Dimostro prima che $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx < +\infty$

$\Leftarrow$ Segue dalla proposizione 6 + $f = O(g)$

$\Rightarrow$ Segue dalla proposizione 6 + $g = O(f)$

Allo stesso modo dimostra che $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Esempi integrali impropri fondamentali

- (improprio delle potenze) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$

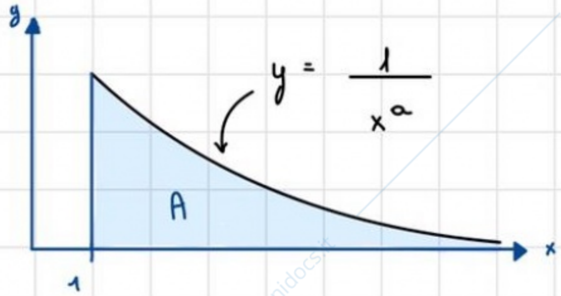
Infatti per $a \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \dfrac{+\infty - 1}{a} = +\infty & \text{se } a < 1 \\ \dfrac{0-1}{1-a} = \dfrac{1}{a-1} & \text{se } a > 1 \end{cases}$$

mentre per $a = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \left| \log x \right|_1^{+\infty} = \log(+\infty) - \log(1) = +\infty$$

In particolare A ha area finita se $a > 1$



• (Improprio in zero) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$

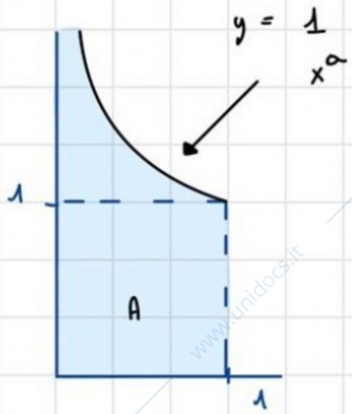
Infatti per $a \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a}\,dx = \left| \frac{x^{1-a}}{1-a} \right|_{0^+}^{1} = \begin{cases} \frac{1-(+\infty)}{1-a} = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \frac{1-0}{1-a} = \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1 \end{cases}$$

mentre per $a = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \left| \log x \right|_{0^+}^{1} = \log(1) - \log(0^+) = +\infty$$

In particolare l'area di A



Esercizi: determinare il comportamento (non il valore) dei seguenti integrali impropri

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^4 + x^2}\,dx$ verifica: $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + x^4}$ è definita e continua su $(0, 2]$;

l'integrale è improprio in 0

per $x \to 0^+$, $\frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + x^4} \sim \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}\,1}} = \frac{1}{x}$

Quindi per il secondo criterio del confronto asintotico

$$\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \approx \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

NOTO

proposizione 1

2° criterio del confronto asintotico

Risposta: $\displaystyle\int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+x^4}\,dx = +\infty$

2. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$ verifica: $\dfrac{x^2+\log x}{2x^5+6}$ e' definito e continuo per $x>0$, l'integrale e' improprio (semplice) in $+\infty$

Per $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{x^2+\log x}{2x^5+6} \sim \dfrac{x^2}{x^5} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^3}$

Quindi: $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx \approx \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx < +\infty$

proposizione 1

2° criterio del confronto asintotico

Risposta: $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2+\log x}{2x^5+6}\,dx$ e' finito

Con questo metodo non posso scoprire quanto vale esattamente

- se $\int_a^b g(x)\,dx > -\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx > -\infty$

- se $\int_a^b f(x)\,dx = -\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = -\infty$

Dimostrazione

Vicino a b vale che $f(x), g(x) \geq 0$ ed esiste M t.c. $|f(x)| \leq M|g(x)|$ (per la definizione di $f = O(g)$)

Quindi esiste a' con $a \leq a' < b$ tale che:

$$0 \leq f(x) \leq M\,g(x) \quad \text{per } x \in [a', b)$$

Ma allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{a'}^b f(x)\,dx \leq M \int_{a'}^b g(x)\,dx \approx \int_a^b g(x)\,dx.$$

proposizione 1

Quindi se $\int_a^b g(x)\,dx$ é finito, sono finiti tutti gli integrali sopra, e se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, sono infiniti tutti gli integrali sopra $\square$

Proposizione 7. (secondo criterio del confronto asintotico o criterio del confronto asintotico forte

Date $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ t.c.

- g è positiva vicino b (oppure g negativa vicino b);
- $f(x)$ è asintoticamente equivalente $\lambda \cdot g(x)$ per $x \to b^-$ con $\lambda > 0$

allora

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b g(x)\, dx$$

In particolare i due integrali sono entrambi finiti, oppure entrambi $+\infty$ (se $g \geq 0$ vicino b) oppure entrambi $-\infty$ (se $g \leq 0$ vicino b)

Osservazione

Se g (o f) cambia segno infinite volte per $x \to b^-$ allora non vale nessun criterio di confronto asintotico

Dimostrazione

Suppongo $g \geq 0$ vicino b (l'altro caso è simile). L'ipotesi $f \sim Lg$ per $x \to b^-$ significa che:

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to b^-$$

$$\lim_{x \to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow g(x) = O(f(x)) \text{ per } x \to b^-$$

LEZIONE 43

27 - 11

In particolare $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ sono integrali impropri in b.

(Il caso degli integrali impropri in a è analogo)

Proposizione 6. (Primo criterio del confronto asintotico)

Date $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ tali che:

- f, g sono positive vicino a b (cioè esiste a' con $a \le a' < b$ t.c. $f, g \ge 0$ su $[a', b)$)
- $f(x) = O(g(x))$ per $x \to b^-$

allora gli integrali $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ sono finiti o $+\infty$ e valgono le stesse implicazioni della proposizione 5.

1. se $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$
2. se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

Osservazione:

3. se $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b f(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$
4. se $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx$ può essere finito o $+\infty$
5. se $f, g \le 0$ vicino a b e $f(x) = O(g(x))$ allora valgono le seguenti implicazioni: