Gli insiemi

Indice:

alessiadonati00@gmail.com

Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

Linguaggio formale

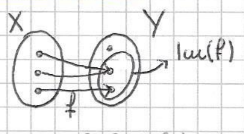
- $\forall$ "per ogni" $x \in B \ \forall x \in A$, cioè $A \subseteq B$
- $\exists$ "esiste almeno un" $\exists x \in A : x \in B$, cioè $A \cap B \neq \emptyset$
- $\exists!$ "esiste un unico" $\exists! x \in A : x \in B$, cioè $A \cap B$ = 1 elemento
- $\Rightarrow$ "implica" $x \in A \Rightarrow x \in B$, cioè $A \subseteq B$
- $\Leftrightarrow$ "se solo se" $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, cioè $A = B$

Funzione

è una relazione tra due insiemi. TUTTI gli elementi di A, hanno UNA SOLA IMMAGINE in B

$f : X \to Y$ X: dominio, $dom(f)$

Y: codominio, $codom(f) \supseteq$ immagine, $Im(f)$



Iniettività: presi due punti (elementi) distinti di X, le loro immagini devono essere distinte

N.B una parallela all'asse x incontra il graf(f) in UN PUNTO

Suriettività: il codominio coincide con l'immagine

I+S = BIETTIVITÀ

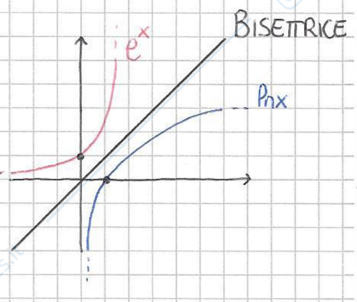
Invertibilità: una f è invertibile se solo se f è biettiva

f, l'inversa di f è f^{-1}

- $f^{-1}(f(x)) = x$ $f : X \to Y$ $g : Y \to X$ g sarà l'inversa di f

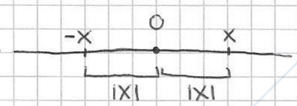
$g(f(x)) = x$ $f(g(y)) = y$

I_x identità I_y



Valore assoluto

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$



$|x| := distanza(x, 0) \geq 0$

1) $-|x| \leq x \leq |x|$ 2) $|x| < a \to -a \leq x \leq a$

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (non degenerazione)
- $|\lambda x| = |\lambda||x|$ (1-omogeneità)
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (SUBADDITIVITÀ)

alessiadonati00@gmail.com

	discreto (ammette il minimo)	numerabile	denso in $\mathbb{R}$
$\mathbb{N}$	✓	✓	×
$\mathbb{Z}$			
$\mathbb{Q}$	×	✓	✓
$\mathbb{R}$	✓	×	
$\mathbb{C}$			

- discreto: ammette il minimo elemento
- numerabile: $\exists$ funzione biunivoca che associa ogni numero naturale ad un numero dell'insieme

  $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad \forall r \in \mathbb{Q} \ \exists! n \in \mathbb{N} : f(n) = r$

alessiadonati00@gmail.com
Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Analisi 1

- $A \subseteq B$, A è contenuto in B
- $A \subset B$, A è strettamente contenuto in B
  è sottoinsieme di B $\exists b \notin A$
- $A = B$, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

1. Elementi della teoria degli insiemi

Notazioni

$\mathbb{N}$: insieme dei numeri naturali $= \{1, 2, 3 \dots\}$ * se abbiamo bisogno dello 0 $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$: insieme dei numeri interi $= \{\pm 1 \dots\}$

$\mathbb{Q}$: insieme dei numeri razionali $= \{ p/q ,\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{R}$: insieme dei numeri reali

$\subset \mathbb{C}$

Studio di $\mathbb{N}$, funzioni $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (SUCCESSIONI DI n reali)

$\mathbb{N}$ è dotato di $\leq$ (relazione d'ordine), cioè una operazione che permette di confrontare due numeri naturali.

1) $\leq$ è riflessiva $n \in \mathbb{N}$ $n \leq n$
2) $\leq$ è transitiva $\forall n, m, p \in \mathbb{N}$
   $n \leq m,\ m \leq p \Rightarrow n \leq p$
3) $\leq$ è antisimmetrica $\forall n, m \in \mathbb{N}$
   $n \leq m,\ m \leq n \Rightarrow n = m$

Proprietà 1 la relazione d'ordine $\leq$ è TOTALE $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$ ho $n \leq m \vee m \leq n$
. TUTTI GLI ELEMENTI SONO CONFRONTABILI TRA LORO

