Esami scritti di Analisi Matematica I 2016 - 2017

1 Esame del 1 febbraio 2017 - I^o turno

Esercizio 1. Sia data la funzione

$$f(x) = 1 - \left| \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right| .$$

a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.

b) Calcolare la derivata di f. Studiare la monotonia e tracciare un grafico qualitativo di f.

c) Si consideri ora la funzione composta $g(x) = e^{f(x)}$. Sfruttando le informazioni già ottenute per f, determinare il dominio di g e i suoi limiti agli estremi del dominio. Verificare che g ammette un prolungamento per continuità, che indicheremo con $h(x)$.

d) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di h.

e) Tracciare un grafico qualitativo di h, e determinarne gli estremi inferiore e superiore.

Esercizio 2.

a) Si scriva la definizione della relazione $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \to +\infty$, e la si illustri con un esempio.

b) Stabilire se, nell'ipotesi $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \to +\infty$, segue

$$e^{f(x)} = o(e^{2x^2-1}) \qquad \text{per} \qquad x \to +\infty.$$

In caso affermativo, lo si dimostri, in caso negativo si dia un contresempio.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è definita se $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ e quindi

$$\mathrm{dom} f = (-\infty, 2) \cup (2,3) \cup (3, +\infty)\,.$$

Si ha: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Dunque

1) le due rette $x = 2$ ed $x = 3$ sono asintoti verticali per f;

2) la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale bilatero per f;

3) essendoci un asintoto orizzontale bilatero, non esistono asintoti obliqui.

Si può notare che $f(x) < 1$ per ogni x del dominio.

b) Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se} \quad x < 2 \text{ e } x > 3 \\ 1 + \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se} \quad 2 < x < 3 \end{cases}$$

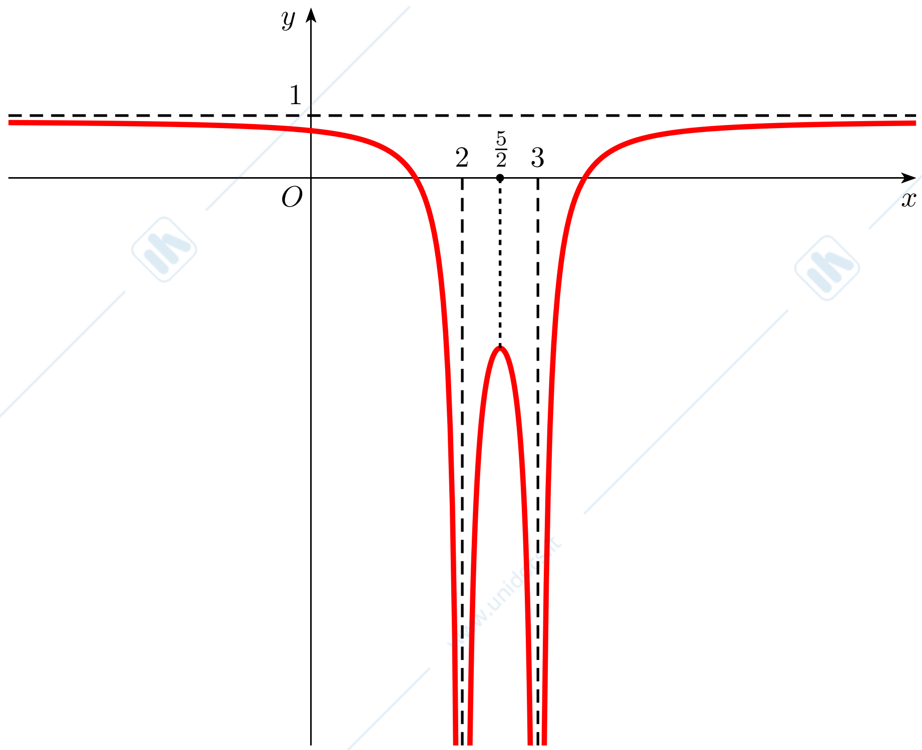
e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se} \quad x < 2 \text{ e } x > 3 \\ -\dfrac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se} \quad 2 < x < 3. \end{cases}$$

Notiamo che $2x - 5$ ha segno costante per $x < 2$ ed $x > 3$ mentre cambia segno nell'intervallo $(2, 3)$. Considerando i segni si trova:

- la funzione decresce in $(-\infty, 2)$ e in $[5/2, 3)$;
- la funzione cresce in $(2, 5/2]$ e in $(3, +\infty)$. Il punto $x_0 = 5/2$ è punto di massimo locale.

Il grafico è nella figura seguente.



c) 1) La funzione g ha lo stesso dominio di f perché l'esponenziale è ovunque definito.

2) Dal teorema delle funzioni composte si ha:

- la funzione g è continua, perché composizione di funzioni continue e $g(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom}\, g$;
- la retta $y = e$ è asintoto arizzontale bilatero, in quanto

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = e.$$

- g tende a zero quando f tende a $-\infty$ e quindi per $x \to 2$ e per $x \to 3$.
- Dunque, in ambedue questi valori di x la funzione g ammette estensione continua h ottenuta ponendo

$$h(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & \text{se} \quad x \neq 2 \text{ e } x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \text{ e } x = 3\,. \end{cases}$$

La funzione così estesa è continua su $\mathbb{R}$.

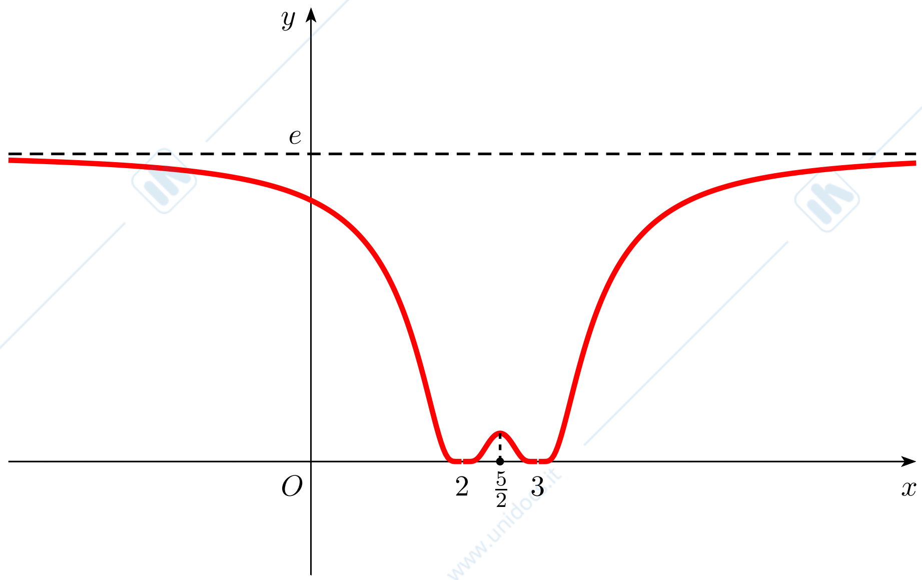
d) La funzione e^y è crescente e quindi la funzione h è crescente, oppure decrescente, negli stessi intervalli in cui è crescente o decrescente la funzione f. In particolare, il punto $5/2$ è punto di massimo relativo per h. Inoltre $h(x) = 0$ se $x = 2$ ed $x = 3$ mentre $h(x) > 0$ su $\mathbb{R} \setminus \{2\,,\ 3\}$. Dunque i punti 2 e 3 sono punti di minimo assoluto per h.

