BOLZANO / VALORI INTERM.

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Siano $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) < f(x_2)$.

Allora $\forall y_0 \in [f(x_1), f(x_2)]\ \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = y_0$

DIM Sia $y_0 \in [f(x_1), f(x_2)]$. La tesi è immediata se $y_0 = f(x_1)$ o $y_0 = f(x_2)$

Sia allora $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$

Considero funzione ausiliare:

$$\underline{g(x)} = f(x) - y_0$$

$\downarrow$

continua in $[x_1, x_2]$

Inoltre
$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0$$

Applichiamo il Teorema zeri a g

Determiniamo $x_0 \in (x_1, x_2)$: $g(x_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = y_0$

COROLLARIO: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.

$\forall y_0 \in [\min f(x), \max f(x)]\ \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = y_0$

Siano $f, g: X \to \mathbb{R}$ infinitesime in x_0

- $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l \in]0, +\infty[$ $\quad l > 0$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ $\quad f(x) = o(g(x))$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$

- $o(x) \mp o(x) = o(x)$
- $a \cdot o(x) = o(x)$
- $o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$
- $\frac{o(x)}{o(x)}$ NON POSS. DIRE NULLA

FORMULA DI TAYLOR

(caso con centro $x_0 = 0$)

Sia $f(x)$ una funzione. Sia $n \in \mathbb{N}$. Esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che
$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Quindi possiamo porre $f(x) = P_n(x)$ commettendo un errore di approssimaz., rappr. da $o(x^n)$

$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ TAYLOR CON RESTO DI PEANO

DIM. Abbiamo bisogno di un lemma:

sia $\varphi(x)$ una funzione che si annulla in 0 con tutte le sue derivate

$$[\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0]$$

Allora $\varphi(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$

DIM per $n=3$ Hp. $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$

Th. $\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^3} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(0)}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H.} \lim_{x\to 0} \frac{\varphi'(0)}{2\cdot 0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L.H.}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi''(0)}{6\cdot 0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'H.} \frac{\varphi'''(0)}{6} = \frac{0}{6} = 0 \quad ✓$$

$\Rightarrow$ Dim. Taylor per $n=3$

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$f(x) = P_3(x) + o(x^3) \iff f(x) - P_3(x) = o(x^3) = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow f(x) - P_n(x) = \varphi(x)$$

$$f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1}x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \varphi(x)$$

$\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) = 0$

$\Rightarrow$ Verificato

$$f(x) = P_n(x) - o(x^n) \quad \text{con } P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}\cdot(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Applicabile se:
- f è derivabile $n-1$ nell'intervallo
- f è deriv. n volte in x_0

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

DEF. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$

SERIE MENGOLI: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} S_n = 1$

SERIE GEOM.: $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \longrightarrow a = 1$ diverge positiv.

$\searrow a \neq 1 \to a > 1$ diverg. pos.

$-1 < a < 1$ converge a $\frac{1}{1-a}$

$a = -1$ indet. (= oscilla)

$a < -1$ non $\exists$ lim (= oscilla)

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda \cdot a_n = \lambda A$

CAUCHY

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu : \forall n > \nu, \forall k \in \mathbb{N}\ |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$

CONDIZIONE NEC.

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è converg., allora $a_n \to 0$

- GEOM. $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ → $a \geq 1$ diverg. posit.
  → $-1 < a < 1$ conv. a $\frac{1}{1-a}$
  → $a \leq -1$ oscilla

- ARMONICA $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente

(monot. sia infinit. => DIM. che la condizione necessaria non vale per il viceversa)

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

Ricordiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \iff \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

$\log(1+1) < 1, \dots, \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

Sommo $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

per Teorema Confronto $+\infty = \log(n+1) \leq \lim_{n \to +\infty} S_n$

- ARMONICA GENERAL. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ → $a > 1$ converg.
  → $a \leq 1$ diverge posit.

Serie a termini non negativi

Sia $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice a termini non neg.

PROP. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini non neg.

Allora è regolare, cioé: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty \\ l \end{cases}$

CRITERIO CONFRONTO

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ con $a_n \leq b_n$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}$ conv.
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge posit. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge posit.