Proprietà 2 $\mathbb{N}$ è ordinato (BUON ORDINAMENTO) Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, sia $m \in \mathbb{N}$
Si dice che m è un minimo (massimo) di E se: (i) $m \in E$
(ii): $\forall n \in E$ $n \geq m$ ($n \leq m$)

* $\mathbb{N}$ è ben ordinato, cioè $\leq$ TOTALE e qualunque sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette un unico minimo

m è unico, IL minimo di E

DIM Supponiamo di avere m_1, m_2 due minimi di E, allora $m_1 = m_2$
So che $m_1, m_2 \in E$
- m_1 è minimo di E $m_1 \leq m_2$
- m_2 è minimo di E $m_2 \leq m_1$

3) $m_1 = m_2$

SUCCESSORE $n \in \mathbb{N}$, $\min\{m \in \mathbb{N};\ m > n\} = n+1$

Proprietà 3 Ogni numero naturale ha un unico successore

Proprietà 4 Ogni numero naturale $n > 1$ è successore di qualcosa

alessiadonati00@gmail.com

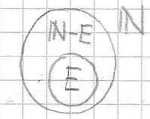
TEOREMA. principio di induzione

Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, non vuoto tale che:

(i) $1 \in E$

(ii) Se $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$

Allora $\boxed{E = \mathbb{N}}$



DIM per assurdo

$E \neq \mathbb{N}$, Allora $\underbrace{(\mathbb{N} \setminus E)}_{\text{complementare di } E} \neq \emptyset$

- Poiché $(\mathbb{N} \setminus E)$ ammette il minimo elemento, $m = \min(\mathbb{N} \setminus E)$
  se $m \in (\mathbb{N} \setminus E) \rightarrow \boxed{m \notin E}$, $m > 1$ (x ipotesi)

- Per la proprietà G $\exists! \, k \in \mathbb{N}$, $m = k+1$ $\quad k \notin (\mathbb{N} \setminus E)$ perché m è il più piccolo di $(\mathbb{N} \setminus E)$ e $m > k$
  $k \in E$

L'ipotesi (ii) $k+1 \in E$ ma $k+1 = m$ $\boxed{m \in E}$ CONTRADDIZIONE

ESERCIZI: versione facile: il testo dai il risultato, bisogna dimostrarlo per induzione

Versione difficile: il testo non ti da la formula che va dimostrata e trovata

- $\forall n \in \mathbb{N}$ Trova $\sum_{J=1}^{n} J = (1+2+3+\dots+n)$ somma dei primi n interi

DIFFICILE
NON HO LA FORMULA

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{J=1}^{n} J = ?$

$1 \; 2 \; 3 \; \dots \; n-2 \; n-1 \; n$, $\; a = n-3$

- parto dagli estremi

$n+1$
$2+n-1 = n+1$
$3+n-2 = n+1$
$a+n-3 = n+1$

- $(n+1)$ va fatto n volte $\rightarrow n(n+1)$
- Va diviso per due, perché si arriva a metà strada $\Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2}$ HO TROVATO LA FORMULA

FACILE
HO LA FORMULA

$E = \left\{ n \in \mathbb{N} ; \sum_{J=1}^{n} J = \frac{n}{2}(n+1) \right\}$ TESI $E = \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

Devo verificare
- $E \subseteq \mathbb{N}$ Sì
- $1 \in \mathbb{N}$ $\sum_{J=1}^{1} J = \frac{1}{2}(1+1)$ $1 = 1$ Sì
- $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$? –

$+\sum_{J=1}^{n} J = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \sum_{J=1}^{n+1} J = \dfrac{(n+1)}{2}(n+2)$ va dimostrata

Si ha $\sum_{J=1}^{n+1} J = \sum_{J=1}^{n} J + (n+1) \Rightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \left(\dfrac{n}{2} + 1\right)(n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n+2}{2}\right)$ OK

alessiadonati00@gmail.com
Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

ESERCIZIO

DIFFICILE Trova $\sum_{j=0}^{n} x^j = 1+x+x^2+\ldots+x^n$ La somma dei primi n quadrati

Quindi, pongo $S_n = \sum_{j=0}^{n} x^j$

Moltiplico $x \cdot S_n$

$$S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$$
$$x \cdot S_n = x+x^2+x^3+\ldots+x^{n+1}$$

$$S_n - xS_n = 1-x^{n+1}$$
$$\downarrow$$
$$(1-x)S_n = 1-x^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

FACILE Dimostra che $\sum_{j=0}^{n} x^j \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \\ n+1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

$E = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ ;\ 1+x+x^2+\ldots+x^n$

- $E \subseteq \mathbb{N}_{\cup\{0\}}$? Si
- $0 \in \mathbb{N}$? Si $(x^0 = 1)$
- $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$?

Ipotesi: $\sum_{j=0}^{n} x^j = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ Tesi: $\sum_{j=0}^{n+1} x^j = \dfrac{1-x^{n+2}}{1-x}$

Si ha
$$\sum_{j=0}^{n+1} x^j = \sum_{j=0}^{n} x^j + x^{n+1}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$$
$$= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Altri esercizi sul quaderno ...

alessiadonati00@gmail.com

TEOREMA:
Versione generalizzata del principio di induzione

Sia $k \in \mathbb{N}$

Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, tale che:

(i): $k \in E$

(ii): $n \in E \Rightarrow n+1 \in E \quad \forall n \geq k$

$\Rightarrow E = \{k_1, k+1, k+2 \dots\}$

In pratica per le DIM:

1) P(n) è vera per $n=0$? $P(0)$

2) P(n) è vera ✓ $\rightarrow$ P(n+1) è vera? $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Definizione: cardinalità X, Y insiemi si dicono avere stessa cardinalità se $\exists f: X \rightarrow Y$ iniettiva e suriettiva (biettiva)

Definizione: numerabile Un insieme X si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$

ES Sia X un insieme finito (con finiti numeri di elementi) allora X non può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio (cioè diverso da X)

ES $\mathbb{N}$ è infinito

alessiadonati00@gmail.com

2. Calcolo combinatorio

Definizione: fattoriale n!

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definisco $n!$ come il numero di tutti i gruppi che si possono formare disponendo n oggetti (distinti) in tutti i modi possibili.

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1)) = \prod_{i=1}^{n} i \quad \text{PRODUTTORIA}$$

ES. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 180$

$n!$ cresce molto velocemente al crescere di n

Supponiamo di avere una parola di n lettere, di cui solo $k \leq n$ sono distinte. n_1 = volte che si ripete a, n_2 = volte che si ripete b ...

ES. MATEMATICA

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_6!}$$

M x2	$n_1 = 2$	
A x3	$n_2 = 3$	
T x2	$n_3 = 2$	$\rightarrow n = 10$
E x1	$n_4 = 1$	
I x1	$n_5 = 1$	
C x1	$n_6 = 1$	

$k = 6$ (lettere MATEIC) Anagrammi possibili $= \dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!}$

Definizione: Coefficiente binomiale

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sia $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \leq n$, sia A un insieme di cardinalità n.
Il numero dei sottoinsiemi di A di grandezza $k \leq n$, si chiama coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad ! \ \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

- $k=1$ $\quad \binom{n}{1} = n$ $\quad$ DIM. $= \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\dots}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\dots} = n$

- $k = n-1$ $\quad \binom{n}{n-1} = n$ $\quad$ ES. $\binom{3}{2} = 3$ $\quad A = \{a,b,c\}$ $\quad \{a,b\}\{b,c\}\{a,c\}$

- $k \leq n$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ relazione biunivoca

TRIANGOLO DI TARTAGLIA $\quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

verifico $\quad \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \overset{?}{=} \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$

Moltiplico per $(k-1)!$ $\quad \dfrac{n!}{k(n-k)!} \overset{?}{=} \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{k(n-1-k)!}$ $\qquad ! \ \dfrac{(k-1)!}{k!} = \dfrac{1}{k}$

Divido per $(n-1)!$ $\quad \dfrac{n}{k(n-k)!} \overset{?}{=} \dfrac{1}{(n-k)!} + \dfrac{1}{k!(n-1-k)!}$

Moltiplico per $(n-k)!$ $\quad \dfrac{n}{k} \overset{?}{=} 1 + \dfrac{n-k}{k} \Rightarrow \dfrac{n}{k} = \dfrac{n}{k}$ OK ✓

alessiadonati00@gmail.com

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{n-1}{k-1} \quad \binom{n-1}{k}$$
$$\binom{n}{k}$$

Perché il triangolo di Tartaglia è vero?

Voglio calcolare il numero di sottoinsiemi k elementi in S di n elementi.

Fisso un $a \in S$, i sottoinsiemi di S di k elementi si dividono in due parti:
- quelli che contengono a
- quelli che NON contengono a

Quanti sono quelli che non contengono a?

Sono i sottoinsiemi di k elementi di $S \setminus \{a\}$

Ma $S \setminus \{a\}$ ha $(n-1)$ elementi $\rightarrow$ Dunque essi sono in numero di $\binom{n-1}{k}$.