e) L'estremo inferiore di h è 0 (ed è anche minimo); l'estremo superiore è e. Non esiste massimo.

L'esercizio non chiede di studiare la derivabilità di h in $x = 2$ e in $x = 3$. Per completezza, osserviamo che $h'(x) = f'(x)\, e^{f(x)}$ per ogni $x \neq 2, 3$ e

$$\lim_{x\to2} h'(x) = \lim_{x\to3} h'(x) = 0.$$

Il grafico è nella figura seguente.



Esercizio 2.

a) Diciamo che $f(x) = o(2x^2 - 1)$ per $x \to +\infty$ se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{2x^2-1} = 0$.

Come esempi si possono considerare:

Esempio 1: $f(x) = x$.

In questo caso sia la funzione $f(x) = x$ che la funzione $g(x) = 2x^2 - 1$ sono infiniti per $x \to +\infty$ e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

Esempio 2: $f(x) = 1$.

In questo caso $g(x) = 2x^2 - 1$ è un infinito per $x \to +\infty$, mentre f non lo è e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

Esempio 3: $f(x) = \sin x$.

In questo caso $g(x) = 2x^2 - 1$ è un infinito per $x \to +\infty$, mentre f non ha limite per $x \to +\infty$, ma è limitata, e vale $f(x) = o(2x^2 - 1)$.

b) Poniamo $g(x) = 2x^2 - 1$. L'esercizio chiede se è vero che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{f(x)-g(x)} = 0.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to+\infty} g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = -\infty.$$

Ne segue che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 0$$

e quindi $e^{f(x)} = o\left(e^{g(x)}\right)$ per $x \to +\infty$.

2 Esame del 1 febbraio 2017 - II^o turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi(x-4)}{x+8+|4-x|}.$$

a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi, e gli eventuali asintoti.

b) Calcolarne la derivata, determinando eventuali punti di non derivabilità.

c) Studiarne la monotonia e tracciarne un grafico qualitativo.

d) Si consideri ora la funzione composta $h(x) = \sin(f(x))$. Sfruttando le informazioni già ottenute per f, determinare dominio e immagine della funzione h.

e) Specificare se h ammette valore massimo e valore minimo assoluti.

Esercizio 2.

a) Enunciare il Teorema di Lagrange, e dare poi un esempio di funzione che *NON* soddisfa la tesi del teorema.

b) Dimostrare che se f è derivabile e $f'(x) < -3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Il denominatore è sempre diverso da 0 e quindi i valori della funzione possono essere calcolati per ogni x reale: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

La funzione è continua e quindi non ha asintoti verticali.

Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi(x-4)}{x+8+(4-x)} = \dfrac{\pi}{12}(x-4) = f_1(x) & \text{se} \quad x \leq 4, \\[2ex] \dfrac{\pi(x-4)}{x+8-(4-x)} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{x-4}{x+2} = f_2(x) & \text{se} \quad x > 4. \end{cases}$$

Dunque, se $x \leq 4$ il grafico di f è la retta $y = \dfrac{\pi}{12}(x-4)$, da cui $f_1(4) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

La funzione f_1 coincide con il suo asintoto obliquo sinistro.

La funzione $f_2(x)$ è l'iperbole equilatera $y = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{x-4}{x+2}$, quindi $\displaystyle\lim_{x\to4^+} f_2(x) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \dfrac{\pi}{2}$. La funzione ammette la retta $y = \dfrac{\pi}{2}$ come asintoto orizzontale destro.

b) La funzione è derivabile in ogni $x \neq 4$, perché quoziente di funzioni derivabili, con

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{12} & \text{se} \quad x < 4, \\[2ex] \dfrac{3\pi}{(x+2)^2} & \text{se} \quad x > 4. \end{cases}$$

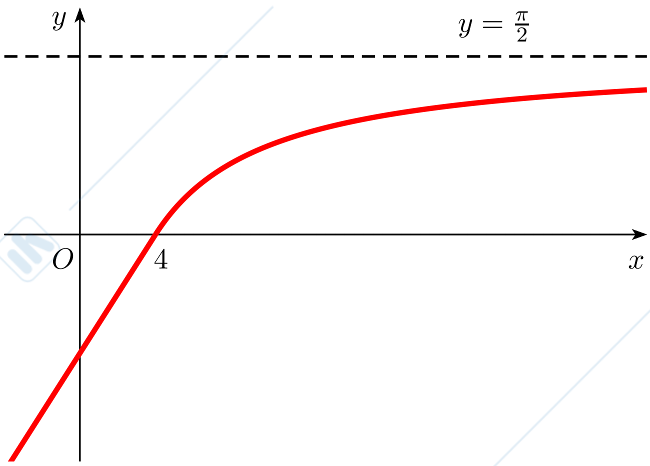
Resta da studiare la derivabilità in $x = 4$. Ricordando che la funzione f è continua, si può usare il *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di De L'Hôpital), e calcolare i limiti laterali di f' per $x \to 4$:

$$\lim_{x\to4^-} f'(x) = \frac{\pi}{12}, \qquad \lim_{x\to4^+} f'(x) = \frac{3\pi}{6^2} = \frac{\pi}{12}.$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to4} f'(x) = \frac{\pi}{12}$ e f è derivabile anche in $x = 4$ con $f'(4) = \frac{\pi}{12}$. Pertanto f è derivabile su $\mathbb{R}$.

c) Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che, poiché f è derivabile in $x = 4$, la retta $y = f_1(x)$ è tangente al grafico dell'iperbole $y = f_2(x)$ nel punto $x = 4$ in cui si congiungono i due grafici.



d) La funzione h è composta di $y = \sin t$ e di $t = f(x)$, funzioni ambedue definite su $\mathbb{R}$. Dunque, $\operatorname{dom} h = \mathbb{R}$. L'immagine di f è $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{\pi}{2})$. Dunque $h(\mathbb{R}) = \sin(f(\mathbb{R})) = \sin\left((-\infty, \frac{\pi}{2})\right) = [-1, 1]$. Quindi $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$.

e) Da $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$, deduciamo che $\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) = -1$ e che $\max_{x \in \mathbb{R}} h(x) = 1$ e quindi h ammette massimo e minimo assoluti.

