Criteri di convergenza per le serie a termini non negativi

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che $a_n \leqslant b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

1 • $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;

2 • $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente positivamente.

Esempio. 1

Consideriamo la serie armonica generalizzata di esponente 2

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

serie armonica generalizzata

Abbiamo detto che essa converge. Per dimostrarlo basta considerare la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$, che sappiamo essere convergente, ed osservare che

$$\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{2}{n(n+1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$a_n \leq b_n$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente

Esempio. 2

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n};$$

essa diverge positivamente poichè $\frac{1}{\log n} \geqslant \frac{1}{n}$ per ogni $n \geqslant 2$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

serie armonica

Criterio del confronto asintotico

Date due serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in]0, +\infty[,$$

allora le due serie hanno lo stesso carattere.

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+\cos n}{3+2n^3};$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5n+\cos n}{3+2n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{2}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, allora la serie di partenza converge.

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

e la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente, allora la serie di partenza diverge positivamente.

Lezione del 30 Marzo 2020

Criterio degli infinitesimi

Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = L \in]0, +\infty[,$$

allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge se } \alpha > 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge positivamente se } \alpha \leq 1.$$

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{2} \quad \text{se } \alpha = 1,$$

la serie diverge positivamente.

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{2n^3+3n-1}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)/(2n^3+3n-1)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{2} \quad \text{se } \alpha = 2,$$

⇒ la serie converge.

Criterio della radice

Data la serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;
- $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente.

Osservazione
Se $a = 1$ non si può dire nulla circa il carattere della serie; occorre usare un altro criterio.

DIM. Sia ora $a > 1$. Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $k = a - \varepsilon > 1$, per la definizione di limite esiste un indice ν tale che

$$\sqrt[n]{a_n} > k \quad \text{per } n > \nu \iff a_n > k^n \quad \text{per } n > \nu.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ risulta definitivamente minorata dalla serie geometrica divergente positivamente $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$. Per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

vedi slide 03 aprile

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - n^2}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n - n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n\left(1 - \frac{n^2}{2^n}\right)}} = \frac{1}{2} < 1$$

la serie converge.

Esempio.
Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{3^n}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{3} = +\infty > 1$$

la serie diverge positivamente.

Osservazione
Non potrebbe essere diversamente, visto che il termine generale della serie non è infinitesimo!

Criterio del rapporto

Data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;
- $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente.

Osservazione
Se $a = 1$ non si può dire nulla circa il carattere della serie; occorre usare un altro criterio.

[redacted]

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

la serie converge.

[redacted]

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$$

la serie diverge positivamente.

Osservazione

Del resto il termine generale non è infinitesimo!

[redacted]

Esempio.

Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^3+1}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+1)^3+1}}{\frac{n}{n^3+1}} = 1$$

il criterio del rapporto non è applicabile.

Risulta però

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

sicchè, per il criterio degli infinitesimi, la serie ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata di esponente 2 e dunque converge.

[redacted]

Osservazione 5.2

Abbiamo visto che, se il termine generale di una serie non è infinitesimo, la serie non converge. Se la serie con termine generale non infinitesimo è a termini positivi, essa è sicuramente divergente positivamente.

Osservazione 5.3

Quanto detto per le serie a termini non negativi vale, con le opportune modifiche, per le serie a termini non positivi. Basta osservare che, se $a_n \leqslant 0$, allora possiamo scrivere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n), \quad \text{con } -a_n \geqslant 0.$$

Osservazione 5.4

Abbiamo già osservato che il carattere di una serie non cambia se ne alteriamo un numero finito di termini. Pertanto i criteri visti per le serie a termini non negativi possono essere applicati anche alle serie a termini definitivamente non negativi.

Lezione del 03 Aprile 2020

Criterio della radice

Data la serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;
- $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente.

Osservazione
Se $a = 1$ non si può dire nulla circa il carattere della serie; occorre usare un altro criterio.

Dimostrazione.
Sia $a < 1$. Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $h = a + \varepsilon < 1$, per la definizione di limite esiste un indice ν tale che

$$\sqrt[n]{a_n} < h \qquad \text{per } n > \nu \Longleftrightarrow a_n < h^n \qquad \text{per } n > \nu.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ risulta definitivamente maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} h^n$. Per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Sia ora $a > 1$. Fissato $\varepsilon > 0$ tale che $k = a - \varepsilon > 1$, per la definizione di limite esiste un indice ν tale che

$$\sqrt[n]{a_n} > k \qquad \text{per } n > \nu \Longleftrightarrow a_n > k^n \qquad \text{per } n > \nu.$$

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ risulta definitivamente minorata dalla serie geometrica divergente positivamente $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$. Per il criterio del confronto $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge positivamente.

Criterio del rapporto

Data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, valgono le seguenti implicazioni:

- $a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente;
- $a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente.

Osservazione
Se $a = 1$ non si può dire nulla circa il carattere della serie; occorre usare un altro criterio.

Serie a segni alterni

Sia $a_n \geqslant 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; diremo serie a segni alterni una serie del tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Esempio.
La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

è nota come serie armonica a segni alterni.

Criterio di Leibniz
Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

Se la successione $\{a_n\}$ è non negativa, decrescente e infinitesima, allora la serie converge.
Inoltre, detta S_n la successione delle somme parziali ed S la somma della serie, risulta

$$S_{2n} \leqslant S_{2n+2}, \qquad S_{2n-1} \geqslant S_{2n+1}$$

$$|S_n - S| \leqslant a_{n+1}.$$

Esempi.

- La serie armonica a segni alterni è convergente, poichè sono banalmente verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.
- La serie
$$\sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n+1)}$$
converge.
Infatti, la successione $\frac{n-1}{n(n+1)}$ è positiva, infinitesima, e decrescente poichè
$$\frac{n-1}{n(n+1)} \geqslant \frac{n}{(n+1)(n+2)} \iff n^2 \leqslant n^2 + n - 2 \iff n \geqslant 2.$$

Serie assolutamente convergenti

Introduciamo la nozione di assoluta convergenza.