Resta da vedere che i sottoinsiemi di S di k elementi che contengono a sono $\binom{n-1}{k-1}$

perché sono in bigezione con i sottoinsiemi di $S \setminus \{a\}$ di $(k-1)$ elementi

(basta aggiungere a a ciascuno di questi sottoinsiemi)

Def. Formula di Newton Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

Allora $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

DIM (per induzione)

1) $(a+b)^0 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$1 \overset{?}{=} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$$
$$1 = 1 \quad \checkmark$$

2) $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$$(a+b)^n (a+b)$$

- $(a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \underset{k+1=J}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]}_{\text{IN TARTAGLIA } \binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} =$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

alessiadonati00@gmail.com

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Definizione: disuguaglianza di Bernoulli I $(1+x)^n \geq 1+nx$

DIM per induzione

1) Vale per $n=0$? $(1+x)^0 \geq 1+0\cdot x$ $1 \geq 1$ Sì

2) $n+1$? $\bullet\ (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ N.B. $a>b$, $ca>cb$

$\bullet\ (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$\bullet\ (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$

$1+nx+nx^2+x \geq 1+nx+x$ Sì

Definizione: disuguaglianza di Bernoulli II $(1+x)^n \geq 1+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

DIM per induzione

1) Vale per $n=0$? $(1+x)^0 \geq 1+\frac{0(0-1)}{2}x^2$ $1 \geq 1$ Sì

2) Vale $n+1$? $\bullet\ (1+x)^{n+1} \geq 1+\frac{(n+1)(n)}{2}x^2$

$\bullet\ (1+x)^n(1+x) \geq \left(1+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x)$

$\bullet\ \left(1+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right)(1+x) \geq 1+\frac{(n+1)n}{2}x^2$

$\cancel{1}+x+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)}{2}x^3 \geq \cancel{1}+\frac{(n+1)n}{2}x^2$ Sì

alessiadonati00@gmail.com

Studio di $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2 \dots\}$ (interi)

$\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$ sottoinsieme proprio

Definizione: $\mathbb{Z}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$

Dunque $\mathbb{Z}$ si può mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.
Esiste una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, dove ogni numero intero è associato al suo naturale $\quad -1 \to 1$, $-n \to n$ $\quad f(-n) = n$

Insiemisticamente $\mathbb{Z}$ è più grande di $\mathbb{N}$ ma ha lo stesso numero di elementi.

Studio di $\mathbb{Q}$ (numeri razionali)

TEOREMA $\mathbb{Q}$ è numerabile, quindi ha corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ $\quad \exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biettiva

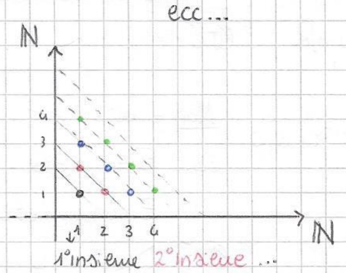
$f(1) \in \mathbb{Q}, f(2) \in \mathbb{Q} \dots \quad \forall r \in \mathbb{Q} \; \exists! n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(n) = r \quad$ $f(1)$ è il razionale n1 ecc...

DIM

1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile

$(X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$
coppia ordinata $\{\{x\};\{x,y\}\}$

così come
$\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N} \cup \{0\} \times \mathbb{N}$



l'insieme di questi punti è un'unione numerabile di insiemi finiti

$x + y = k \in \mathbb{N}, \; k \geq 2$

$I_k = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = k\} \quad k \in \mathbb{N} \quad$ Il numero di elementi di $I_k = k-1$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq 2}} I_k$ ↳ unione numerabile di insiemi finiti, ogni I_k è finito $\Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile

così come $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$

2) $\mathbb{Q} = \{(p/q); \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ $\boxed{(p,q) = 1 \text{ PRIMI TRA LORO}}$

1	2	3	4
1/2	2/2	3/2	4/2
1/3	2/3	3/3	4/3
1/4	2/4	3/4	4/2

Abbiamo molte ripetizioni

Dico che $p/q \underset{\text{equivalente}}{\sim} n/m \quad pm = qn \quad$ es. $\frac{1}{3} \sim \frac{3}{9}$

! $\sim$ è una relazione di equivalenza
1. RIFLESSIVA $x \sim x$
2. TRANSITIVA $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$
3. SIMMETRICA $x \sim y = y \sim x$

INSIEME QUOZIENTE $\dfrac{\{(p;q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}}{\sim} := \{[(p,q)] : (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$

è l'unione delle

CLASSE DI EQUIVALENZA $[(p,q)] = \{(n,m) : (n,m) \sim (p,q)\}$

alessiadonati00@gmail.com

Definizione: partizione Se X è un insieme, $\sim$ è una relazione di equivalenza di X

$X/\sim := \{[x] : x \in X\}$

Allora due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte

Dunque ho partizionato $X/\sim$ in insiemi tra loro disgiunti che ricoprono tutto

Definizione. ↓ Una partizione di un insieme numerabile o è finita o è numerabile

Ne segue che $\{(p,q) : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1\}$ è numerabile

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$
$\mathbb{N}$ è infinito	✓
$\mathbb{N}$ è numerabile	✓
$\leq$ ordine totale	✓
$\mathbb{N}$ è ben ordinato	$\mathbb{Q}$ non è ben ordinato
$\mathbb{N}$ non è denso in $\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Definizione: insieme DISCRETO Non è vero che qualunque sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ ammette (il) minimo elemento.

