarrow +\infty$? (dimostrare o fornire un controesempio).
- Dare la definizione di successione non infinitesima
- Mostrare un esempio (con adeguata spiegazione) di serie convergente ma non assolutamente convergente
- Enunciare e dimostrare il teorema sulla convergenza delle successioni monotone
- Enunciare il criterio del rapporto per le serie, ed applicarlo per dimostrare la convergenza di una serie (Iti1-2019)
- Dimostrare che se una successione è convergente allora è limitata
- Definire la serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$, e discuterne il carattere al variare di q (calcolando la somma della serie quando convergente)
- Sia $a_n > 0$ una successione infinitesima. Cosa si può dire delle seguenti serie (giustificare le risposte)? Cambia qualcosa nell'ipotesi aggiuntiva a_n monotona? (02-09-2022)
- Dimostrare che ogni successione ammette una sotto successione tale che il suo limite sia l , per un qualche l appartenente alla retta reale estesa $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$.
- Siano a_n e b_n due successioni strettamente positive:
 - Se $a_n - b_n \rightarrow 0$ possiamo affermare che $a_n \sim b_n$? E in caso negativo, che ipotesi ulteriori dobbiamo richiedere affinché l'affermazione risulti vera?
 - Se $a_n \sim b_n$ possiamo affermare che $e^{a_n} \sim e^{b_n}$? E in caso negativo, che ipotesi ulteriori dobbiamo richiedere affinché l'affermazione risulti vera?

(2^PROVA ITINERE)

- Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
- Dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.
- Assumendo nota la linearità dell'integrale e il fatto che il quadrato di una funzione integrabile è integrabile, mostrare che se f e g sono integrabili su $[a, b]$ allora lo è anche il loro prodotto $f \cdot g$.
- Sia data $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (a, b)$. Dare la definizione di f differenziabile in x_0 e f derivabile in x_0 . Dimostrare quindi che f differenziabile in x_0 è equivalente a f derivabile in x_0 .
- Enunciare e dimostrare il Teorema di Rolle.
- Sia $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua:
Dare la definizione di f integrabile impropriamente su I . Dimostrare che se f è integrabile impropriamente su I e f ammette limite, allora esso è $= 0$.
Se f è integrabile impropriamente su I , allora segue necessariamente che $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?
- Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$.
Dare la definizione di f continua in x_0 .
Dare la definizione di f derivabile in x_0 .
Dare la definizione di f differenziabile in x_0 .
Discutere la relazione tra derivabilità e differenziabilità di f in x_0 .
Discutere la relazione tra derivabilità e continuità di f in x_0 .
- **Dare la definizione di funzione f convessa su $[a, b]$. Se f è convessa e derivabile, cosa possiamo dire di $f'(x)$?**
- Sia $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ una funzione due volte derivabile tale che la funzione $\log(f(x))$ sia convessa su $[a, b]$. Dimostrare che f è convessa su $[a, b]$.
- Enunciare il Teorema di Lagrange.
- Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) > 1$ per ogni $x \in (0, 1)$.
Dimostrare che l'equazione $f(x) = x$ non ha soluzioni in $(0, 1)$.
- Dare la definizione di funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann.
- Mostrare un esempio di funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata ma non integrabile (motivare la risposta adeguatamente).
- **Costruire un esempio di funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, non integrabile su ogni intervallo $[a, b] \subset [0, 1]$, ma che sia continua in almeno un punto. → FUNZIONE DI RICHELET**
- Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dare la definizione di supf. Costruire quindi un esempio esplicito di $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: f non ha massimo, f è superiormente limitata, ed esiste una successione x_n di punti di massimo locale forte tale che $f(x_n) \rightarrow \sup f$.
- Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua simmetrica pari. Dimostrare l'uguaglianza tra due integrali definiti.
- Dare la definizione di funzione crescente su un intervallo (a, b) .
- Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Mostrare che f è costante.
- Dare la definizione di primitiva di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Enunciare e dimostrare il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale
- Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange.
- Enunciare e dimostrare il Teorema degli Zeri per le funzioni continue.
- Enunciare e dimostrare il Teorema di Weierstrass per le funzioni continue.
- Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.
- Dare la definizione di primitiva F di una funzione f definita su $[a, b]$.
- Se F e G sono due primitive di f su $[a, b]$, che relazione c'è tra F e G (giustificare la risposta)?
- Enunciare e dimostrare il Teorema Fondamentale del Calcolo.
- Dare la definizione di continuità di f in x_0 .
- Dare la definizione di derivabilità di f in x_0 .
- Dare la definizione di differenziabilità di f in x_0 .
- Mostrare che f è derivabile in x_0 se e solo se è differenziabile in x_0 .
- Mostrare che se f è derivabile in x_0 allora è continua in x_0 .
- Dare almeno due esempi significativi di f continua ma non derivabile in x_0 .
- Dare la definizione di primitiva di una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Mostrare che tutte le primitive di $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (se esistono) differiscono per una costante.