Definizione
La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Sussite la seguente

Proposizione

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, essa è anche convergente.

Il viceversa in generale non è vero. Ad esempio, la serie armonica a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

converge, ma non è assolutamente convergente.

Osservazione

Osserviamo esplicitamente che tutte le serie a termini non negativi (positivi), convergenti, sono anche assolutamente convergenti. Infatti, se $a_n \geqslant 0$ ($a_n \leqslant 0$), allora $|a_n| = a_n$ ($|a_n| = -a_n$).

Osservazione 2

I criteri di convergenza per le serie a termini non negativi analizzati in precedenza possono essere usati come criteri di assoluta convergenza per una serie con termine generale di segno qualunque, se applicati alla serie dei valori assoluti.

Esempio. Consideriamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

Essa ha termine generale con segno variabile, per cui tutti i criteri che abbiamo visto nei paragrafi precedenti non si possono applicare. Può essere utile allora verificare se essa converge assolutamente. Consideriamo la serie dei valori assoluti

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\sin n|}{n^2};$$

poichè $|\sin n| \leqslant 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $\frac{|\sin n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Allora, essendo maggiorata da una serie convergente, la serie dei valori assoluti converge. Dunque la nostra serie converge assolutamente e quindi converge.

Criterio di Dirichlet

Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che:

- $\exists M>0 : \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$
- $\{b_n\}_n$ è una successione di termini positivi, decrescente, tendente a 0

$b_0 \geq b_1 \geq \dots \geq b_{n+1} \geq b_{n+2} \geq 0$

$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ è convergente

CASO PARTICOLARE: $a_n = (-1)^n \Rightarrow$ Criterio di Leibnitz

Lezione del 17 Marzo 2020

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{n+2}$

Controlliamo se il termine $a_n = \frac{\cos n}{n+2} \to 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos n}{n+2} = 0$$

La condizione necessaria per la convergenza di una serie non ci aiuta in questo caso.

NB $(\cos n)_n$ non è una successione a termini non negativi ⇒ criteri fino ad ora considerati non sono applicabili.

Abbiamo bisogno di altri criteri che vedremo in seguito.

~

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - x e^{x^2}}$

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$

$x^2 \operatorname{tg} x = x^3 + o(x^4)$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2)$

$\operatorname{sen} x - x e^{x^2} = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x} - x^3 + o(x^3) =$

$= \left(-\frac{1}{6} - 1\right) x^3 + o(x^3) = -\frac{7}{6} x^3 + o(x^3)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - x e^{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + o(x^4)}{-\frac{7}{6} x^3 + o(x^3)} = -\frac{6}{7}$$

~

3) $\lim_{x \to 0} \frac{2 \log(1+x^2) + \cos(2x) - 1}{x^4}$

$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2 \log(1+x^2) + \cos(2x) - 1}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2x^2} - x^4 + o(x^4) - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{2}{3} - 1\right)x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

NOTA: PROPRIETÀ DEGLI O PICCOLO:

$$o(x^4) + o(x^5) = o(x^4)$$

Infatti

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^4) + o(x^5)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} + \frac{o(x^5)}{x^4 \cdot x} \, x = 0$$

3) $\lim_{x \to 0} (e^x - \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} =$ $\boxed{\text{Uso } (f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))}}$

$= \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{1-\cos(3x)} \log(e^x - \operatorname{sen} x)}$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\operatorname{sen} x = x + o(x^2)$

$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2} x^2 + o(x^3)$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\cos(3x)} \log(e^x - \operatorname{sen} x) = \frac{1}{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{9}{2} x^2 + o(x^3)} \log\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{2} x^2 + o(x^3)} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \to \frac{\cancel{2}}{9} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} (e^x - \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} = e^{1/9}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x}} - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$$

$$(1+\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen}^2 x)} = 1 + x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{x}\log\left(1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\log\left(1+x^2-\frac{2}{6}x^4+o(x^4)\right) = \frac{1}{x}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)x^4+o(x^4)\right) = x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$e^{\operatorname{sen} x} = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(1+\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{1}{x}} - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}+\cancel{x}-\frac{5}{6}x^3+o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

Lezione del 03/04/2020

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)$ studiare il carattere

$\frac{n+3}{n^2+5} \to 0^+$ quindi $0 < \frac{n+3}{n^2+5} < \pi$

e $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right) > 0$ definitivamente

$a_n \sim \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

Applicando il criterio asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$, si ha

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{n+3}{n^2+5}} \cdot \frac{n+3}{n^2+5} \cdot n \to 1$$

Dunque $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)$ diverge

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$: studiare il carattere

$\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ No!

Ricordando lo sviluppo di Taylor di $\operatorname{sen} x$ e $\operatorname{arctg} x$, si ha:

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \to 0$

$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ per $x \to 0$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}\right) = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} = \frac{1}{6}n^{-3}$$

Applico il criterio asintotico con $b_n = \frac{1}{6n^3}$ e si ha:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{6n^3}} \to 1$$

Dunque

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \arctg\frac{1}{n}\right)$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{n^3}$ e dunque converge.

---

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$

E' una serie a termine generale $b_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$

Sia $\{a_n\}_n = \{\frac{1}{n^2}\}_n$

1) $a_n \to 0$
2) $a_n > 0 \quad \forall n$
3) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n$ infatti $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 \leq (n+1)^2$ ok!

Sono verificate le ipotesi del criterio di Leibnitz e quindi la serie è convergente.

Un altro approccio per lo studio del carattere della serie è di verificare l'assoluta convergenza.
Per verificare se $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ è assolutamente convergente devo considerare

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right|$$

Ebbene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ è assolutamente convergente.

$\Rightarrow$ Per la proposizione, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ è convergente

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$

E' una serie a segni alterni. Risulta difficile utilizzare il criterio di Leibnitz perché la successione $a_n = \frac{n^2+2}{n^3+3}$ è di termini positivi, infinitesima, ma per la decrescenza dovrei verificare che

(*) $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+3} \leq a_n = \frac{n^2+2}{n^3+3}$

E' difficile verificare la decrescenza di $(a_n)_n$ perché se moltiplico (*) in croce, il grado diventa alto!
Quindi non riesco ad applicare il criterio di Leibnitz.

Anche lo studio dell'assoluta convergenza non mi aiuta, perché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n^3+3} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Provo con un altro approccio, sfrutto le operazioni con le serie; aggiungo e sottraggo a $b_n = (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$, $\frac{(-1)^n}{n}$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n}\right)}_{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}}_{2}$$

SE le due serie a destra 1 e 2 convergono, per i teoremi algebrici, convergerà anche $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$.

Ebbene, la serie 2 è convergente perché serie armonica a segni alterni.

la serie (1) la riscrivo in questo modo.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n^3+2}{n^4+3} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n-3}{n^4+3n}$$

Studio l'assoluta convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}$.

Ebbene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-3}{n^4+3n} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}$ è assolutamente convergente e dunque per la Proposizione, è convergente.

ex

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2+2}$

E' una serie assolutamente convergente e dunque convergente. Infatti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2+2}\right| \underset{|\cos n| \le 1}{\le} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2} < +\infty$$

Per il criterio del confronto, $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n^2+2}\right|$ è convergente

ex

) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$

In questo caso, lo studio dell'assoluta convergenza, non ci aiuta. Infatti,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\cos n}{n+2}\right| \le \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}}_{\dots}$$

Ho bisogno di un altro criterio: CRITERIO DI DIRICHLET

CRITERIO DI DIRICHLET

Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni tali che

1) $\exists M>0$ $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le M$ $\forall n$

(M non dipende da n)

2) $\{b_n\}_n$ è una successione di termini positivi, decrescente, tendente a 0

$b_0 \ge b_1 \ge \dots \ge b_{n+1} \ge b_n \ge 0$, $\lim_n b_n = 0$

allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ è convergente

CASO PARTICOLARE: con la scelta di $a_n = (-1)^n$ si ottiene il criterio di Leibniz.

ex

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$. Considero $a_n = \cos n$ e $b_n = \frac{1}{n+2}$

1) $\{b_n\}_n$ è una successione decrescente, di termini positivi e infinitesima

2) devo trovare una costante M tale che

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \cos i\right| \le M \quad \forall n$$

Utilizzo le formule di Werner ed in particolare

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right]$$

Considero ad esempio $\alpha = 1$ e $\beta = i$ e valuto

$$2 \operatorname{sen} 1 \left(\sum_{i=1}^{n} \cos i\right) = \sum_{i=1}^{n} 2 \operatorname{sen} 1 \cdot \cos i =$$

(sen 1 non dipende da i) (formule di Werner)

$$= \sum_{i=1}^{n} [\operatorname{sen}(1-i) + \operatorname{sen}(1+i)] = \sum_{i=1}^{n} [\operatorname{sen}(1+i) - \operatorname{sen}(i-1)] =$$

$- \operatorname{sen} 1 = + \operatorname{sen}(-1)$

$$= \operatorname{sen} 2 - \operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} 3 - \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 4 - \cancel{\operatorname{sen} 2} + \dots + \operatorname{sen}(n+1) -$$
$$- \operatorname{sen}(n-1) = \operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} (2 \operatorname{sen} 1)(\cos x) \right| = |\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1|$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{n} \cos i \right| = \frac{|\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1|}{2 \operatorname{sen} 1} \leq \frac{2}{2 \operatorname{sen} 1} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1} = M$$

Anche la seconda condizione per del criterio di Dirichlet è rispettata e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n+2} \text{ è convergente.}$$

Esercizio

- Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Se $|x|>1$, viene negata la condizione necessaria per la convergenza di una serie

Se $-1 \le x \le 1$ invece

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Pertanto, se $x>1$ la serie è una serie a termini positivi che non può convergere e dunque diverge positivamente.

Se $x<-1$ oppure $-1 \le x \le 1$ dobbiamo studiare il carattere della serie con altri criteri.

Vediamo lo studio della convergenza assoluta, poiché la convergenza assoluta implica la convergenza.

Studio quindi la convergenza di

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$$

Applico il criterio della radice:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = |x| \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = |x|$$

Se $|x|<1 \Rightarrow$ la serie (*) converge

$\Rightarrow$ Se $|x|>1 \Rightarrow$ la serie (*) diverge.

- In particolare, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge se $-1<x<1$ e per $x>1$ diverge, per $x<-1$ è indeterminata (crit. di Dirichlet)

Resta da esaminare i casi in cui $|x|=1$, ossia $x=+1$ e $x=-1$

Per $x=1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ e non è convergente (serie armonica generalizzata con esponente $\alpha = \frac{1}{2}$)

Per $x=-1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ed è una serie convergente per il criterio di Leibnitz.

Riassumendo

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ converge per $-1 \le x < 1$

non converge per $x \notin [-1,1)$.

Lezione del 06 Aprile 2020

Iniziamo trattando la teoria dell'integrazione secondo Riemann.

Nella prima parte è esposta la teoria dell'integrale indefinito. Successivamente viene definito l'integrale secondo Riemann.

Il legame tra l'integrale secondo Riemann e l'integrale indefinito è dato dal teorema fondamentale del calcolo integrale.

1. Integrale indefinito

Il problema che affrontiamo in questa sezione è il seguente:

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, esiste una funzione $F(x)$ derivabile in I tale che

$$F'(x) = f(x)?$$

Definizione
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si dice che una funzione $F(x)$, derivabile in I, è una primitiva di f se

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I.$$

Esempi.
$F(x) = x$ è una primitiva di $f(x) = 1$ in $\mathbb{R}$.
Infatti $F'(x) = (x)' = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$.
Infatti $F'(x) = (\sin x)' = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

È facile verificare che, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora, per ogni costante $c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ è ancora una primitiva di f.

