Polinomi

Ruffini

$P(x) = ax^2 + b\cancel{y}x + c$

- p divisori di a
- q divisore di c

$\rightarrow \dfrac{p}{q}$ insieme in cui si nasconde la radice

$\downarrow$

z = radice

$$\begin{array}{c|cc|c} & a & b & c \\ z & & az & bz+az^2 \\ \hline & a & b+az & bz+az^2+c(=0) \end{array}$$

$[ax + (b+az)](x-z)$

Divisione polinomiale

$P(x) = Q(x)\,D(x) + R(x) \quad \vee \quad \dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$

Es

$P(x) = x^4 + 2x^2 + x - 1$

$D(x) = x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \multicolumn{5}{c|}{P(x)} & D(x) \\ +x^4 & 0 & +2x^2 & +x & -1 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -x^3 & -x^2 & & & x^2-x+2 \\ \cline{1-5} 0 & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & \downarrow \\ & +x^3 & +x^2 & +x & & Q(x) \\ \cline{2-5} & 0 & 2x^2 & +2x & -1 & \\ \cline{3-5} & & // & // & -3 & \\ & & & & R(x) & \end{array}$$

① $\dfrac{x^4}{x^2} = x^2$

② $-x^2 \cdot x^2 = -x^4$

$x^4 + 2x^2 + x - 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 1) + (-3)$

$\boxed{\text{Valore assoluto}}$

Proprietà:

1) $|a| \geq 0 \quad \forall a$
2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3) $|a| = |-a|$ (pari)
4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
5) $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$
6) $|a|^2 = |a^2| = a^2$
7) $-|a| \leq a \leq |a| \quad \forall a$
8) $|a+b| \leq |a| + |b|$ disug. triangolare

Disequazioni

Quelle base +

1) $|x+2| < x+1 \Rightarrow \boxed{-x-1 < x+2 < x+1}$
2) $|-x+2| > x \Rightarrow \boxed{-x+2 < -x}$ $\vee$ $\boxed{x < -x+2}$

$\boxed{\text{Radici}}$

$\boxed{\sqrt{P(x)} > Q(x)}$

$P(x) \geq 0 \quad Q(x) < 0 \rightarrow$ verificata

$P(x) \geq 0 \quad Q(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} Q(x) \geq 0 \\ P(x) > (Q(x))^2 \end{cases}$

$\boxed{\sqrt{P(x)} < Q(x)}$

$Q(x) < 0 \rightarrow$ mai verificata

$Q(x) \geq 0 \quad P(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < (Q(x))^2 \end{cases}$

Limiti Definizioni

Per verificare un limite attraverso la definizione bisogna innanzitutto scriverla, poi partendo dalle condizioni sul risultato si ricerca l'intorno di partenza:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid x \in \left] x_0 - \delta_\varepsilon , x_0 + \delta_\varepsilon \right[\Rightarrow \underbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

si risolve e deve venire qualcosa simile a

Equivalenza Asintotica

È lecito sostituire una parte della funzione di cui si vuole calcolare il limite con un'altra funzione se e solo se queste due funzioni hanno un limite del loro rapporto che fa 1 (la tendenza deve essere la stessa)

Es

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ quindi per $x \to 0$ $\sin x \sim x$ nei limiti

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$

l'argomento deve essere infinitesimo

a si porta così ai polinomi e o si raccoglie oppure si prende sempre x con esponente minore perché $x^m \ll x^n$ $n<m$

quando $(x \to 0)$

in somma algebrica

Con i limiti che non sono infinitesimi ma infiniti si ribalta tutto il limite notevole

quando $x \to \infty$ si prende x con esponente maggiore

Limiti

Tutte le forme indeterminate

$\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$ $\infty - \infty$ 1^{∞} 0^{0} ∞^{0}

→ solo se "1" deriva da un limite → se no = 1

È possibile fare un prolungamento continuo se limite destro e sinistro in quel punto sono uguali

~~Limiti notevoli~~

Base → / Esponente ↓	$+\infty$	$l_1 > 1$	1	$0 < l_1 < 1$	0^+
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	0^+	0^+
$l_2 > 0$	$+\infty$	$l_1^{l_2}$	1	$l_1^{l_2}$	0^+
0	F.I.	1	1	1	F.I.
$l_2 < 0$	0^+	$l_1^{l_2}$	1	$l_1^{l_2}$	$+\infty$
$-\infty$	0^+	0^+	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

Derivate

Rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Retta secante, Retta tangente:

Secante

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0)$$

Tangente

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$\boxed{\text{Derivabile} \Longrightarrow \text{Continua}}$ (non viceversa)

Fermat

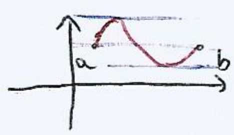
x_0 punto di massimo/minimo $\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (non viceversa)

$f'(k) = 0 \Rightarrow$ punto stazionario

Rolle

f continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$

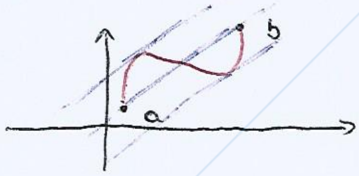
$\exists\, x_0 \in\,]a, b[\; | \; f'(x_0) = 0$



Lagrange

f continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$

$\exists\, x_0 \in\,]a, b[\; | \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$



Metodo delle derivate successive

$f'(x) = 0$

derivata pari [dispari]
- positiva $\to$ minimo [flesso ascendente]
- negativa $\to$ massimo [flesso discendente]
- nulla $\to$ calcolare la prossima derivata

(flesso orizz)

$f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow \overset{f(x)}{\text{crescente}}$ $\quad f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow \overset{f(x)}{\text{decrescente}}$

$f''(x_0) \geq 0 \Rightarrow \overset{f(x)}{\text{convessa}}$ $\quad f''(x_0) \leq 0 \Rightarrow \overset{f(x)}{\text{concava}}$

$\downarrow$ ($f'(x_0)$ crescente) $\quad \downarrow$ $f'(x_0)$ decrescente

Punto di massimo

$f'(x_0)=0 \wedge$ prima deve essere crescente e dopo x_0 decrescente $\vee f'(x_0)=0$ $f''(x_0)<0$

Punto di minimo

$f'(x_0)=0 \wedge$ prima di x_0 decrescente e dopo crescente $\vee \; f'(x_0)=0 \wedge f''(x_0)>0$

Punto di flesso

Se f è strettamente concava in $]a, x_0]$ e strettamente convessa in $[x_0, b[$ o viceversa e in x_0 f è derivabile o il limite del rapporto incrementale è $\pm\infty$ allora x_0 è un punto di flesso.

(un punto di flesso per f è un massimo/minimo per f')

$f''(x_0)=0$

de l'Hopital

se $\lim \frac{f}{g}$ è $\frac{0}{0} \wedge \frac{\infty}{\infty}$ $\quad \lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$

Derivate

$D x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$

$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$

$D a^x = a^x \ln a$

$D g(f(x)) = f'(x)\, g'(f(x))$

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$

$D \operatorname{ctg} x = -1 - \operatorname{ctg}^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$

$D \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Taylor

o-piccolo

f è un o-piccolo di g per x che tende a x_0

$f = o(g)$ $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

oss

$o(g)$ è una qualunque funzione che sia un o-piccolo ~~per~~ di g per $x \to x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{o(g(x))}{g(x)} = 0$

ordine di infinitesimo

Se $f = o(g)$ in x_0 f ha ordine di infinitesimo maggiore di g in x_0

Spesso si usano infinitesimi campione $|x - x_0|^a$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{|x - x_0|^a} = \begin{cases} \infty & \text{" inferiore ad } a \\ \ell & f \text{ ha ordine di infinitesimo uguale ad } a \\ 0 & \text{" superiore ad } a \end{cases}$$

Algebra degli o-piccolo

1) $f = o((x-x_0)^n) \Leftrightarrow f = (x-x_0)^n o(1)$ $x \to x_0$

2) $o(a \cdot (x-x_0)^n) = o((x-x_0)^n)$ $\wedge$ $a \cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^n)$ $x \to x_0$

3) $o((x-x_0)^m) \cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$ $x \to x_0$

4) $(x-x_0)^m \cdot o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^{m+n})$ $x \to x_0$

5) $o((x-x_0)^n) + o((x-x_0)^m) = o((x-x_0)^n)$ se $n \leq m$ $x \to x_0$

6) $o((x-x_0)^n + (x-x_0)^m) = o((x-x_0)^n)$ se $n \leq m$ $x \to x_0$

7) $(x-x_0)^m + o((x-x_0)^n) = o((x-x_0)^n)$ se $n \leq m$ $x \to x_0$

oss

L'o-piccolo di un o-piccolo si comporta come un o-piccolo

Resto di Peano e di Lagrange

Peano

$o((x-x_0)^n)$

Lagrange

$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

c è compreso tra x e x_0

Taylor

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \begin{cases} +o((x-x_0)^n) & \text{resto di peano} \\ +\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)} & \text{resto di Lagrange}\end{cases}$$

Il polinomio di Taylor di ordine n è unico

Se f è pari [dispari] nello sviluppo di Taylore centrato in 0 si avranno soltanto potenze pari [dispari].