Esercizio 2.

a) **Teorema (di Lagrange o del valor medio).** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che:

a) f sia continua in $[a, b]$;

b) f sia derivabile in (a, b).

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Un esempio di funzione che NON soddisfa la TESI del teorema di Lagrange è una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in (a, b) : \qquad f'(x) \neq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esempio 1: $f(x) = |x|$ su $[-1, 1]$.

In questo caso f è continua in $[-1, 1]$, è derivabile in ogni $x \in (-1, 1)$ con $x \neq 0$ e non è derivabile in $x = 0$, e risulta che

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0,$$

mentre $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$.

Esempio 2: $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$

In questo caso f non è continua in $x = 2$, è derivabile in $(2, 3)$ e

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -1,$$

mentre $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (2, 3)$.

b) Poiché f è derivabile su $\mathbb{R}$, applichiamo il Teorema di Lagrange ad f ristretta ad un qualunque intervallo $[0, x]$, con $x > 0$. Ne segue che esiste $c(x) \in (0, x)$ tale che

$$\forall x > 0 : \qquad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)) < -3.$$

Dunque $f(x) < f(0) - 3x$. Per il Teorema del confronto sui limiti, poiché $\lim_{x\to+\infty}(f(0) - 3x) = -\infty$, anche $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3 Esame del 14 febbraio 2017 - I^o turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}.$$

a) Determinarne il dominio, gli zeri, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.

b) Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.

c) Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di f, specificando se sono relativi o assoluti.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

e) Verificare che la restrizione di f all'intervallo $[0, 2]$ è invertibile e, sapendo che $f(1) = \sqrt{2}$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di ascissa $\sqrt{2}$.

Esercizio 2.

a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = 2x.$$

b) Sia y una funzione che risolve, in un intorno di $x_0 = 1$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3e^{xy} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Senza calcolare esplicitamente tale soluzione, determinare l'equazione della retta tangente al grafico di y nel punto di coordinate $(1, 2)$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) L'argomento della radice è non negativo per $x \leq 3$, da cui $\operatorname{dom} f = (-\infty, 3]$.

Inoltre, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \operatorname{dom} f \quad$ e $\quad f(x) = 0 \iff x = 0$ o $x = 3$.

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 0.$$

Si noti che, essendo $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, la funzione non ammette asintoto obliquo sinistro. Inoltre, la funzione è continua perché composizione di funzioni continue, quindi non ammette asintoti verticali.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{3x(2-x)}{2\sqrt{3x^2 - x^3}} = \frac{3x(2-x)}{2|x|\sqrt{3-x}} \qquad \forall\, x \in \operatorname{dom} f, \;\; x \neq 0, 3.$$

Osservando che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -3/\sqrt{3}, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 3/\sqrt{3}, \qquad \lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\infty,$$

si conclude che $x = 0$ è l'unico punto di non derivabilità di f.

Il punto $x = 3$ non è un punto interno al dominio di f e quindi non ha senso chiedersi se esiste la derivata di f in questo punto. Poiché f è continua in $(-\infty, 3]$, ha però senso chiedersi se esiste la derivata sinistra di f in $x = 3$. Essendo

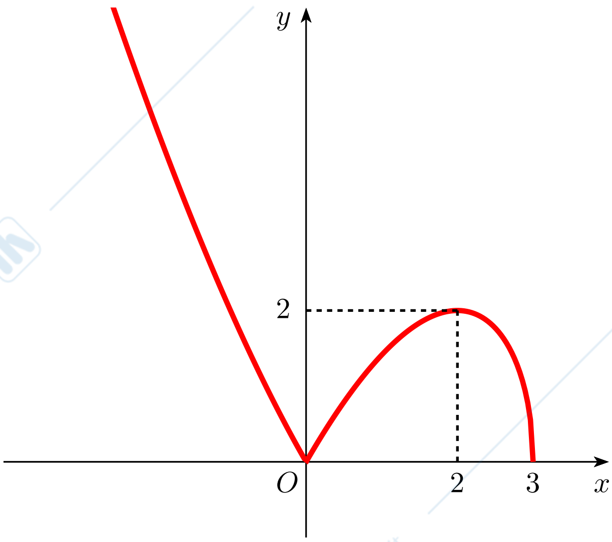
$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\infty,$$

per il *Teorema del tappabuchi* f non ha derivata sinistra in $x = 3$.

c) Si ha $f'(x) > 0 \quad \iff \quad x(2-x) > 0 \quad \iff \quad 0 < x < 2$.

Da cui, f è decrescente strettamente in $(-\infty, 0]$ e in $[2, 3]$, crescente strettamente in $[0, 2]$. In particolare, $x = 2$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo. Infine, dai punti precedenti la funzione è inferiormente limitata con $\inf f = 0$ e superiormente illimitata, ne concludiamo che f non ammette punti di massimo assoluto mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Per quanto detto sopra f è crescente strettamente in $[0, 2]$ e dunque invertibile in tale intervallo. La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa $\sqrt{2}$ ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Poiché $f(x) = \sqrt{2}$ per $x \in [0, 2]$ se e solo se $x = 1$, si ha che $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right) = 1$ e di conseguenza

$$y = 1 + \frac{1}{f'(1)}(x - \sqrt{2}) \implies y = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}(x - \sqrt{2}).$$

Esercizio 2.

a) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha soluzioni immaginarie pure $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y'' + 4y = 0$ è

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La forzante dell'equazione completa è del tipo $f(x) = e^{0x} p_1(x)$, con $p_1(x) = 2x$ (polinomio di grado 1). Siccome $\lambda = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma $y_p(x) = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (generico polinomio di grado 1).