ES. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$ ... $\sqrt{2}$ ...

E non ammette minimo perché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ è NON DISCRETO: tra un numero e l'altro vi è sicuramente un numero r $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists r \in \mathbb{Q}$ $r \in (\sqrt{2}; \sqrt{2}+\varepsilon)$

DIM $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ -> x assurdo $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\exists p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, (p,q) = 1$

$\sqrt{2} = p/q \rightarrow 2 = p^2/q^2 \quad q \neq 0 \rightarrow 2q^2 = p^2 \rightarrow p^2$ è divisibile per due $\Rightarrow p$ è pari (p^2 è pari)

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p = 2k \rightarrow p^2 = 4k^2 \rightarrow 2q^2 = 4k^2 \rightarrow q^2 = 2k^2 \rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ è pari

ASSURDO così p e q non sono primi tra loro

TEOREMA $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Siano $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b \rightarrow$ allora $\exists r \in \mathbb{R}, a < r < b$

NOTA esistono infiniti numeri tra a e b

NOTA ogni numero reale si può approssimare bene quanto si vuole con un qualche numero razionale

DIM ... a ... $1/2$ ... b ...

... $1/5$ $1/5$ $1/5$ $1/5$ $1/5$ $1/5$ $1/5$ ...

$a < b$ es $b - a = \frac{1}{2}$

$n = 5 \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{n}$ $\mathbb{Q}$ e compio dei balzi, passando più volte tra a e b

$q_0 = \frac{1}{4}$

→

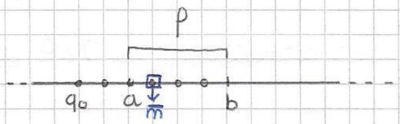
alessiadonati00@gmail.com

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b \rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : a<q<b$

$\frac{1}{n} < \rho$

DIM Scelgo $q_0 \in \mathbb{Q}$, $q_0 < a$

Posso fare questa scelta perché esistono razionali arbitrariamente piccoli (ad esempio "molto negativi")



Sia $\rho = b-a$. Sia poi $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/n < b-a = \rho$

Posso fare questa scelta perché $n > \rho$, (esistono numeri naturali arbitrariamente grandi)

Definisco un insieme $E := \{ m \in \mathbb{N} : q_0 + \frac{m}{n} > a \}$ $\quad E \neq \emptyset$

$m > (n)(a - q_0)$ $\quad$ (n, a, q_0 sono stati fissati)

Dal fatto che $\mathbb{N}$ è ben ordinato, segue che esiste un unico minimo di E $\quad \exists! \min E =: \overline{m}$

Definiamo $q = q_0 + \frac{m}{n} = \overline{m}$ $\rightarrow$ q è il numero razionale che cerco

Devo dimostrare che $q \in \mathbb{Q}$ e $a<q<b$

- $q \in \mathbb{Q}$? $\quad q = q_0 + \frac{m}{n}$ $\quad q_0 \in \mathbb{Q}$, $m/n \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow q \in \mathbb{Q}$ ✓ VERO
- $q > a$? Poiché $\overline{m}$ è il m di E allora $\overline{m} \in E$
  questo vuol dire che $\overline{m}$ verifica $q_0 + \frac{\overline{m}}{n} > a$ $\quad q_0 + \frac{\overline{m}}{n} = q$ $\quad q > a$ ✓ VERO
- $q < b$? Uso (ii, proprietà 2) $\forall m \in E$, $n \geq m$
  $\overline{m} - 1 \notin E$ (è più piccolo del minimo)
  quindi $q_0 + \frac{\overline{m}-1}{n} \leq a \rightarrow q_0 + \frac{\overline{m}}{n} - \frac{1}{n} \leq a \rightarrow q \leq a + \frac{1}{n} \rightarrow q < a + \rho \rightarrow$
  $\rightarrow q < a + b - a \rightarrow q < b$ ✓ VERO

DIM. ESERCIZIO $FD = \{ \frac{p}{10^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$ Sono densi in $\mathbb{R}$. ∎

$ND = \{ \frac{p}{2^k} : p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$

alessiadonati00@gmail.com

Studio di $\mathbb{R}$

Sono liste infinite di numeri naturali o $\{0\}$ tra 0 e 9 dopo la virgola, e liste finite prima della virgola