Viceversa, se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono primitive di f nell'intervallo I, risulta:

$$\begin{aligned} F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \quad &\Rightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0 \\ &\Rightarrow (F_1 - F_2)(x) = \textit{costante} \quad (\star) \\ &\Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + \textit{costante} \quad \text{in } I. \end{aligned}$$

Dunque, se f è dotata di primitiva F nell'intervallo I, tutte e sole le primitive di f in I sono del tipo $F + c$ con c arbitrario numero reale.

Osservazione

La $(\star)$ è una conseguenza del teorema di caratterizzazione delle funzioni con derivata nulla negli intervalli.

Ricordiamo che l'ipotesi che I sia un intervallo è essenziale. Infatti, se consideriamo la funzione $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ nell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, otteniamo che $g'(x) = 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma g non è costante. Precisamente

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Definizione.

L'insieme delle primitive della funzione f nell'intervallo I è detto integrale indefinito di f ed è denotato con il simbolo

$$\int f(x)dx.$$

Per quanto detto prima, se F è una primitiva di f nell'intervallo I, allora

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Osservazione. Tutte le funzioni possiedono primitive? Non tutte; si può dimostrare ad esempio che, se una funzione presenta punti di discontinuità a salto in un intervallo I, allora essa non possiede primitive.

Integrali immediati

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
k	kx	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
e^x	e^x	a^x	$\frac{a^x}{\log a}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Esempi.

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\log 3} + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Linearità dell'integrale indefinito

Dalla definizione di integrale indefinito e dalla proprietà di linearità della derivata si deduce che:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

lineare rispetto alla somma
lineare rispetto al prodotto per uno scalare

Esempio.

$$\int (2x^2 - x + 3)\, dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Integrali "quasi immediati" REGOLE DI INTEGRAZIONE

Dalla definizione di integrale indefinito e dalla regola di derivazione delle funzioni composte si deduce che ($c \in \mathbb{R}$):

1 • $\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$

2 • $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$

3 • $\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$

4 • $\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)] + c$

5 • $\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \tan[f(x)] + c$

6 • $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin[f(x)] + c$

7 • $\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan[f(x)] + c$

Dalla definizione di integrale indefinito e dalla regola di derivazione delle funzioni composte si deduce che:

8 • $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$

9 • $\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c \qquad (a > 0, a \neq 1)$

Esempi.

1 $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$

2 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + c$

3 $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = -2\cos\sqrt{x} + c$

4 $\int \frac{2}{2}\frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c$ $\quad x^2 = [f(x)]^2 \to d(x^2) = 2x$

Capitolo XIV - Integrali

1. Integrale indefinito
2. Metodi di integrazione
3. Integrale definito. Area del rettangoloide
4. Teorema della media integrale
5. Teorema fondamentale del calcolo integrale
6. Sommabilità

Esempi.

$$\int \sin(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int \alpha \sin(\alpha x)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) + c \quad (\alpha \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx = \frac{1}{a^2}\frac{a}{b}\int \frac{\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{bx}{a}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bx}{a}\right) + c \quad (a, b > 0)$$

formula $\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\{\sin[(\alpha+\beta)x] + \sin[(\alpha-\beta)x]\}$

Esempi.

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(\alpha+\beta)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(\alpha-\beta)x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \underbrace{\sin(\alpha+\beta)x}_{\sin f(x)} \cdot \frac{(\alpha+\beta)}{\boxed{(\alpha+\beta)}}dx + \frac{1}{2}\int \sin(\alpha-\beta)x \cdot \frac{(\alpha-\beta)}{\boxed{(\alpha-\beta)}}dx$$

$(\alpha \neq \pm\beta)$

Esempi.

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)dx = \frac{1}{2}\int \sin(2\alpha x)dx$$

$$= -\frac{1}{4\alpha}\cos(2\alpha x) + c$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

2. Metodi di integrazione

Integrazione per parti

Siano f e g due funzioni derivabili. Allora

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

f è detto fattore differenziale; g è detto fattore finito.

Per verificare la formula di integrazione per parti basta osservare che

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)dx &= \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x)]dx \\ &= \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Esempi.

1 $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c$$

2 $$\int \log x\, dx = x\log x - \int \frac{x}{x} dx = x(\log x - 1) + c$$

3 $$\begin{aligned}\int \arcsin x\, dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

4 $$\begin{aligned}\int e^x \cos x dx &= e^x\cos x + \int e^x \sin x dx \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}(e^x\cos x + e^x \sin x) + c$$

Integrazione per sostituzione

Data una funzione f definita in un intervallo I denotiamo con F una sua primitiva. Sia $\varphi : J \to I$ una funzione derivabile nell'intervallo J e dotata di funzione inversa $\varphi^{-1} : I \to J$. Risulta

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

da cui

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Pertanto

$$F(x) + c = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

$$\Downarrow$$

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx.$$

Poniamo

$$\begin{cases} e^x = t \Rightarrow x = \log t \\ dx = \frac{1}{t}dt \end{cases}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{1}{(1+t)t}dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \log|t| - \log|1+t| + c \\ &= x - \log(1+e^x) + c.\end{aligned}$$

Esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx.$$

Poniamo

$$\begin{cases} \tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2\arctan t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \end{cases}$$

$d(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}dt$

Risulta

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx = \int \frac{1}{3+\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}}dx = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{3t^2+2t+3}dt$$

Poichè

$$\int \frac{1}{3t^2+2t+3}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right)+c$$

deduciamo che

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right)+c$$

Integrazione di funzioni razionali

Diamo ora un'idea schematica di come si calcoli l'integrale indefinito di una funzione razionale $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ (dove P_n e Q_m sono due polinomi di grado n, m, rispettivamente).