Imponendo che y_p sia soluzione dell'equazione, si ha $y_p'(x) = a$, $y_p''(x) = 0$ e $4(ax+b) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $a = 1/2$ e $b = 0$. In definitiva, l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{2}\,x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) L'equazione della retta tangente è $y = y(1) + y'(1)(x - 1)$. Dal problema di Cauchy, sfruttando il dato iniziale, si ricava che $y'(1) = 3e^{1 \cdot y(1)} = 3e^2$. Quindi l'equazione della retta richiesta è

$$y = 2 + 3e^2(x - 1).$$

---

4 Esame del 14 febbraio 2017 - II^o turno

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{2x} \cdot |x-1|^{1/3}.$$

a) Determinarne il dominio, gli zeri e i limiti agli estremi del dominio.

b) Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.

c) Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di f, specificando se sono relativi o assoluti.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

e) Verificare che esiste un intorno di $x = 0$ in cui f è invertibile e, sapendo che $f(0) = 1$, determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa, nel punto di ascissa 1.

Esercizio 2.

a) Determinare e rappresentare graficamente tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z-i)^3 + 27 = 0.$$

b) Rappresentare graficamente, nel piano complesso, gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2,\ 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}, \quad B = \{z^2 : z \in A\}.$$

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è prodotto di funzioni elementari definite su tutto $\mathbb{R}$ da cui $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

Inoltre, $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Poiché f è un infinto di ordine superiore a x per $x \to +\infty$, f non ammette asintoto obliquo destro.

b) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}(x-1)^{1/3} & \text{se } x \geq 1 \\ e^{2x}(1-x)^{1/3} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Quindi f è derivabile in tutti i punti $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, in quanto composizione di funzioni derivabili. Pertanto, l'unico punto dove f potrebbe non essere derivabile è $x = 1$. Si ha:

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{e^{2x}(x-1)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{e^{2x}}{(x-1)^{2/3}} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{e^{2x}(1-x)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{-e^{2x}}{(1-x)^{2/3}} = -\infty.$$

Dunque $x = 1$ è un punto di non derivabilità e più precisamente è un punto di cuspide.

c) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}}{3(x-1)^{2/3}}(6x-5) & \text{se } x \in (1,+\infty) \\[2ex] \dfrac{e^{2x}}{3(1-x)^{2/3}}(5-6x) & \text{se } x \in (-\infty,1). \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 1$, un altro modo per verificare se $x = 1$ è un punto di non derivabilità, è quello di ricorrere al *Teorema del tappabuchi*, calcolando

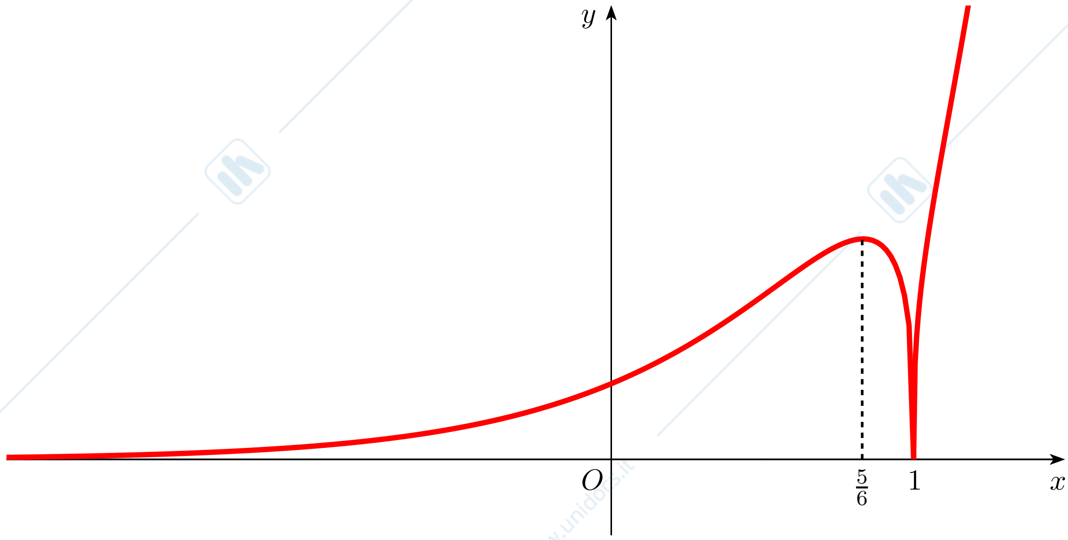
$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = +\infty.$$

Si ha che

$$f'(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty, 5/6) \cup (1,+\infty).$$

Dunque f è crescente strettamente in $(-\infty, \frac{5}{6}]$ e in $[1,+\infty)$, mentre f è decrescente strettamente in $[\frac{5}{6}, 1]$. In particolare, $x = \dfrac{5}{6}$ è un punto di massimo relativo mentre $x = 1$ è un punto di minimo relativo. Infine, poiché $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta che la funzione f è inferiormente limitata con $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f = 0$; poiché $f(1) = 0$, $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Inoltre, sappiamo dal punto *a*) che è superiormente illimitata; concludiamo allora che f non ammette punti di massimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Per quanto detto sopra, f è crescente strettamente in $(-\infty, 5/6]$ e dunque invertibile in tale intervallo. Poiché $x = 0$ è interno a tale intervallo, esistono intorni di $x = 0$ in cui f è invertibile (ad esempio, l'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$). La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1).$$

Poiché $f^{-1}(1) = 0$ e $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{3}{5}$, la retta tangente ha equazione $y = \dfrac{3}{5}(x-1)$.