$0,\underbrace{123}_{\text{periodo}}123\ldots$

TEOREMA (CANTOR): $\mathbb{R}$ non è numerabile
(G.G.1)

Cioè $\mathbb{R}$ non ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ (non esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ iniettiva e suriettiva)
« Non posso contare un numero reale »
« Non posso parlare del primo numero reale, del secondo... »

Ho due dimostrazioni

1° DIM si basa sul principio diagonale
ASSURDO
Mettiamo in corrispondenza biunivoca $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dunque posso contare i numeri reali
In particolare posso contare i numeri reali tra $[0;1]$

$r_1 = 0,\underline{9}21354\ldots$
$r_2 = 0,4\underline{4}132\ldots$
$r_3 = 0,77\underline{1}62\ldots$
$r_4 = 0,987\underline{6}543\ldots$

Sia $k \in \mathbb{N}$ definisco $y_k = \begin{cases} 5 & \text{se la } k\text{-esima cifra di } r_k \text{ dopo la virgola è } 4 \\ 4 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$k=1 \quad y_1 = 4$
$k=2 \quad y_2 = 5$
$k=3 \quad y_3 = 4$
$k=4 \quad y_4 = 4$

Definisco $y = 0,y_1y_2y_3y_4\ldots \in [0,1]$ un nuovo reale tra 0 e 1
$y = 0,4544\ldots$
Poiché per assurdo $[0;1]$ è numerabile $\exists h \in \mathbb{N}: \ y = r_h$
Vediamo la h-esima cifra y_h di y dopo la virgola

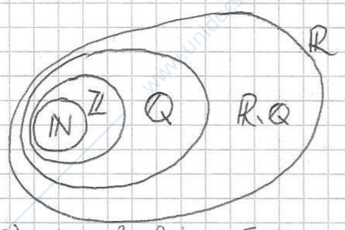
$y_h \begin{cases} 5 & \text{se } y_h = 4 \\ 4 & \text{se } y_h \neq 4 \end{cases}$ ASSURDO

$\blacksquare$

Osservazioni $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ è numerabile
$\mathbb{R}$ non è numerabile
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrazionali) non sono numerabili

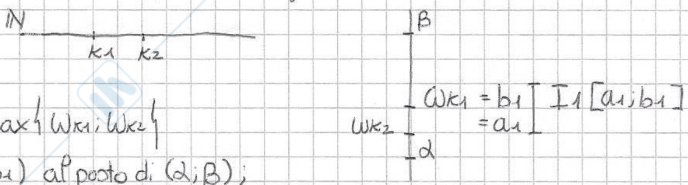
« Ci sono molti più numeri irrazionali di quanti siano i numeri razionali. »

$\underbrace{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}}_{\text{stesso n° di elementi}} \subset \underbrace{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}_{\text{sono di più ma uguali}}$



- 2° DIM Supponiamo (ω_k) sia una successione di n. reali
Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$
Allora $\exists \eta \in [\alpha;\beta]$, $\eta \neq \omega_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Sia $k_1 \in \mathbb{N}$ il minimo n. naturale: $\omega_{k_1} \in [\alpha;\beta]$
- Se k_1 non esiste, allora $\omega_k \notin [\alpha;\beta]$ e dunque $\forall \eta \in (\alpha;\beta)$, η verifica la tesi FINE.
- k_1 esiste (perché $\mathbb{N}$ è ben ordinato)
Prendo $k_2 > k_1$ il minimo intero: $\omega_{k_2} \in [\alpha;\beta]$



$a_1 = \min\{\omega_{k_1};\omega_{k_2}\}$ $b_1 = \max\{\omega_{k_1};\omega_{k_2}\}$

Ripeto il ragionamento con $(a_1;b_1)$ al posto di $(\alpha;\beta)$;
costruisco $k_2 < k_1$
$k_2 < k_3 < k_4$ Intervalli (I_k) $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$

$\bigcap_k I_k$ è un intervallo non vuoto: $\eta \in \bigcap_k I_k$ verifica la tesi $\blacksquare$

alessiadonati00@gmail.com

PROPRIETÀ FONDAMENTALE DI $\mathbb{R}$ (elemento separatore) ASSIOMA (non si dimostra)

Sia $A, B \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$, Allora $\exists! c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ $\forall a \in A, \forall b \in B$

$A \cup B = \mathbb{R}$ c è l'elemento separatore

$\forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leq b$

« Due semirette con al + un estremo in comune, si possono separare in C »

$- - - \underset{A}{\_\_\_\_\_} \overset{c}{\cdot} \underset{B}{\_\_\_\_\_} - - -$ c: o sta in A, o sta in B, o sta in entrambi

DIM $\nexists c \in \mathbb{Q} : \forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leq c \leq b$

NOTA $\mathbb{Q}$ non ha elemento separatore

Definizione: Maggioranti minoranti Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

Insieme dei maggioranti di E := $Maggior(E) := \{x \in \mathbb{R} : \forall e \in E, x \geq e\}$

Insieme dei minoranti di E := $Minor(E) := \{x \in \mathbb{R} : \forall e \in E, x \leq e\}$

Nota: può succedere $Maggior(E) = \emptyset$ o $Minor(E) = \emptyset$ ES $E = \mathbb{N} \to Maggior(E) = \emptyset$
$Minor(E) = (-\infty; 1]$

$E = \mathbb{Q} \to Maggior(E) = \emptyset$
$Minor(E) = \emptyset$

Definizione: limitato Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$

E è superiormente limitato se $Maggior(E) \neq 0$
inferiormente limitato se $Minor(E) \neq 0$
limitato se $Maggior(E) \neq 0$ e $Minor(E) \neq 0$

Dunque E è limitato se solo se $\exists a, b \in \mathbb{R}$ $a < b : E \subset (a; b)$

ESERCIZIO Sia $E = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ Trova Maggior(E) e Minor(E) $E [1, 0[$

$n = 1$ $E = 1$
$n = 2$ $E = 1/4$
$n = 3$ $E = 1/9$ ↓ + piccolo

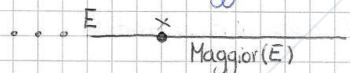
$Maggior(E) = [1, +\infty[$
$Minor(E) =]0, -\infty[$

ESERCIZIO Sia $E = \{q \in \mathbb{Q} : q \in (2; 3)\}$ Trova Maggior(E) e Minor(E)

alessiadonati00@gmail.com

TEOREMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, supponiamo $Maggior(E) \neq \emptyset$
Allora $\exists! \min(Maggior(E))$

analogo: supponiamo $Minor(E) \neq \emptyset$
Allora $\exists! Max(Minor(E))$



$\min(E)$ = non esiste
$MAX(E)$ = non esiste
$\min(Maggior(E))$ = esiste
$MAX(Maggior(E))$ = non esiste

DIM Cerco di dimostrare che $\min(Maggior(E))$ esista, richiamando l'esistenza dell'elemento separatore

$B := Maggior(E) = \{x \in \mathbb{R}, \forall e \in E, x \geq e\}$ $\quad \mathbb{R} - B = \{x \in \mathbb{R}, \exists e \in E \;\; x < e\}$

$A := \{x \in \mathbb{R} : \exists e \in E : e \geq x\}$

- Faccio vedere che A e B verificano le proprietà dell'el. separatore
  - $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ✓
  - $B \neq 0$? per ipotesi $B = Maggior(E)$ ✓
    $A \neq 0$? $A \supseteq E$, $E \neq 0$ ✓
  - $A \cup B = \mathbb{R}$? $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$
    Sia $x \in \mathbb{R}$, devo dimostrare che $x \in A \cup B$
    se $x \in B$ ho finito
    se $x \notin B$ vuol dire che $x \in \mathbb{R} \setminus B \subseteq A$
    dunque $x \in A$ ✓

  $\Rightarrow \exists! c : a \leq c \leq b \;\; \forall a \in A, \forall b \in B$

- Mi resta da dimostrare che $C = \min(Maggior(E))$
  Devo verificare (i) $c \in Maggior(E)$
  (ii) $\forall m \in Maggior(E) \;\; C \leq m$
  (i) Significa $c \geq e \;\; \forall e \in E$ $\quad c \geq a \;\; \forall a \in A$ perché $A \supseteq E$
  $c \geq e \;\; \forall e \in E$ ✓
  (ii) Significa $C \leq b \;\; \forall b \in B$ $\;\; B = Maggior(E)$ e $b = m$ ✓ ∎

QUESTO TEOREMA NON È VERO IN $\mathbb{Q}$ (non ha elemento separatore)

Definizione: estremo superiore ed inferiore

Sia $E \neq \emptyset$, $Maggior(E) \neq \emptyset$

Si definisce $Sup(E)$ = estremo superiore di E
$= \min(Maggior(E))$

Se $Maggior(E) = \emptyset \;\; \rightarrow \;\; sup(E) := +\infty$
In questo modo $Sup(E)$ esiste sempre
(Mentre il MAX potrebbe non esistere)

Si definisce $Inf(E)$ = estremo inferiore di E
$= MAX(Minor(E))$

Se $Minor(E) = \emptyset \;\; \rightarrow \;\; Inf(E) := -\infty$
In questo modo $Inf(E)$ esiste sempre
(Mentre il min potrebbe non esistere)

$Sup\,\emptyset = -\infty$
$Inf\,\emptyset = +\infty$

$S = Sup(E)$ 1) $\forall e \in E \;\; S \geq e$
S è $\min(Maggior(E)) \Leftrightarrow$ qualunque num. più piccolo di S è maggiore
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists e \in E : \; e > S - \varepsilon$

$i : Inf(E)$ 1) $\forall e \in E \;\; i \leq e$
i è $\max(Minor(E)) \Leftrightarrow$ qualunque num più grande di i è minore
2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists e \in E \;\; e < i + \varepsilon$

Generalizziamo $Max(E)$ e $\min(E)$ qualora non esistessero

alessiadonati00@gmail.com
Università di Siena – DIISM 2019-2020
Ingegneria informatica 1° anno

ESERCIZIO

$E_1 = \left\{ \frac{1}{n^2-2} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 3 \right\}$ Trova $\operatorname{Sup}E, \operatorname{Inf}E, \operatorname{Max}E, \min E$

$: \left\{ \frac{1}{9-2} ; \frac{1}{16-2} ; \frac{1}{25-2} \dots \right\}$ $\operatorname{Sup}(E) = \frac{1}{7}$ $\operatorname{Inf}(E) = 0$

$\| $ MAXE $\quad$ $\min E \nexists$

DIM 1) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad 0 \leq \frac{1}{n^2-2} \longrightarrow n=3 \quad 0 \leq \frac{1}{7} \dots \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad \frac{1}{n^2-2} > 0$ ✓

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad \frac{1}{n^2-2} < \varepsilon \rightarrow$ Sia $\varepsilon > 0$, cerco almeno un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n_\varepsilon \geq 3$ $\frac{1}{n_\varepsilon^2-2} < \varepsilon \rightarrow$

$\rightarrow n_\varepsilon^2 - 2 > \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} + 2 \quad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}+2}$ ✓

alessiadonati00@gmail.com

$e \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e è un numero irrazionale

Supponiamo per assurdo che $e \in \mathbb{Q}$ cioè $\exists p,q \in \mathbb{N} : e = \frac{p}{q}$

$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad e_n = \sum_{J=0}^{n} \frac{1}{J!} \qquad n = q$

$e - e_q < \frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{q+2}{q+1} \qquad$ NB $e - \sum_{J=0}^{q} \frac{1}{K!}$

Spero che $\frac{1}{(q+1)!} \cdot \frac{q+2}{q+1} \cdot q! < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q} \cdot q!$

$\frac{q+2}{(q+1)^2} < \frac{1}{q} \rightarrow q(q+2) < (q+1)^2$

$q^2 + 2q < q^2 + 2q + 1$ VERA

Ne segue $e - \sum_{J=0}^{q} \frac{1}{K!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$

$\Updownarrow$

$q!\Big(\underbrace{e}_{\text{è razionale}} - \sum_{J=0}^{q} \frac{1}{K!}\Big) < \frac{1}{q} \longrightarrow$

- $q!$ e è un intero $\in \mathbb{N}$
- $q!\left(\sum_{J=0}^{q} \frac{1}{K!}\right)$ è un intero $\in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} < \frac{1}{q}$ impossibile NB$(\mathbb{N} < 1)$

Altra dimostrazione (Fourier) ASSURDO

$e \in \mathbb{Q}$, $e = \frac{a}{b}$, so che $2 < e < 3$

1. Definisco $x = b!\left(e - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right)$, x deve essere un intero se e è razionale

↓ sostituisco $e = \frac{a}{b}$

$x = b!\left(\frac{a}{b} - \sum_{n=0}^{b} \frac{1}{n!}\right) = \boxed{a(b-1)! - \sum_{n=0}^{b} \frac{b!}{n!}}$ → entrambi i termini sono numeri interi

2. Ora dimostro $0 < x < 1$

- $x = b!\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{b} \frac{r}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b!}{n!} > 0 \qquad \boxed{X > 0}$

ora

- $\frac{b!}{n!} = \frac{1}{(b+1)(b+2)(\dots)(b+(n-b))} < \frac{1}{(b+1)^{n-b}}$

$K = n - b$

$x = \sum_{n=b+1}^{+\infty} \frac{b!}{n!} < \sum_{n=b+1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^{n-b}} = \underbrace{\sum_{K=1}^{+\infty} \frac{1}{(b+1)^K}}_{\text{serie geom}} = \frac{1}{b+1}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{b+1}}\right) = \frac{1}{b} < 1$

$\boxed{X < 1}$

$0 < X < 1$, x è un intero

non esistono interi compresi tra 0 ed 1

e quindi è irrazionale

alessiadonati00@gmail.com