Osservazione

Anzitutto: se $n \geqslant m$, per prima cosa eseguiamo la divisione tra polinomi. Ciò porta a riscrivere la funzione integranda come somma di un polinomio (che sappiamo integrare!) e di una funzione razionale con lo stesso denominatore di quella di partenza ma con numeratore di grado inferiore ad m.

Quindi d'ora in poi supporremo $n < m$.

Se $m = 1$:

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Esempio

$$\int \frac{2}{3x+7}dx = \frac{2}{3}\log|3x+7|+c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Se $m = 2$, distinguiamo tre casi a seconda del discriminante Δ del denominatore $Q_2(x)$: a) $\Delta > 0$; b) $\Delta = 0$; c) $\Delta < 0$.

a) Se $\Delta > 0$, Q_2 ha due radici reali distinte e la frazione si decompone in fratti semplici.

Esempio.

Calcoliamo

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}dx.$$

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

Scriviamo

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

con A, B opportuni coefficienti da determinarsi.

Per determinarli eseguiamo la somma a secondo membro ed eguagliamo le frazioni:

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}$$

Per il principio di identità dei polinomi otteniamo

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=2 \end{cases}$$

cioè $N_1: 1x+2$, $N_2: (A+B)x+(3A-2B)$

da cui $A = \frac{4}{5}$ e $B = \frac{1}{5}$.

Pertanto

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}dx = \int \left(\frac{\frac{4}{5}}{x-2} + \frac{\frac{1}{5}}{x+3} \right) dx = \frac{4}{5}\log|x-2| + \frac{1}{5}\log|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Se $\Delta = 0$, Q_2 ha una radice reale doppia. In tal caso l'integrale è facilmente ricondotto ad integrali quasi immediati.

Esempio.

$x^2+2x+1=(x+1)^2$

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{x\boxed{+1-1}}{(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

c) Se $\Delta < 0$, Q_2 non ammette radici reali. Vediamo un paio di esempi per capire come si procede in questo caso.

Esempio 1.

$$\int \frac{1}{x^2+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{x^2}{3}+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

Esempio 2.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+2x+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c,
\end{aligned}
$$

$c \in \mathbb{R}$.

Lezione del 20 Aprile 2020

continuo slide precedenti

Integrazione di funzioni razionali Vogliamo calcolare l'integrale indefinito di una funzione razionale $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ dove P_n e Q_m sono due polinomi di grado n, m rispettivamente con $n < m$.
Se $m > 2$ è sempre possibile scomporre Q_m in un prodotto di (potenze di) fattori di primo grado oppure di secondo grado irriducibili (cioè con $\Delta < 0$). Fatto questo possiamo scrivere la frazione come somma di frazioni a cui è possibile applicare i discorsi fatti in precedenza. Vediamo alcuni semplici esempi.

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2B+C=3 \\ A+2C=-1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{5} \\ B=\frac{9}{5} \\ C=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{9}{10}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{5}\log|x+2| + \frac{9}{10}\log(x^2+1) - \frac{3}{5}\arctan x + c$$
$$c \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1

Calcoliamo
$$\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}dx.$$

Scriviamo
$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

con A, B, C opportuni coefficienti da determinarsi. Eseguendo la somma ed uguagliando le frazioni otteniamo

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$
$$= \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x+2)(x^2+1)}.$$

da cui

Esempio 2.

Calcoliamo
$$\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}dx.$$

Scriviamo
$$\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+3)}$$

con A, B, C opportuni coefficienti da determinarsi. Eseguendo la somma ed uguagliando le frazioni otteniamo

$$\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+3)} = \frac{(A+C)x^2+(3A+B)x+3B}{x^2(x+3)}$$

da cui

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ 3A + B = 1 \\ 3B = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{9} \\ B = \frac{1}{3} \\ C = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}dx = \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2} - \frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+3}$$
$$= \frac{2}{9}\log|x| - \frac{1}{3x} - \frac{2}{9}\log|x+3| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Chiamiamo somma integrale inferiore della funzione f corrispondente alla partizione D la quantità

$$s(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k).$$

Chiamiamo somma integrale superiore della funzione f corrispondente alla partizione D la quantità

$$S(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k).$$

Le somme $s(f,D)$ e $S(f,D)$ sono ovviamente quantità finite, visto che f è una funzione limitata. Inoltre, $s(f,D) \leqslant S(f,D)$.

Integrale definito

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata nell'intervallo compatto $[a,b]$, $a < b$. Consideriamo una partizione dell'intervallo $[a,b]$, cioè un insieme ordinato D di $n+1$ punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

ovvero $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.
Indichiamo con $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ il generico intervallino con estremi appartenenti a D; risulta ovviamente

$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k.$$

Indichiamo poi

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Osserviamo che $m_k, M_k \in \mathbb{R}$ poichè f è limitata!

Facendo variare la partizione D dell'intervallo $[a,b]$, consideriamo due insiemi numerici, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, contenenti, rispettivamente, tutte le somme integrali inferiori e tutte le somme integrali superiori:

$$\mathcal{A} = \{s(f,D) : \ D \text{ partizione dell'intervallo } [a,b]\}$$

$$\mathcal{B} = \{S(f,D) : \ D \text{ partizione dell'intervallo } [a,b]\}.$$

Si può dimostrare che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi separati, cioè

$$\forall u \in \mathcal{A}, \forall v \in \mathcal{B} \qquad u \leqslant v$$

cioè

$$\forall D_1, D_2 \text{ decomposizioni di } [a,b] \quad s(f,D_1) \leqslant S(f,D_2)$$

Definizione

Diciamo che la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata nell'intervallo compatto $[a, b]$, è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se i due insiemi numerici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono contigui, cioè se

$$\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B}.$$

In tal caso, l'unico elemento di separazione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è detto integrale di Riemann di f relativo all'intervallo $[a, b]$ e si indica

$$\sup \mathcal{A} = \inf \mathcal{B} = \int_a^b f(x)dx.$$

a, b sono detti estremi di integrazione; f è detta funzione integranda.

Osservazione

Nella definizione di integrale abbiamo supposto che gli estremi di integrazione fossero ordinati in maniera naturale: $a < b$. Le somme integrali hanno però senso anche nel caso in cui $a > b$. Porremo quindi

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \qquad \text{se } a > b.$$

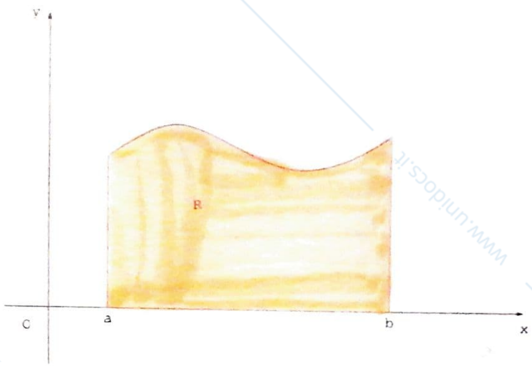
Di conseguenza

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

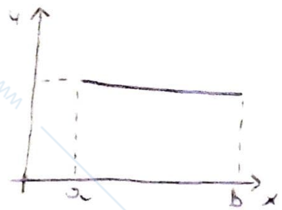
Integrale definito. Area del rettangoloide

Supponiamo di voler calcolare l'area della regione piana R, detta rettangoloide, compresa tra il grafico della funzione non negativa f, le rette verticali $x = a$ e $x = b$, e l'asse delle ascisse:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$



Osservazione Il problema non pone alcuna difficoltà se f è una funzione non negativa costante, poichè in tal caso la regione R è un rettangolo e la sua area si calcola moltiplicando la lunghezza della base per quella dell'altezza.
In generale, tuttavia, la funzione non sarà costante ed il suo grafico sarà una linea curva.



Sia data una funzione $f : [a, b] \to [0, +\infty[$ superiormente limitata nell'intervallo compatto $[a, b]$.
Ripercorriamo la costruzione delle somme integrali inferiori e superiori di f.
Consideriamo una partizione $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ ed indichiamo con $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ il k-mo intervallino individuato dalla partizione ($k = 0, \dots, n-1$).
Poniamo

$$m_k = \inf_{x \in I_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Chiaramente $m_k, M_k \geqslant 0$; pertanto i prodotti

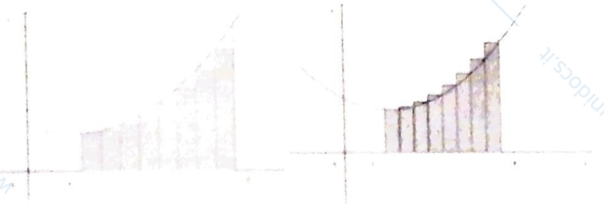
$$m_k(x_{k+1} - x_k), \qquad M_k(x_{k+1} - x_k)$$

rappresentano le aree di due rettangoli aventi per base l'intervallo I_k ed altezze di lunghezze m_k e M_k, rispettivamente.

Le somme integrali inferiore e superiore

$$s(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k), \qquad S(f, D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

coincidono con le aree di due regioni piane (che diremo *plurirettangoli*, vedi figura) formate ciascuna da n rettangoli affiancati.



Osservazione
Fissata la decomposizione D, $s(f, D)$ è un'approssimazione per difetto dell'area del rettangoloide: è l'area di un plurirettangolo P contenuto in R. D'altro canto $S(f, D)$ è un'approssimazione per eccesso dell'area del rettangoloide: è l'area di un plurirettangolo P' contenente R.

Ovviamente, le approssimazioni saranno tanto più accurate quanto più fitta è la partizione D.

Definizione
Il rettangoloide R di base $[a, b]$ relativo alla funzione f è misurabile secondo Peano-Jordan se i due insiemi numerici

$$A = \{area(P) : P \text{ plurirettangolo contenuto in } R\}$$

$$B = \{area(P') : P' \text{ plurirettangolo contenente } R\}$$

sono separati e contigui. In tal caso l'unico elemento di separazione di A e B è detto area di R e si indica

$$\sup A = \inf B = |R|.$$

Dalla definizione di integrale secondo Riemann e dalla precedente definizione discende la

Proposizione

Data una funzione f limitata nell'intervallo compatto $[a, b]$, non negativa, il rettangoloide R relativo ad f di base $[a, b]$ è misurabile secondo Peano-Jordan se e solo se f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.

Inoltre

$$|R| = \int_a^b f(x)dx.$$

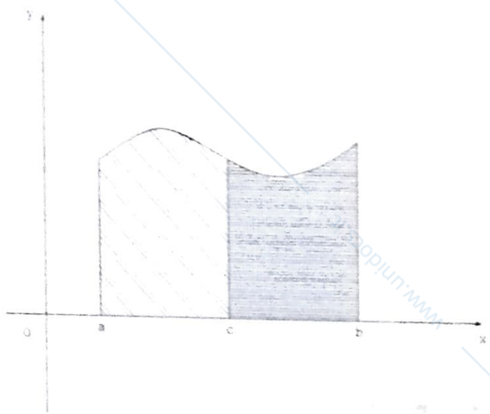
Proprietà dell'integrale di Riemann

Siano f, g due funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo compatto $[a, b]$. Valgono le seguenti proprietà.