Esercizio 2.

a) Posto $w = z - i$ si ha che

$$(z-i)^3 + 27 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z-i)^3 = -27 \quad \Longleftrightarrow \quad w^3 = -27.$$

Le radici cubiche di $-27 = 27 \cdot e^{i\pi}$ sono date da

$$w_k = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)} = 3 \cdot e^{i(\pi/3+2k\pi/3)}, \qquad k = 0, 1, 2.$$

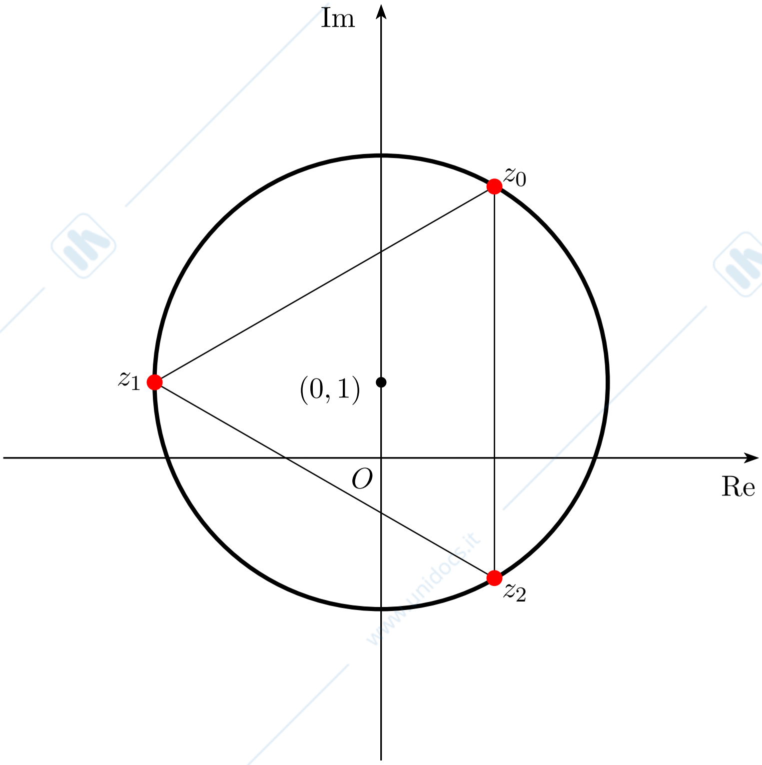
Dunque sono

$$w_0 = 3e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad w_1 = 3e^{i\pi} = -3, \quad w_2 = 3e^{i5\pi/3} = \frac{3}{2} - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $(z-i)^3 + 27 = 0$ sono i tre numeri $z_k = w_k + i$, con $k = 0, 1, 2$, cioè

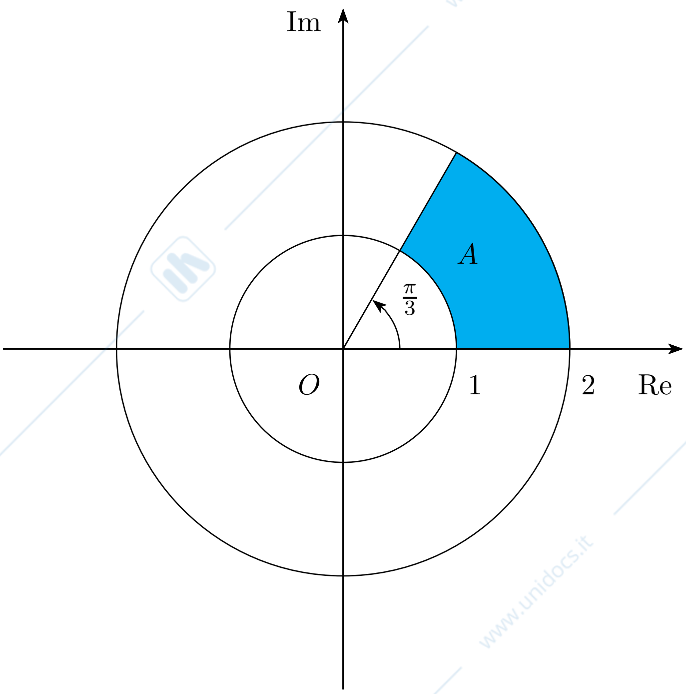
$$z_0 = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad z_1 = -3 + i, \quad z_2 = \frac{3}{2} + i\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Essi sono rappresentati nel piano di Gauss dai tre punti della circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 3 qui disegnati:



b) Posto $z = x + iy$, si ha $1 \le |z| \le 2 \iff 1 \le x^2 + y^2 \le 4$; dunque nel piano di Gauss soddisfano questa disequazione i punti della corona circolare compresa tra le due circonferenze di raggi 1 e 2.

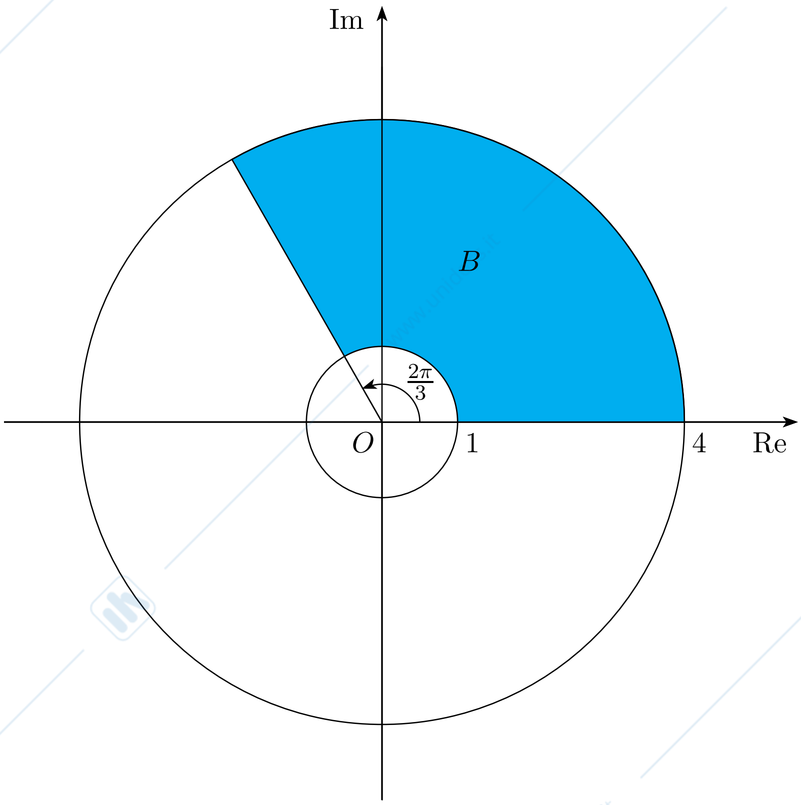
I numeri complessi z per cui $0 \le \arg(z) \le \frac{\pi}{3}$ sono i punti dell'angolo compreso tra la semiretta dell'asse reale positivo e la semiretta che forma con esso un angolo di $\frac{\pi}{3}$. Dunque l'insieme A è rappresentato dai punti del disegno sottostante:



Per capire chi è B, scriviamo i punti di A in forma polare: posto $z = \rho e^{i\theta}$, si ha:

$$z \in A \iff 1 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Poiché $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$, si ha $w \in B \iff 1 \leq |w| \leq 4,\ 0 \leq \arg(w) \leq \dfrac{2\pi}{3}$.
Dunque l'insieme B è rappresentato dai punti del disegno sottostante:



5 Esame del 3 luglio 2017

Esercizio 1. Si consideri la funzione:

$$f(x) = (x+1) \cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}}.$$

a) Determinarne il dominio, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.

b) Studiarne la derivabilità in ogni punto del dominio e calcolarne la derivata.

c) Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

e) Stabilire se esiste un'estensione continua di f sull'intervallo $[-3, 1]$.