Taylor con somme e composizioni

Il polinomio di Taylor di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lineare dei polinomi delle singole funzioni.

- Il polinomio di Taylor della composizione $f \circ g$ è la composizione dello sviluppo di f centrato in $g(x_0)$ con quello di g centrato in x_0

N.B.
per trovare il valore di una derivata in un punto si può usare il coefficente n-esimo dello sviluppo di Taylor × il fattoriale n-esimo.

- Taylor può essere usato anche per lo svolgimeto dei limiti

Integrale di Rieman

funzione costante $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$

funzione a scalino $\int_I f(x)\,dx = \int_{I_1} f(x)dx + \dots + \int_{I_n} f(x)dx$

Prendiamo una funzione e fissiamo una partizione, in un caso prendiamo per ogni intervallo l'estremo superiore nell'altro l'estremo inferiore abbiamo così che $s_P \le f(x) \le S_P$ aumentando la partizione possiamo arrivare al caso in cui ~~somma inferiore~~ integrale inferiore $= \sup(s_P)$ e integrale superiore $= \inf(S_P)$ sono uguali. In questo caso la funzione è integrabile secondo Rieman su I

$\int_a^b f(x)dt \overset{def}{=}$ int. inf. $=$ int. sup.

Tutte le funzioni continue o continue a tratti sono integrabili su I e le monotone limitate

Le funzioni illimitate non sono integrabili

$\int_a^a f(x)\,dx \overset{def}{=} 0$

$\int_b^a f(x)\,dx \overset{def}{=} -\int_a^b f(x)dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

L'area del sottografico di f su I coincide con l'integrale di Rieman

L'area compresa tra due funzioni è $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$

Traslazione orizzontale $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$

Media Integrale

Se f è continua in $[a,b]$ $a<b$ $\exists c \in I \mid$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$ ossia si ha che $f(c)\cdot(b-a)$ ha un'area uguale a quella di Rieman sulla funzione

Teorema e Formula Fondamentale del calcolo integrale

Se f è continua su I e $\bar{x} \in I$

$\boxed{F(x) = \int_{\bar{x}}^{x} f(t)\,dt}$ è una primitiva di f su I

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

Primitive

Definizione:

Data una funzione f si dice che F è una sua primitiva se $F' = f$

Quando esiste una primitiva ne esistono infinite traslate verticali $\{F+c \mid c \in \mathbb{R}\}$

La primitiva si indica con $\int f(x)\,dx = F + c$

L'integrale è in un certo senso l'inverso della derivata.

Tecniche di integrazione

Integrazione per parti:

$$\int f g = f G - \int f' G$$

Integrazione per sostituzione:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \overset{t=g(x)}{=} \int f(t)\,dt$$

$\boxed{dt = g'(x)\,dx}$ $\boxed{dx = g'(t)\,dt}$

Es $\int \frac{\log\sqrt{x}}{x}\,dx = \int \frac{\log t}{t^2} \cdot 2t = \log^2 t + c = \log^2\sqrt{x} + c$

$\sqrt{x} = t \quad x = t^2 \quad dx = 2t\,dt$

Integrali immediati

$\int x^\alpha = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x$

$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$

$\int e^x = e^x$

$\int a^x = a^x \log_a e$

$\int \sin x = -\cos x$

$\int \cos x = \sin x$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}$

$\int \frac{f'(x)}{K^2 + f^2(x)}\,dx = \frac{1}{K} \mathrm{arctg}\left(\frac{f(x)}{K}\right)$

Primitive razionali

$\Delta>0 \quad \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}\right)$

$\Delta=0 \quad \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\left(\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}\right)$

$\Delta<0 \quad \int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \int\frac{f'(x)}{f^2(x)+K^2}\,dx = \frac{1}{K}\operatorname{arctg}\left(\frac{f(x)}{K}\right)+c$

$* \quad \frac{P(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} + \frac{B}{ax^2+bx+c}$

$\downarrow$
ln

In generale

Dopo aver decomposto in somma:

- per ogni fattore di primo grado $(x-x_0)$ si mette un addendo $\frac{A}{x-x_0}$
- per ogni fattore di primo grado multiplo $(x-x_0)^n$ si inseriscono n addendi $\frac{B_k}{(x-x_0)^k}$ $k=1,2,\dots,n$
- per ogni fattore irriducibile si mette una derivata log. e un termine con num. costante *

casi particolari

$\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int x\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$ per parti $\longrightarrow -\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+c$