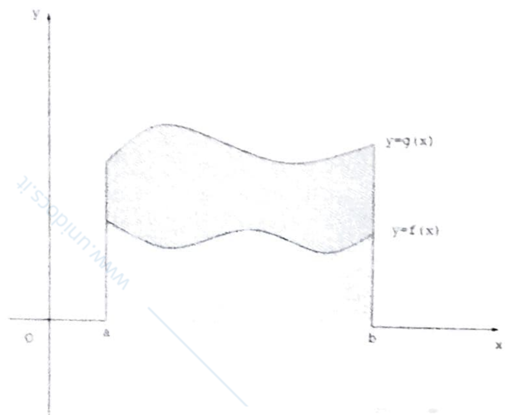
1. Se $c \in \mathbb{R}$, allora
$$\int_a^b cdx = c(b-a).$$

2. Linearità: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

3. Additività: se $a < c < b$, allora
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



4. Monotonia: se $f(x) \leqslant g(x)$ per $x \in [a, b]$, allora
$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$



5. Positività: se $f(x) \geqslant 0$ per $x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0.$$

6.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

Classi di funzioni integrabili secondo Riemann

Tra le funzioni integrabili secondo Riemann ci sono le funzioni continue e le funzioni monotone.

Proposizione

f continua in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

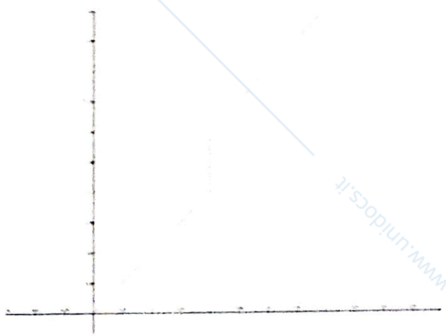
Esempi.

Le funzioni potenze, radici, esponenziali, logaritmi, seno, coseno,...sono integrabili secondo Riemann in intervalli compatti di $\mathbb{R}$ in cui risultano definite, poichè sappiamo che sono ivi continue.

Proposizione

f limitata e monotona in $[a,b]$ $\Rightarrow$ f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

Esempio. La funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x+\frac{1}{2} & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$ è crescente in $[0,2]$ e, pertanto, ivi integrabile.



Proposizione

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, con un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow$ f integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.

Quest'ultima proposizione è una conseguenza dell'additività dell'integrale di Riemann.

Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann

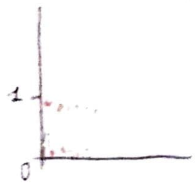
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora per qualunque partizione D di $[0,1]$ risulta

$$s(f, D) = 0, \qquad S(f, D) = 1.$$

Perciò f non è integrabile secondo Riemann.



Lezione del 24 Aprile 2020

Teorema della media integrale
Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a, b]$. Allora esiste almeno un punto $c \in [a, b]$ tale che

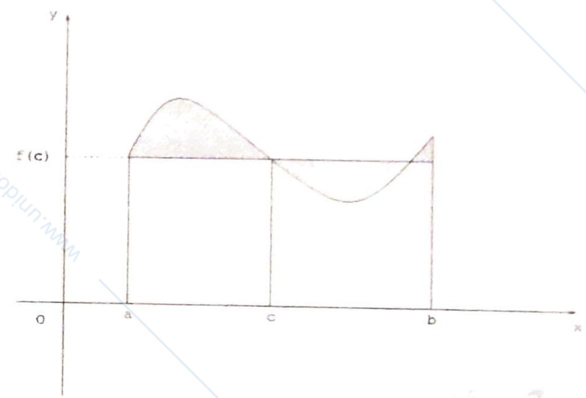
$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

La quantità

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

è detta media integrale della funzione f sull'intervallo $[a, b]$.

Osservazione
Se f è una funzione positiva, il teorema ha un'evidente interpretazione geometrica: esiste un rettangolo di base $[a, b]$ ed altezza di lunghezza $f(c)$ che ha la stessa area del rettangoloide di base $[a, b]$ relativo ad f.



Dimostrazione.
Poichè f è continua nel compatto $[a, b]$, per il teorema di Weierstrass è dotata di minimo e massimo: esistono cioè due valori m, M assunti dalla funzione tali che

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a, b].$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx,$$

cioè

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

ovvero

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant M.$$

Dal fatto che una funzione continua assume tutti i valori compresi tra minimo e massimo, per il Teorema dei Valori Intermedi, segue allora l'asserto.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

L'integrale di Riemann viene anche detto integrale definito. Il legame tra integrale definito e il corrispondente integrale indefinito è dato dal seguente

Teorema

Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a, b]$. Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{1}$$

Allora F è derivabile in $]a, b[$ e risulta

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]a, b[.$$

La funzione F si dice *funzione integrale di* f.

Dimostrazione

Sia $x \in]a, b[$ e sia $h > 0$ tale che $x + h \in]a, b[$. Allora, per la proprietà additiva dell'integrale,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

D'altronde, poiché f è continua in $[x, x+h]$, per il teorema della media esiste $c_h \in [x, x+h]$ tale che

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Facendo il limite per $h \to 0^+$, $c_h \to x$, $f(c_h) \to f(x)$ per la continuità di f, sicché

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x).$$

Tutto analogo se $h < 0$.

Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a, b]$ e sia G una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

Dim

Dal teorema di caratterizzazione delle primitive, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$, dove F è la funzione integrale definita in (1). Allora

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + c - [F(a) + c] = F(b) - F(a) = F(b) - 0 \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Esempi

- Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 dx.$$

Essendo $G(x) = x$ una primitiva della funzione integranda, risulta

$$\int_1^2 dx = x\Big]_1^2 = 2 - 1 = 1.$$

In generale, l'integrale definito della funzione identicamente uguale a 1 esteso ad un intervallo $[a, b]$ è pari all'ampiezza dell'intervallo, $b - a$.