- Mostrare un esempio di funzione NON continua per la quale il TFC si applica.
- Dare la definizione di funzione f convessa su $[a, b]$.
- Sia f convessa in $[a, b]$. Dimostrare che se f è derivabile in $x_0 \in [a, b]$ allora f giace sopra la tangente in x_0 .
- Ricordando la definizione di flesso, quale conseguenza possiamo trarre dal precedente punto? (quello sopra)
- Enunciare il teorema di derivabilità della funzione composta.
- Enunciare il teorema della linearità dell'integrale di Riemann.
- Enunciare il teorema dell'additività dell'integrale di Riemann.
- Esibire (giustificandolo) un esempio di funzione derivabile su tutto \mathbb{R} , ma con derivata discontinua in $x = 0$. Che tipo di discontinuità si può avere?
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che $|f'(x)| < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Usando il Teorema di Lagrange, dimostrare che l'equazione $f(x) = x$ ha al massimo una sola soluzione.
- Trovare un esempio di funzione derivabile $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $|f'(x)| < 1$ per ogni $x \in [0, +\infty)$, ma $f(x) \neq x$ per ogni $x \in [0, +\infty)$.
- Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale.
- Siano $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. Dimostrare che se $f(0) > g(0)$ e $f(1) < g(1)$, allora esiste $x \in (0, 1)$ tale che $f(x) = g(x)$.
- Classificare (con opportuni esempi) i punti di discontinuità delle funzioni reali.
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una generica funzione derivabile. Stabilire (con dimostrazione o controesempio) la verità o la falsità delle seguenti implicazioni:
 - (i) f strettamente crescente $\Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$
 - (ii) $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strettamente crescente
- Enunciare il Teorema di Lagrange.
Utilizzare il risultato per dimostrare che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, allora f è strettamente crescente. Viceversa, se f è ovunque derivabile e strettamente crescente, segue che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?
- Dare la definizione di funzione Riemann integrabile su $[a, b]$. Stabilire inoltre se:

Le funzioni continue su $[a, b]$ sono integrabili su $[a, b]$,
Le funzioni integrabili su $[a, b]$ sono continue su $[a, b]$,
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione dispari due volte derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$$

$f'(x) \geq 0$ se e solo se $|x| \leq \alpha$
 $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq \beta$ oppure $-\beta \leq x \leq 0$ con $0 < \alpha < \beta$.
 Disegnare un possibile grafico di $f(x)$, fornendo adeguate motivazioni.
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare o confutare con un opportuno controesempio le seguenti affermazioni.
 - (i) f derivabile in x_0 implica f continua in x_0 .
 - (ii) f continua in x_0 implica f derivabile in x_0 .
- Enunciare il Teorema di Lagrange. Mostrare con opportuni esempi che le ipotesi del teorema non possono essere indebolite.
- Dimostrare il Teorema di Lagrange nell'ipotesi aggiuntiva $f(a) = f(b)$ (Teorema di Rolle).
- Mostrare un esempio significativo di applicazione del Teorema di Lagrange.
- Dare la definizione di primitiva F di una funzione f in $[a, b]$. Ogni funzione f definita su $[a, b]$ ammette primitiva?
- Dare la definizione di punto di massimo locale per una funzione f .