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in]0, +\infty[$, allora le due serie hanno lo stesso carattere

CRITERIO INFINITESIMI

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Se $\exists \, \alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha} \cdot a_n = L \in]0, +\infty[$,

allora:

- $\alpha > 1$ conv.
- $\alpha \leq 1$ diverge pos.

CRITERIO RADICE

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, allora

- $a < 1$ converge
- $a > 1$ diverge pos.

DIM. $a<1$

Sia $a<1$. Fissato $\varepsilon > 0$: $h = a + \varepsilon < 1$, per def. di limite:

$$\exists \nu > 0 : \sqrt[n]{a_n} < h \text{ per } n > \nu \iff a_n < h^n \text{ per } n > \nu$$

Pertanto la serie risulta maggior. da $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} h^n}_{\text{converge}}$ => per criterio confronto converge

DIM $a>1$

Sia $a>1$. $\varepsilon > 0$: $h = a + \varepsilon > 1$, per def

$$\exists \nu > 0 : \sqrt[n]{a_n} > h \text{ per } n > \nu \iff a_n > h^n \text{ per } n > \nu$$

Pert. la serie risulta minorata da $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} h^n}_{\text{div. pos.}}$ => div. pos.

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, allora

- $a > 1$ diverg. pos.
- $a < 1$ conv.

Serie a segni alterni

Sia $a_n \geq 0$. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ si dice a segni alterni

CRITERIO DI LEIBNITZ

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot a_n$. Se a_n è non negativa, decrescente e infinit., la serie converge

Inoltre

$$S_{2n} \leq S_{2n+2} \qquad S_{2n-1} \geq S_{2n+1}$$

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

SERIE ASSOL. CONV.

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è "ass. conv." se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è conv.

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è ass. conv., essa è anche converg.

(no viceversa)

CRITERIO DIRICHLET

Due succ. a_n e b_n, tali che

- $\exists M > 0 : \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- b_n è a termini positivi, cresc. e tend. a 0.

$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots > b_n \qquad \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$$

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ convergente se f non è continua in x_0, è discontinua

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- disc. eliminabile : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
- 1^a specie : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

"salto" $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$

- 2^a specie : se uno dei due limiti, destro e sinistro, non esiste o è infinito

---

Sia f derivabile in x_0. Allora essa è continua in x_0 (non vale il viceversa)

DIM Hp. $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Th. $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$

Prendo $\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = \lim \ldots h \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{esiste ed è finito per Hp. lo considero come "k"}} + f(x_0)$

$\lim_{h \to 0} h \cdot k + f(x_0) = 0 \cdot k + f(x_0) = f(x_0)$ ✓

FUNZ. DERIVABILE

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Sia $x\in(a,b)$.

Considero $\delta>0$, $h\in(-\delta,\delta)$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ rapporto incr.

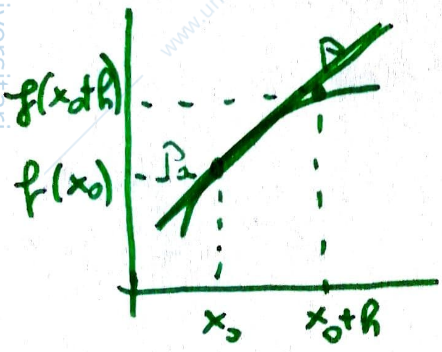
Una funz. si dice deriv. se $\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- $(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. e strett. monotona

Sia f derivabile in (a,b), allora f^{-1} è derivabile.

$y=f(x)$, $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$



$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$

per $h\to 0$

$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{\text{coefficiente della retta tang.}}\cdot(x-x_0)$

TEOR. WEIERSTRASS

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Allora essa è dotata di max. e min.

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] : f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) \quad \forall x \in [a,b]$$

TEOREMA DEGLI ZERI

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$. Sia $f(a)\cdot f(b)<0$.
Allora $\exists c \in [a,b] : f(c)=0$

DIM. Considero $c = \frac{a+b}{2}$.