Esercizio 2.

a) Enunciare il teorema della media integrale per le funzioni continue.

b) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare la media integrale della funzione sugli intervalli $[-1, 1]$ e $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, e dire se la media integrale è anche uno dei valori che la funzione assume in tali intervalli.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) Il denominatore dell'esponenziale si annulla per $x = -3$ e $x = 1$, da cui segue che

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3\,,1\}\,.$$

Inoltre, $f(x) = g(x+1)$ con $g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{|x|-2}}$ che è una funzione dispari. Ne segue che il grafico di f è simmetrico rispetto al punto $(-1,0)$. Inoltre

$$f(x) > 0 \iff x > -1 \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \iff x = -1.$$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-3^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi, $x = -3$ è asintoto verticale sinistro, mentre $x = 1$ è asintoto verticale destro.

Poiché $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha che per $x \to \pm\infty$

$$f(x) = (x+1)\cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}} = (x+1)\cdot\left[1 + \frac{1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{1}{|x+1|-2}\right)\right] =$$

$$= x + 1 + \frac{x+1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{x+1}{|x+1|-2}\right) =$$

essendo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x+1|-2} = 1$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x+1|-2} = -1$ si ottiene

$$= \begin{cases} x + 2 + o(1) & x \to +\infty \\ x + o(1) & x \to -\infty. \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette l'asintoto obliquo destro $y = x + 2$ e l'asintoto obliquo sinistro $y = x$.

b) Si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{(x-1)^2}\, e^{\frac{1}{x-1}} & x > -1\,,\, x \neq 1 \\[2ex] \dfrac{(x+5)(x+2)}{(x+3)^2}\, e^{-\frac{1}{x+3}} & x < -1\,,\, x \neq -3. \end{cases}$$

Essendo f continua in tutto il suo dominio e

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} f'(x) = e^{-\frac{1}{2}},$$

si conclude che f è derivabile anche in $x = -1$ con $f'(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$. Quindi f è derivabile in tutto il suo dominio.

c) Per $x > -1$ si ha

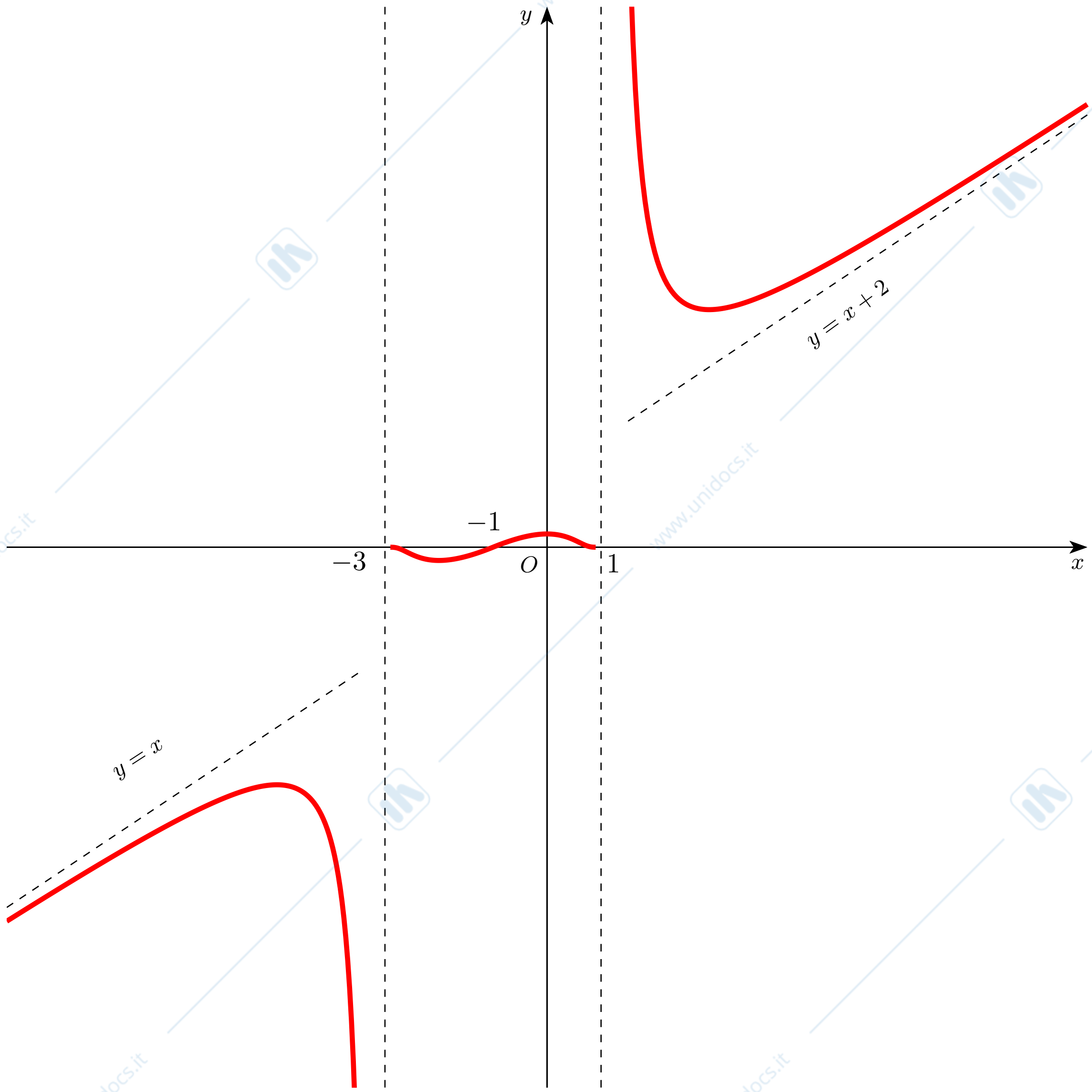
$$f'(x) \geq 0 \iff -1 < x \leq 0 \vee x \geq 3$$

e per $x \leq -1$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -5 \vee -2 \leq x \leq -1.$$