Esempi

- Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx.$$

Essendo $G(x) = \frac{\log^2 x}{2}$ una primitiva della funzione integranda, risulta

$$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \frac{\log^2 x}{2}\Big]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Esempi

- Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_e^{e^2} \log x \, dx.$$

Calcoliamo innanzitutto una primitiva della funzione integranda $\log x$. A tal scopo applichiamo la regola di integrazione per parti per determinarne l'integrale indefinito:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int dx = x \log x - x + c. \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sia $G(x) = x \log x - x$ una primitiva di $\log x$ (quella corrispondente al valore zero della costante c). Risulta

$$\int_e^{e^2} \log x \, dx = x \log x - x\Big]_e^{e^2} = (2e^2 - e^2) - (e - e) = e^2.$$

Esempi

- Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Calcoliamo innanzitutto una primitiva della funzione integranda $\sqrt{e^x - 1}$. A tal scopo applichiamo la regola di integrazione per sostituzione per determinarne l'integrale indefinito; poniamo

$$\begin{cases} \sqrt{e^x - 1} = t \Rightarrow e^x = t^2 + 1 \Rightarrow x = \log(t^2 + 1) \\ dx = \frac{2t}{t^2 + 1} dt \end{cases}$$

Risulta

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x - 1}dx &= \int \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt \\ &= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2t - 2\arctan t + c \\ &= 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + c. \qquad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sia $G(x) = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1}$ una primitiva di $\sqrt{e^x-1}$ (quella corrispondente al valore zero della costante c). Risulta

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x-1}dx &= 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1}\Big]_0^{\log 5} \\ &= (2\cdot 2 - 2\arctan 2) - (0) = 4 - 2\arctan 2.\end{aligned}$$

Esempi

- Calcolare l'area del rettangoloide di base $[0, 2\pi]$ relativo alla funzione $f(x) = \cos^2 x$.

Dobbiamo calcolare $\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$. A tale scopo, determiniamo prima le primitive della funzione integranda $\cos^2 x$. Risulta

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c. \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sia $G(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$ una primitiva di $\cos^2 x$ (quella corrispondente al valore zero della costante c). Risulta

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi + 0) - 0 = \pi.$$

Esercizi

- Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^1 e^{\arcsin x} dx; \qquad \int_{1/e}^{e^3} \frac{1}{x}\sqrt{\log^2 x - 2|\log x| - 2\log x + 4}\, dx.$$

- Calcolare l'area delle seguenti regioni piane:

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{6-x} \leqslant y \leqslant x - 1\right\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leqslant y \leqslant -x^2 + 4\} \\ D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \log(x+2),\ x^2 + y^2 < 1,\ x < 0\} \\ D_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{e^x + 2e^{-x}}\right\}.\end{aligned}$$

Esercizi di integrazione per parti degli integrali

1) $\int \cos x \, e^{2x} dx = \sin x \cdot e^{2x} - \int \sin x \; 2e^{2x} dx$

$= \sin x \cdot e^{2x} + 2\cos x e^{2x} + 2\int (-\cos x) \cdot 2e^{2x} dx$

$= \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \cos x \underbrace{- 4 \int \cos x \, e^{2x} dx}_{\text{lo porto al 1° membro}}$

$\Rightarrow 5 \int \cos x \, e^{2x} dx = \sin x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cos x$

$\Rightarrow \int \cos x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{5} \sin x \cdot e^{2x} + \frac{2}{5} e^{2x} \cdot \cos x$

2) Se ho $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con [grado di $P(x)$] > [grado di $Q(x)$]

allora devo eseguire la divisione dei polinomi

$P(x) = Q(x) \cdot \underbrace{A(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{resto}}$

$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$\int \frac{x^3 + 3x^2}{x+2} dx$

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + \quad\quad 3x^2 & x+2 \\
\hline
-x^5 - 2x^4 & x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 10 \\
// \; -2x^4 + 3x^2 & \\
\quad +2x^4 + 4x^3 & \\
\quad // \; 4x^3 + 3x^2 & \\
\quad\quad -4x^3 - 8x^2 & \\
\quad\quad // \; -5x^2 & \quad -10x
\end{array}
$$

$\Rightarrow \int \frac{x^5 + 3x^2}{x+2} dx = \int (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 5x + 10) dx + \int \frac{-20}{x+2} dx$

$= \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 10x - 20 \log|x+2| + c$

3) $\int \frac{x^2}{x^4 - 1} dx$

$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

$\frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} =$

$= \frac{(A+B+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (A+B-C)x + (-A+B-D)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}$

$= \frac{x^2}{x^4-1}$

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A+B+D=1 \\ A+B-C=0 \\ -A+B-D=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{1}{4} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = 0 \quad D = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int \frac{x^2}{x^4-1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/4}$

4) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx$

$y=\sqrt{x} \qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$x = y^2 \qquad dx = 2y\,dy$

$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\,dx = 2\int \frac{(y+1)y}{y^2-1}\,dy = 2\int \frac{y}{y-1}\,dy$

$= 2\int \frac{y-1+1}{y-1}\,dy = 2\left[\int dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy\right] = 2y + \log|y-1| +$

$= 2\sqrt{x} + \log|\sqrt{x}-1| + c$

non Radice di polinomio di 2° grado

5) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Considero le radici di $1-x^2$.

$1-x^2=0 \Leftrightarrow 1=x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Scelgo un fattore della scomposizione: $x+1$

$\sqrt{1-x^2} = y(x+1)$ (scrivo $y \cdot$ fattore scelto)

$1-x^2 = y^2(x+1)^2$

$(1-x)\cancel{(1+x)} = y^2(x+1)^{\cancel{2}}$

$1-x = xy^2+y^2 \Rightarrow 1 = x+xy^2+y^2 \Rightarrow 1-y^2 = x(y^2+1)$

$\Rightarrow x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ (x è una funzione razionale di y!)

$dx = \left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)'dy$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int y\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}+1\right)\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)'dy$

Pongo $x = \operatorname{sen} y \qquad y = \operatorname{arcsen} x \qquad dx = \cos y\,dy$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}\cdot \cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy$

$= \int \frac{1+\cos(2y)}{2}\,dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) =$

$= \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y \cos y = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c.$