- se $f(c)=0$ ✓
- se $f(c)\neq 0$, consideriamo l'interv. $[a_1,b_1]$:

$$[a_1,b_1] = \begin{cases} a, c & \text{se } f(c)>0 \\ c, b & \text{se } f(c)<0 \end{cases} \qquad a \le a_1 < b_1 \le b$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad f(a_1)<0, \ f(b_1)>0$$

Considero $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

- se $f(c_1)=0$ ✓
- se $f(c_1)\neq 0$, consid. $[a_2,b_2] = \begin{cases} a_1, c_1 & \text{se } f(c_1)>0 \\ c_1, b_1 & \text{se } f(c_1)<0 \end{cases}$

$$a \le a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1 \le b \qquad b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2} \qquad f(a_2)<0, \ f(b_2)>0$$

⋮

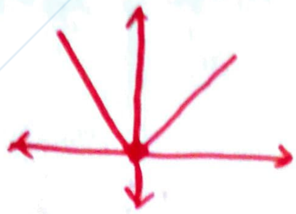
$$\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \qquad f(a_{n+1})<0 \quad f(b_{n+1})>0}$$ RELAZ.

La succ. a_n è limitata $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0 \in [a,b]$
Inoltre, dato che continua in $[a,b]$, consid. Teorema perm. segno, il Teorema ponte e la relazione sopra,
$\lim_{n\to+\infty} a_n = f(x_0) \le 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = f(x_0) \ge 0$ $\Rightarrow f(x_0)=0$ ✓

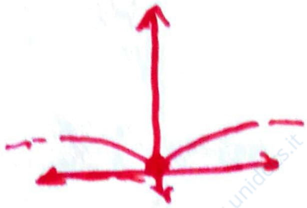
PUNTI DI NON DERIV.

Sia f continua nel punto x_0, ma non derivab.

- PUNTO ANGOLOSO: $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0) : f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$



- CUSPIDE: $\exists f'_+(x_0), f'_-(x_0)$: distinte e infinite



- FLESSO A TANG. VERTICALE: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = \pm\infty$

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

- x_0 è un punto di max. relativo di f se $\exists I \in \mathcal{U}(x_0) : f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in [a,b] \cap I$
- x_0 è un punto di min. relativo di f se $\exists I \in \mathcal{U}(x_0) : f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \cap I$

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Sia x_0 un punto di min. o max. relativo. Allora $f'(x_0) = 0$.

DIM. Considero x_0 come min. rel.: $\exists I \in \mathcal{U}(x_0) : f(x_0) \leq f(x) \ \forall x \in [a,b] \cap I$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} \geq 0 & \text{per } h > 0 \\ \leq 0 & \text{per } h < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Corollario Teorema perm. segno:

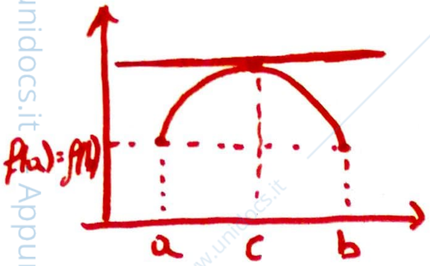
$\lim_{h \to 0^+} \ldots \geq 0$, $\lim_{h \to 0^-} \ldots \leq 0$. $\lim_{h \to 0^+} \ldots = \lim_{h \to 0^-} \ldots = f'(x) = 0$

ESTREMI ASSOLUTI → vanno cercati tra quelli relativi:

- $x_0 \in (a,b)$ e $f'(x_0)=0$
- $x_0 \in (a,b)$ e f non derivabile
- $x_0 = a$, $x_0 = b$

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
Sia $f(a)=f(b)$. Allora $\exists c \in (a,b) : f'(c)=0$



DIM. Per Weistr. $\exists x_1, x_2 : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

- $x_1, x_2 \in (a,b)$, allora la tesi è dim. per Fermat
- x_1, x_2 non appartengono ad (a,b), allora $x_1 = a$ e $x_2 = b$
  $\Rightarrow$ la funzione è costante
  $\Rightarrow f'(x)=0 \ \forall x \in [a,b]$