$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \operatorname{arctg}x - \int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

Funzioni razionali di e^x

sostituzione $t=e^x$

Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

$\bullet\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1+tg^2x$

1. $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ $\quad \underline{\sin x = t}$
   $\hookrightarrow \int f(t)\,dt$

2. tutti esponenti pari o dispari $\quad \underline{\tan x = t}$

3. si riscrivono $\sin x$ e $\cos x$ come $tg\frac{x}{2}$ $\quad \underline{t=tg\frac{x}{2}}$ $\quad\longleftarrow$ questo si usa solo se falliscono il caso 1 e 2

$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+(tg\frac{x}{2})^2}$

$\cos x = \frac{1-(tg\frac{x}{2})^2}{1+(tg\frac{x}{2})^2}$

Primitive irrazionali

- radice n-esima di un polinomio di primo grado $t=\sqrt[n]{ax+b}$
- radici di indici diversi, con stesso argomento di 1° grado

$m.c.m = m \quad t=\sqrt[m]{ax+b} \quad \vee \quad t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Casi particolari

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c$

$x = \sin t$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$

$\sqrt{x^2+1} = x - t \quad \vee \quad x = tg\,t$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c$ (a^2)

$\sqrt{x^2-1} = x - t \quad \vee \quad x = \frac{1}{\cos t}$

$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{A-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{A}}\right) + c}$

$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-Bx^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{B}}\arcsin\sqrt{B}x}$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} \quad a>0$

sostituzione $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$

Integrali impropri

Se f è integrabile in $[a,b]$ $\forall b>0$ l'integrale su $[a,+\infty[$ è:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx}$$

Se il limite è finito è convergente se no divergente o non esiste (v indeterminato)

Se f è definita in $]a,b]$ e divergente o non definita in a si ha: (illimitata)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Impropriet à in entrambi gli estremi: $]a,b[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx \;\vee\; \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{c\to a^+} \vee \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Impropriet à interna

Si spezza l'integrale e si guarda limite destro e sinistro del punto (poi si fa la somma)

Criterio del confronto diretto

Criterio di convergenza

ip: $0 \le f(x) \le g(x)$ su $[a,+\infty[$

se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$ converge $\to \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$ converge

se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \to$ diverge $\to \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \to$ diverge

Questo può essere applicato a vari tipi di divergenza con le opportune modifiche (es improprietà sul primo estremo).

Criterio confronto asintotico

1) $\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ $\quad f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso carattere

2) $\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\quad \int_a^b g(x)$ converge $\int_a^b f(x)$ converge, $\int_a^b f(x)$ diverge $\int_a^b g(x)$ diverge

3) $\lim_{x\to\square} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ $\quad \int_a^b f(x)$ converge $\int_a^b g(x)$ converge, $\int_a^b g(x)$ diverge $\int_a^b f(x)$ diverge

Per trovare una delle due funzioni o usiamo Taylor o limiti notevoli

A volte si usa la assoluta convergenza che implica la convergenza $\int^b |f(x)|\,dx$

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad a > 0$$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}\,dx \begin{cases} \text{converge se } \alpha \geq 1 \text{ o } \alpha = 1 \wedge \beta > 1 \\ \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha < 1 \text{ o } \alpha = 1 \wedge \beta \leq 1 \end{cases} \quad a > 1$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

1° cap

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

$$tg\alpha=m=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad m=\frac{y}{x} \qquad m=tg\alpha \qquad (ctg;1)$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$cosec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

2° cap

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

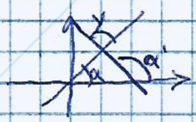
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} \qquad ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta} \qquad ctg(\alpha-\beta)=\frac{1+ctg\alpha\, ctg\beta}{ctg\alpha-ctg\beta}$$

$$tg\gamma=\frac{m-m'}{1-mm'}$$



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$t=tg\frac{\alpha}{2} \qquad \alpha\neq\pi+2k\pi$$

3° cap

- $y = \sin(-x) = -\sin(x)$ (simmetrica rispetto all'asse x/y)

$y = \text{sen}|x|$

- $y = \sin|x| \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$

- $y = |\sin x| \begin{cases} \sin x & \sin x \geq 0 \\ -\sin x & \sin x < 0 \end{cases}$

- $y = \beta + \sin(x - \alpha)$

  sulle y (+) sulle x (+)