Ne segue che f è decrescente strettamente in $[-5, -3)$, $(-3, -2]$, $[0, 1)$ e in $(1, 3]$; è crescente strettamente in $(-\infty, -5]$, $[-2, 0]$ e in $[3, +\infty)$. In particolare, $x = -5$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo mentre $x = -2$ e $x = 3$ sono punti di minimo relativo. Infine, per quanto osservato precedentemente la funzione è superiormente e inferiormente illimitata, quindi non ammette punti di massimo o minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Ricordando che $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$ possiamo concludere che la funzione ammette un'estensione continua $\widetilde{f}$ sull'intervallo $[-3,1]$ definita nel modo seguente:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-3,1) \\ \\ 0 & x = -3, 1. \end{cases}$$

Esercizio 2.

a) **Teorema (della media integrale per le funzioni continue)**

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = m(f;a,b)$, dove $m(f;a,b)$ è la media integrale di f sull'intervallo $[a,b]$ definita da

$$m(f;a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) La media integrale della funzione nell'intervallo $[-1,1]$ è

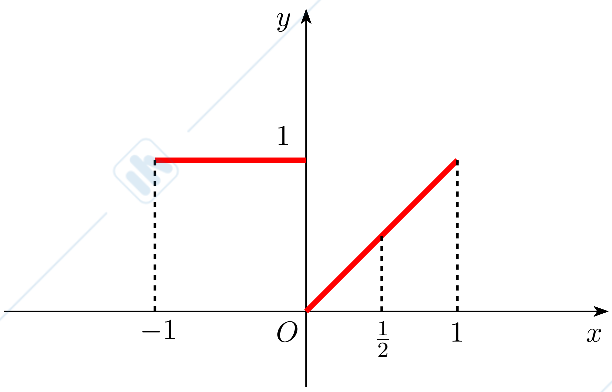
$$m(f;-1,1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4} \in [-1,1]$, possiamo concludere che la media integrale di f su $[-1,1]$ è uno dei valori che la funzione assume su questo intervallo.

La media integrale della funzione nell'intervallo $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ è

$$m\left(f;-1,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx\right) = \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché $f(x) = 1$ per ogni $x \in [-1,0]$ e $0 \le f(x) \le \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, possiamo concludere che non esiste alcun punto $x \in \left[-1,\frac{1}{2}\right]$ in cui f assume il valore della sua media integrale su questo intervallo.



---

6 Esame del 19 settembre 2017

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16}.$$

(a) Identificare il dominio di $f(x)$, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Sia $g(x) = \dfrac{|x|^n}{x^2 - 16}$ con n intero. Dire per quali valori di $n \in \mathbb{Z}$ la funzione $g(x)$ è derivabile in $x = 0$.

Esercizio 2. (5 punti)

(a) Supponiamo che una funzione prenda valori di segno opposto in due punti a e b. Indicare condizioni sotto le quali il valore 0 appartiene all'immagine della funzione.

(b) Si consideri la funzione

$$g(x) = \mathrm{sgn}((x-1)(x+3)), \qquad \text{dove} \qquad \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dire se la funzione g si annulla sull'intervallo $[0, 4]$ e dire se, in tale intervallo, essa soddisfa le condizioni date al punto (a).

---

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) dom $f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$.

Osserviamo che $f(-x) = f(x)$, quindi f è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Inoltre:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se} \ \ x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \\ f(0) = 0 & \\ f(x) < 0 & \text{se} \ \ x \in (-4, 0) \cup (0, 4). \end{cases}$$

Dunque:

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -4^-} f(x) = +\infty.$$

Ne segue che le rette $x = 4$ e $x = -4$ sono asintoti verticali di f.

Inoltre $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Osserviamo inoltre che:

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 16) + 16x}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16} = x + o(1) \qquad \text{per} \ \ x \to +\infty$$

$$f(x) = \frac{-x(x^2 - 16) - 16x}{x^2 - 16} = -x - \frac{16x}{x^2 - 16} = -x + o(1) \quad \text{per} \ \ x \to -\infty.$$

Ne segue che la retta $y = x$ è l'asintoto obliquo destro di f, mentre la retta $y = -x$ è l'asintoto obliquo sinistro di f.

b) f è certamente derivabile su dom $f \setminus \{0\}$, perché è composizione di funzioni derivabili. In $x = 0$ invece è necessario valutare separatamente l'esistenza della derivata di f. Poiché

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16} = \text{sgn}\,(x) \cdot \frac{x^3}{x^2 - 16},$$

possiamo limitarci a calcolare la derivata per $x > 0$. Otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x > 0, \, x \neq 4 \\[2ex] -\dfrac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x < 0, \, x \neq -4. \end{cases}$$

f è continua in $x = 0$, e $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$. Dunque, per il teorema " del tappabuchi", f è derivabile anche in $x = 0$, con $f'(0) = 0$.

Ne segue che f è derivabile su tutto il suo dominio e non ha punti di non derivabilità.

c) Dal calcolo precedente, abbiamo che $x = 0$ e $x = \pm 4\sqrt{3}$ sono gli unici punti critici di f.

Inoltre:

- $f'(x) < 0$ se e solo se $x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (0, 4) \cup (4, 4\sqrt{3})$.
- $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-4\sqrt{3}, -4) \cup (-4, 0) \cup (4\sqrt{3}, +\infty)$.