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).
$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

DIM. Si applica Rolle alla funz. $g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$

- $g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{0} = 0$
- $g(b) = \cancel{f(b)-f(a)} - \cancel{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}\cancel{(b-a)} = 0$

$\exists c \in (a,b) : f'(c)=0 \Rightarrow g(c) = f(c) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)\right]$

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Per Rolle $g'(c)=0 \Rightarrow 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

TEOREMA DI CAUCHY

Siano f e g due funz. continue e derivabili in (a,b). Se $g(a) \neq g(b)$ e f' e g' non sono entrambe nulle in un punto di (a,b), allora:

$$\exists\, c \in (a,b) : g'(c) \neq 0 \quad e \quad \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

CRITERIO DI MONOTONIA

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) allora:

- $f'(x) \geq 0 \iff f$ crescente in $[a,b]$
- $f'(x) \leq 0 \iff f$ decrescente in $[a,b]$

DIM. $\Rightarrow$ Hp. $f'(x) \geq 0$

Th. f crescente in $[a,b]$

$a \leq x_1 < x_2 \leq b$

Considero $[x_1, x_2] \subseteq [a,b]$. Esso è continuo e derivabile per Hp. $\Rightarrow$ Lagrange:

$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$:
$$f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

So per Hp. che $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{f'(x_0)\cdot(x_2-x_1)}_{= f(x_2)-f(x_1)} \geq 0$

$= f(x_2)-f(x_1) \overset{(\Rightarrow)}{\geq} 0 \Rightarrow$

$f(x_2) \geq f(x_1)$ ✓

DIM $\Leftarrow$ Hp. f crescente Th. $f'(x) \geq 0$

La deriv. è $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$\forall x \in (a,b)$ e $\boxed{h>0}$, $(x+h) \in (a,b)$ e $f(x+h) \geq f(x)$

$$\begin{cases} N \geq 0 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

CARATTERIZZ. FUNZ. COSTANTE

- f è costante in $[a,b] \Leftrightarrow f$ derivabile in $[a,b]$ e $f'(x)=0 \ \forall x \in [a,b]$

DIM $\Rightarrow$ dimost. per def.

DIM $\Leftarrow$ Si applica il criterio di monotonia
la funzione risulta contemp. crescente e decresc.
$\Rightarrow$ è costante

DE L'HOPITAL

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R}$ $[\text{con } X=(a,x_0) \text{ o } (x_0,b)]$

Se f e g sono derivabili e

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

oppure

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$

allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

- f convessa in $[a,b] \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x \in [a,b], \forall x_0 \in (a,b)$

- f concava in $[a,b] \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ $\forall x \in [a,b], \forall x_0 \in (a,b)$

CRITERI. ① Sono equivalenti: f convessa in $[a,b]$
$f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$
$f'(x)$ crescente in $[a,b]$

② Sono equiv. : f concava in $[a,b]$
$f''(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$
$f'(x)$ decrescente in $[a,b]$

DEF. Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che $F(x)$ è una primitiva di f se $F'(x) = f(x)$

È facile verificare che anche $F(x)+c$ è sempre una primitiva $(c \in \mathbb{R})$

Risulta che se F_1 e F_2 sono primitive di f,

$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow 0 = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x)$

$\Leftrightarrow (F_1 - F_2)'(x) = 0 \Rightarrow (F_1 - F_2)(x) = \text{cost.}$

cioè $F_1(x) = F_2(x) + c$

L'insieme delle primitive di f: $\int f(x)\,dx$ INTEGRALE INDEFINITO

LINEARITÀ: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

METODI DI INTEGRAZIONE

- INTEGR. PER PARTI: Siano f e g due funzioni derivabili

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)\, g'(x)\,dx$$

f: fattore differenziale
g: fattore finito

- INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

INTEGRAZIONE FUNZ. RAZIONALI:

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ con $n < m$

- se $m = 1$: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + c, \quad c \in \mathbb{R}$