- $y = a\sin x \rightarrow$ dilatazione di a sulle y $\max = a$ $\min = -a$ $T = 2\pi$

- $y = \sin(bx) \rightarrow$ dilatazione di b sulle x $\max = 1$ $\min = -1$ $T = \frac{2\pi}{b}$

Fisica

$x = a \sin \omega t$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$x = r \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$ $\alpha(t) = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right)$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Angolo aggiunto

- $y = a\sin x + b\cos x$

$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\alpha)$

$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4° cap

- $\sin x = m$ $m = \sin\alpha$

  $x = \alpha + 2k\pi$
  $\vee$
  $x = \pi - \alpha + 2k\pi$

- $\sin hx = \sin tx$

  $hx = tx + 2k\pi$
  $\vee$
  $hx = \pi - tx + 2k\pi$

- $a\sin x + b\cos x + c = 0$

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $x \neq \pi + 2k\pi$

- $\cos x = X$ $\sin x = Y$ $\begin{cases} aY + bX + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$

- Angolo aggiunto

Alcuni sviluppi di McLaurin notevoli (si sottintende ovunque che i resti sono trascurabili per $x \to 0$)

e^x	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
$\sinh x$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cosh x$	$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+2})$
$\tanh x$	$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$	
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$	$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$
$\sin x$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$
$\tan x$	$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$	
$\arcsin x$	$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \left\lvert \binom{-1/2}{n} \right\rvert \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} \left\lvert \binom{-1/2}{k} \right\rvert \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
$\arccos x$	$= \frac{\pi}{2} - \arcsin x$	
$\arctan x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x}$	$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x}$	$= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$
$\sqrt{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots + \binom{1/2}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \binom{-1/2}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n)$
$\sqrt[3]{1+x}$	$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + \cdots + \binom{1/3}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{1/3}{k} x^k + o(x^n)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$	$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{7}{81}x^3 + \cdots + \binom{-1/3}{n}x^n + o(x^n)$	$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/3}{k} x^k + o(x^n)$

Si ricordi che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si pone $\binom{\alpha}{0} = 1$ e $\binom{\alpha}{n} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}^{n \text{ fattori}}}{n!}$ se $n \geq 1$.

TABELLA DEI LIMITI NOTEVOLI

esponenziali e logaritmici	goniometrici
1) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	1) $\lim_{x\to0}\frac{sen\,x}{x}=1$
2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	2) $\lim_{x\to0}\frac{sen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
3) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$	3) $\lim_{x\to0}\frac{tg\,x}{x}=1$
4) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{nx}=e^{na}$	4) $\lim_{x\to0}\frac{tg\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
5) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}$	5) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$
6) $\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}=e^a$	6) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$
7) $\lim_{x\to0}\lg_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\lg_e a}$	7) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\,x}{x}=1$
8) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a(1+x)}{x}=\lg_a e=\frac{1}{\ln a}$	8) $\lim_{x\to0}\frac{arcsen\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
9) $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	9) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\,x}{x}=1$
10) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$	10) $\lim_{x\to0}\frac{arctg\,ax}{bx}=\frac{a}{b}$
11) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{ax}=1$	11) $\lim_{x\to0}\frac{senh\,x}{x}=1$
12) $\lim_{x\to0}x^r\lg_a x=0\quad\forall a\in R^+-\{1\},\forall r\in R^+$	12) $\lim_{x\to0}\frac{settsenh\,x}{x}=1$
13) $\lim_{x\to0}\frac{\lg_a x}{x^r}=0\quad\forall a\in R^+-\{1\},\forall r\in R^+$	13) $\lim_{x\to0}\frac{tgh\,x}{x}=1$
14) $\lim_{x\to+\infty}x^r a^x=\lim_{x\to+\infty}a^x\quad\forall a\in R^+-\{1\},\forall r\in R^+$	14) $\lim_{x\to0}\frac{setttgh\,x}{x}=1$
15) $\lim_{x\to-\infty}\lvert x\rvert^r a^x=\lim_{x\to-\infty}a^x\quad\forall a\in R^+-\{1\},\forall r\in R^+$	15) $\lim_{x\to0}\frac{x-sen\,x}{x^3}=\frac{1}{6}$
16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^r}=\lim_{x\to+\infty}a^x\quad\forall r\in R^+$	16) $\lim_{x\to0}\frac{x-arctg\,x}{x^3}=\frac{1}{3}$
17) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}a^x\quad\forall r\in R^+$	
18) $\lim_{x\to-\infty}e^x x^r=0\quad\forall r\in R^+$	