Dai corollari del Teorema di Lagrange segue che:

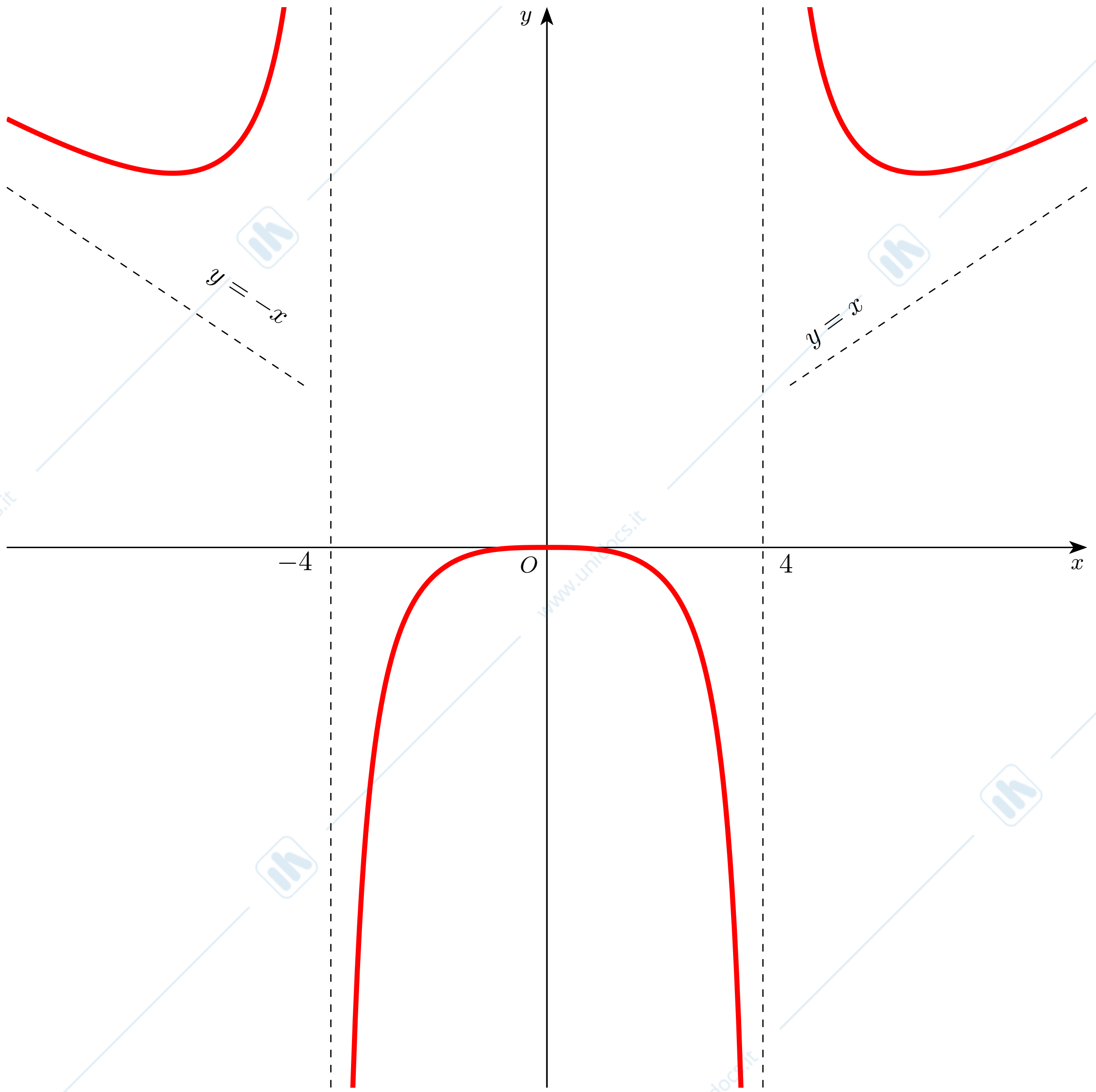
- f è strettamente decrescente su $(-\infty, -4\sqrt{3}]$, su $[0, 4)$ e su $(4, 4\sqrt{3}]$.
- f è strettamente crescente su $[-4\sqrt{3}, -4)$, su $(-4, 0]$ e su $[4\sqrt{3}, +\infty)$.

Inoltre

- $x = 0$ è l'unico punto di massimo (locale) di f.
- $x = 4\sqrt{3}$ e $x = -4\sqrt{3}$ sono gli unici punti di minimo (locale) di f.

Poiché $f(4\sqrt{3}) = f(-4\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 4\sqrt{3}$, il grafico di f non attraversa gli asintoti obliqui.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Per rispondere alla domanda, bisogna considerare separatamente vari casi.

- Per $n < 0$, $g(x) = \dfrac{|x|^n}{x^2-16}$ non è definita in $x = 0$. Pertanto g non è certamente derivabile in $x = 0$ se $n < 0$.
- Per $n = 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x^2-16}$ è definita e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$; in particolare è derivabile in $x = 0$.
- Per $n = 1$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2-16}$. In questo caso

  $$g'(x) = -\mathrm{sgnx}\frac{x^2+16}{(x^2-16)^2}, \qquad \text{per} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 4\}.$$

  g è continua in $x = 0$, mentre

  $$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = -\frac{1}{16} \neq \lim_{x\to 0^-} g'(x) = \frac{1}{16}.$$

  Ne segue che g non è derivabile in $x = 0$, che risulta essere un punto angoloso di g.

- Per $n \geq 2$, abbiamo che

$$g'(x) = \text{sgn } x \cdot \frac{|x|^{n-1}(nx^2 - 16n - 2x^2)}{(x^2-16)^2}.$$

Anche in questo caso g è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x \to 0} g'(x) = 0.$$

Dunque g è derivabile in $x = 0$, con $g'(0) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

Esercizio 2.

a) Possiamo imporre la condizione che la funzione sia continua in $[a, b]$. Questa condizione, unita all'ipotesi che la funzione prenda valori di segno opposto in a e in b garantisce, per il Teorema degli zeri, che la funzione abbia almeno uno zero in $[a, b]$.

b) La funzione assegnata risulta essere uguale a:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \; x < -3 \\ 0 & \text{se } \; x = -3 \\ -1 & \text{se } \; -3 < x < 1 \\ 0 & \text{se } \; x = 1 \\ 1 & \text{se } \; x > 1. \end{cases}$$

Dunque la funzione è discontinua nell'intervallo $[0, 4]$, $g(0) = -1 < 0$, $g(4) = 1 > 0$ e ha uno zero in $x = 1$. Pertanto non soddisfa le condizioni del punto precedente.

Osserviamo che questo fatto non è sorprendente: il Teorema degli zeri fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria all'esistenza degli zeri. Dunque esistono funzioni, come la g assegnata in questo esercizio, che sono discontinue, hanno valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo e che hanno degli zeri. Proponiamo un altro esempio, in cui f è ovunque discontinua e ha infiniti zeri.

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } \; x \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } \; x \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } \; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In questo caso h è ovunque discontinua, $h(-1) = -1 < 0$ e $h(1) = 1 > 0$. I punti irrazionali di $[-1, 1]$ sono gli zeri (infiniti) di h.