- se $m = 2$:
  - $\Delta > 0$ due soluzioni

    $\Rightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

    $\Rightarrow \frac{P_n(x)}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)} = \frac{A(x-x_2)+Ba(x-x_1)}{a(x-x_1)(x-x_2)}$

    $\Rightarrow$ uguaglio: termini di $P_n(x)$ a questi

    $\Rightarrow$ trovo A e B $\Rightarrow$ torno nell'integrale

    con $\frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{(x-x_2)}$
  - $\Delta = 0$ unica radice doppia

    si torna agli integrali quasi immediati
  - $\Delta < 0$ no radici reali

    si prova a fare calcoli algebrici

INTEGRALE DEFINITO

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata in $[a,b]$. (con $a<b$). Consideriamo una partizione di $[a,b]$, cioè un insieme D ordinato di $n+1$ punti:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$
$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Indichiamo con I_k il generico intervallino $[x_k, x_{k+1}]$ con estremi appartenenti a D.

Risulta $[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} I_k$

Indichiamo con $m_k = \inf f(x)$ e $M_k = \sup f(x)$

$\Rightarrow$ SOMMA INTEGRALE INFERIORE $\quad s(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$

SOMMA INTEGRALE SUPERIORE $\quad S(f,D) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$

Ovviamente $s(f,D) \leq S(f,D)$

Facendo variare la partizione D nell'intervallo $[a,b]$, possiamo considerare due insiemi A e B che contengono le somme integrali inf. e sup.

$A = \{s(f,D) : D \text{ partizione } [a,b]\}$
$B = \{S(f,D) : D \text{ partizione di } [a,b]\}$ } sono <u>separati</u>

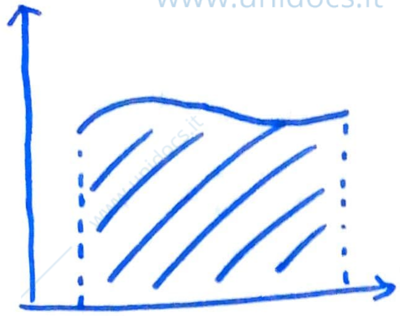
$\forall u \in A, \forall v \in B$
$u \leq v$

cioè $\quad \forall D_1, D_2$ di $[a,B]$ $\quad s(f,D_1) \leq S(f,D_2)$

Diciamo che $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann se A e B sono contigui, cioè se

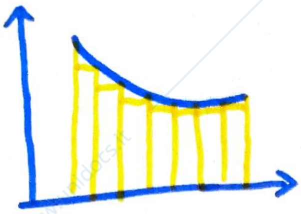
$$\sup A = \inf B = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0}$$



RETTANGOLOIDE: $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

SOMME INTEGRALI INF. E SUP. corrispondono ad una approssimazione per difetto o per eccesso dell'area del rettangoloide



$s(f,D)$

$S(f,D)$

(PLURIRETTANGOLOIDI)

Hp rettangoloide R è misurabile secondo "Peano-Jordan":
considero $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}$ contigui $\Rightarrow$ $|R|$ è l'unico elemento di separazione tra i due

$$\sup \mathcal{S} = \inf \mathcal{B} = |R|$$

Da def. precedente (Riemann): $\sup \mathcal{S} = \inf \mathcal{B} = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow |R| = \int_a^b f(x)\,dx$$

Hp rettangoloide è misurabile secondo Peano Jordan se e solo se f è integrabile secondo Riemann

PROPRIETÀ (RIEMANN):
- $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
- $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

- sia $a<c<b$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- sia $f(x) \le g(x)$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
- sia $f(x) \ge 0$, allora $\int_a^b f(x) \ge 0$
- $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN

- f continua in $[a,b]$ => integrabile
- f limitata e monotona => integrabile
- f limitata, con un numero finito di punti di discontinuità => integrabile

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia f continua in $[a,b]$. Allora esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

DIM.

f continua => Per Weierstrass è dotata di min. e max.

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$$

per la proprietà

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$m\cancel{(b-a)} \leq \frac{\int_a^b f(x)}{b-a} \leq M\cancel{(b-a)}$$

=> per il Teorema dei valori intermedi è dim.