

Le serie

Indice:

- Le serie a termini positivi
- Def: convergenza e divergenza
- La serie geometrica
- La serie di Mengoli
- La serie armonica I
- La serie armonica II
- Teo: di condensazione di Cauchy
- Il numero di Nepero e (DIM)
- La crescita della serie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (DIM)
- La decrescenza della serie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (DIM)
- Teo: il termine n-esimo di una convergente è infinitesimo (DIM)
- Teo: principio del confronto (DIM)
- Def: definitivamente e frequentemente
- Teo: criterio del rapporto (DIM)
- Teo: criterio della radice (DIM)
- Le serie a termini qualunque
- Def: convergenza assoluta e condizionata
- Teo: convergenza assoluta (DIM)
- Teo: criterio di Leibnitz (DIM)
- Def: riordinamento
- Teo: di Dirichlet (DIM)

Le Serie a termini positivi

Somma parziale
n-esima della
successione a_n

$$S_n = \sum_{j=1}^n a_j$$

$$\text{Serie } \sum_{j=1}^{+\infty} a_j := \sup \left\{ \sum_{j=1}^n a_j : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definizione:
convergenza
divergenza

Sia (a_n) una serie di numeri positivi

S. indica che la serie converge $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n a_j = L$ finito

diverge $\sum_{j=1}^{+\infty} a_j = +\infty$ se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n a_j = +\infty$

Indeterminata

se $\lim$

ESEMPLI

• Serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \begin{cases} 0 < x < 1 & \frac{1}{1-x} & \text{CONVERGE } < +\infty \\ x \geq 1 & \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{DIVERGE } = +\infty \end{cases}$$

• Serie telescopica (SERIE DI MENGOLI)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad \text{CONVERGE}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_j = \sum_{n=1}^j \frac{1}{n(n+1)}$$

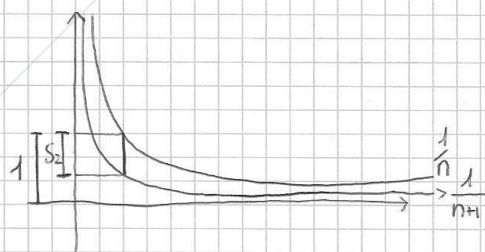
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow S_j = \sum_{n=1}^j \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_1 = 1/2 \quad S_2 = 1/2 + 1/6 \quad S_3 = 1/2 + 1/6 + 1/12 \dots \quad (S_j) \text{ è strettamente crescente}$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sup \{ S_n : n \in \mathbb{N} \} \\ = \sup \left\{ 1 - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$



• Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge } = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

creo
quattro
di più
piccolo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} = +\infty \text{ dunque } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \text{ diverge } = +\infty$$

• Serie arim. II

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge } < +\infty$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \text{ con non segue } \rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \text{ è vera}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{1}{h^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 1$$

$$\text{quindi } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} + 1$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} + 1$$

• Teorema
Criterio di
Condensazione
di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri positive e supponiamo a_n decrescente

$$\text{Allora } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n} < +\infty$$

NB moltiplica per 2^n
e sostituisci i_n
termini $n \rightarrow 2^n$

$$\text{DIM } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots$$

$$1) S_n = \sum_{j=1}^n a_j \quad S_8 = a_1 + a_2 + \dots + a_8 = S_{2^3}$$

$$S_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{n+1}} = a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_k \right)$$

$$2) a_{h+1} \leq a_h \text{ decrescente?}$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_k \right) \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} a_{2^j} \right)$$

$$a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n 2^j a_{2^j} \leq S_{2^{n+1}} \leq a_1 + a_2 + \sum_{j=1}^n 2^j a_{2^j}$$

Il numero di Nepero e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \textcircled{e} \quad \text{CONVERGE } < +\infty$$

DIM $n^n \geq n! \geq 2^{n-1}$

• $n^n > n!$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} n!$$

$$\frac{1}{1-n} \geq n! \rightarrow 1-n \leq \frac{1}{n!}$$

es $n=2 \quad 1-2 \leq \frac{1}{2!} \quad -1 \leq \frac{1}{2} \quad \checkmark$

• $n! \geq 2^{n-1}$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \frac{1}{1-1/2} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 2$$

In realtà $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 1 + 2 = 3 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \leq 3$

$$e := 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{8} + \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{8} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{2^n} =$$

$$= \frac{3}{8} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{8} - \frac{7}{8} + \frac{1}{1-1/2} = 3 - \frac{1}{12} \quad \frac{5}{2} < e < 3 - \frac{1}{12}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{Si ha: (i) } a_n < e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

(ii) $a_n < a_{n+1}$ è crescente

(iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e \rightarrow e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \text{binomio di Newton} \quad a = \frac{1}{n}, \quad b = 1$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \quad \text{• confrontato con } \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e_n$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-k+1)}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot p_{nk} \quad p_{nk} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

dunque $p_{nk} < 1$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} p_{nk} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$a_n < e_n \quad \text{OK}$$

a_n non può divergere ed è sup. limitata

(ii) Devo dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} (P_{n+1,k})$

$$P_{n,k} = 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$P_{n+1,k} = 1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow P_{n+1,k} > P_{n,k} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{n+1,k} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

(iii) $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq e$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} \geq e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

↓

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k} \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k} \quad \text{con } n > m$$

↓ passo a parte i limiti con n fmo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{n,k} = \sum_{k=0}^m \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} (P_{n,k}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n,k} = \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$\xrightarrow{\text{k fattori}} 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1 = 1$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

$$\text{Deduco } \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{n,k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \quad \square$$

Dimostra che $n \rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente

DIM (Induzione)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow n^{n+1} (n+2)^{n+2} < (n+1)^{n+1} (n+1)^{n+2} \rightarrow n^{n+1} (n+2)^{n+2} < (n+1)^{(n+1)+2} \rightarrow$$

$$\rightarrow (n+2)^1 (n(n+2))^{n+1} < (n+1)^1 ((n+1)^2)^{n+1} \rightarrow \frac{n+2}{n+1} < \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$\text{Uso Bernoulli I } (1+x)^n \geq 1+nx \quad x = \frac{1}{n(n+2)} \quad n = n+1$$

$$\downarrow \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \frac{1}{n(n+2)} > \frac{n+2}{n+1} ?$$

↓ fai calcoli a VERA

□

TEOREMA (7.8.1) (Il termine n-esimo di una convergente è infinitesimo)Sia (a_n) una successione a termini positivi

$$\text{Allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_n < \varepsilon \text{ def in } n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq \bar{n} \quad \boxed{a_n < \varepsilon}$$

Il viceversa è falso.

DIM Poniamo $S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ $S_n := \sum_{j=1}^n a_j$

Sappiamo $S = \sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ e dunque:

$$1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n \leq S$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad S_n > S - \varepsilon$$

2) a rafforzare quando $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad S_m > S - \varepsilon$

$$S_m - S > -\varepsilon \rightarrow S - S_m < \varepsilon$$

$$\text{ma } S - S_m \geq S_{m+1} - S_m = \sum_{j=1}^{m+1} a_j - \sum_{j=1}^m a_j = a_{m+1}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad a_{m+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad a_n < \varepsilon \text{ def in } n$$

TEOREMA: (Principio del confronto)Siano $(a_n), (b_n)$ due successioni a termini positivi.Supponiamo $(a_n) < (b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ def in } n$

$$1) \text{ se } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$$

$$2) \text{ se } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \text{ allora } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$$

DIM 1) Supponiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty$, $S_n^B = \sum_{n=1}^n b_n$, vuol dire $\sup \{S_n^B : n \in \mathbb{N}\} < +\infty$

$$\text{Da } b_n \geq a_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^n b_n \geq \sum_{n=1}^n a_n > 0$$

$$S_n^A \leq S_n^B \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n^A : n \in \mathbb{N}\} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n^B : n \in \mathbb{N}\} \quad \begin{array}{l} \text{per comparazione} \\ \sup \{S_n^A : n \in \mathbb{N}\} < +\infty \end{array}$$

$$2) \text{ Supponiamo } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty, \text{ vuol dire } \sup \{S_n^A : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

$$S_n^B > S_n^A \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n^B : n \in \mathbb{N}\} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{S_n^A : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \text{anche } \sup \{S_n^B : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

Definitivamente e frequentementeSia $P(n)$ una proprietà che dipende da $n \in \mathbb{N}$ Si dice che $P(n)$ è vera definitivamente in n se è vera da un certo indice in poi
 $\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : P(n) \text{ è vera } \forall n \geq \bar{n}$ vera frequentemente se è vera per infiniti indici
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad m \geq n \quad P(m) \text{ è vera}$ N.B. Se $P(n)$ è vera definitivamente allora è vera frequentemente.
Il viceversa è falso.

TEOREMA (7.2.1)
Criterio del rapporto

Sia (a_n) una successione di numeri positivi.

1) Se $\exists q \in (0, 1)$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ def in n allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ CONVERGE

2) Se $\exists q \in (1, +\infty)$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ def in n allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ DIVERGE

$q=1$ Non si può dire nulla.

Si applica spesso in presenza di fattoriali

DIM 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \forall n \geq \bar{n} \rightarrow a_{n+1} < q \cdot a_n \quad a_n > 0$

$$a_{\bar{n}+1} < q \cdot a_{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+2} \leq q a_{\bar{n}+1} \leq q^2 a_{\bar{n}}$$

$$\text{Deduco } a_{\bar{n}+k} \leq q^k a_{\bar{n}} \xrightarrow{\text{confronto}} \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \leq a_{\bar{n}} \cdot \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k$$

$$\downarrow a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}+1} + a_{\bar{n}+2} \dots \leq a_{\bar{n}} (q^0 + q^1 + q^2 \dots)$$

$$\text{Ma } \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} q^k < +\infty, \text{ quindi def in n } a_n < +\infty$$

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n} \rightarrow a_{n+1} \geq q a_n$

$$a_{\bar{n}+1} \geq q a_{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+2} \geq q a_{\bar{n}+1} \geq q^2 a_{\bar{n}}$$

$$\text{Deduco } a_{\bar{n}+k} \geq q^k a_{\bar{n}} \xrightarrow{\text{confronto}} \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \geq a_{\bar{n}} \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k = +\infty$$

$q > 1$ quindi diverge

TEOREMA (7.6.1)
Criterio della radice

Sia (a_n) una successione di numeri positivi

1) Se $\exists q \in (0, 1)$: $\sqrt[n]{a_n} < q$ def in n allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) Se $\exists q \in (1, +\infty)$: $\sqrt[n]{a_n} \geq q$ def in n allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

DIM 1) $\sqrt[n]{a_n} < q \quad \forall n \geq \bar{n}$

$$a_n < q^n$$

$$a_{\bar{n}} < q^{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+1} < q^{\bar{n}+1}$$

$$\sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k < +\infty$$

2) $\sqrt[n]{a_n} \geq q \quad \forall n \geq \bar{n}$

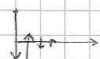
$$a_n \geq q^n \rightarrow a_{\bar{n}} \geq q^{\bar{n}}$$

$$a_{\bar{n}+1} \geq q^{\bar{n}+1}$$

$$\sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} a_k \geq \sum_{k=\bar{n}}^{+\infty} q^k = +\infty$$

Serie a termini qualunque

Esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$



POSITIVI
0

Se (a_n) è una succ. reale, cosa significa $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$?

Ricordo che questo simbolo era stato definito quando detti gli $a_n \geq 0$
 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ $\sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\} := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (estremo sup delle somme finite)

Dato che (S_n) è crescente, dal TEO delle success. monotone (9.9.1)
 (S_n) ammette limite uguale al suo estremo superiore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Pensiamo a una pallina che si muove con velocità di modulo 1, verso il bomo per 1 secondo, verso l'altro per 1/2 di secondo, verso il bomo per 1/3 di secondo...

• Spazio totale percorso? $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

• Posizione finale della pallina? Vedremo di S_i , cioè $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge N. (SERIE A SEGNI) ALTERNI

NON VALE PIÙ $\sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\} := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, VALE ANCORA $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Definizione (15.7.1) Sia (a_n) una succ. di numeri reali.

Si dice che la serie degli (a_n) converge se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Tale limite si indica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Si dice che la serie degli (a_n) diverge positivamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

negativamente

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

Si dice che la serie degli (a_n) è indeterminata $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Si dice che la serie degli (a_n) converge assolutamente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

condizionatamente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$

ESEMPIO (15.8.1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è indeterminata $S_n = \begin{cases} -1 & n \equiv 1 \pmod{2} \text{ (indispari)} \\ 0 & n \equiv 0 \pmod{2} \text{ (pari)} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente dato che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Il fatto che converge condizionatamente va dimostrato

TEOREMA (15.8.1) Sia (a_n) una succ. reale

Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ (converge) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ (diverge)

ESEMPIO $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ a_n pari $\frac{n}{n+2}$ $\nexists \lim$
 indispari $-\frac{n}{n+2}$

DIM Si ha $a_n = S_n - S_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

Ma poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, chiamiamo $S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$ ho $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$
 $S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$

$$S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare$$

TEOREMA
(15.10.1)

Sia (a_n) una successione reale

$$\text{Allora } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

se la serie converge assolutamente allora converge

DIM Sia $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Devo dim. che (S_n) è convergente ad un numero reale.

Da TEO (14.10.1) S_n è convergente ad un numero reale se solo se è di Cauchy.
 Mi basta dim. che S_n è di Cauchy.

$$\text{Fino } n, k \in \mathbb{N} \text{ indici } |S_{n+k} - S_n| = \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right|$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j|$$

↓ CONVERGE per ipotesi

$$\text{Dimostrare } \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \sum_{j=\bar{n}_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon \quad (\text{le code sono infinitesime})$$

$$\text{Dunque } \forall \varepsilon > 0, \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\varepsilon \quad |S_{n+k} - S_n| < \varepsilon \rightarrow S_n \text{ è di Cauchy} \quad \blacksquare$$

$$\text{OSS (15.12.1) Se } \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

Le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono convergenti a un numero reale.
 • Dunque il teorema di completezza di $\mathbb{R}$ equivale a dire che le serie assolutamente convergenti sono convergenti.

↓ Sia (a_n) di Cauchy in $\mathbb{R}$.

Devo dimostrare che (a_n) converge a un n. A reale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}, n > \bar{n}_\varepsilon, m > \bar{n}_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\text{Prendo } \varepsilon = \frac{1}{2^k}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall n, m > \bar{n}_1 \quad |a_n - a_m| < \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^2} \quad \exists \bar{n}_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > \bar{n}_2 \quad |a_n - a_m| < \frac{1}{2^2}$$

$$\forall k \quad \exists \bar{n}_k \in \mathbb{N}, \bar{n}_k > \bar{n}_{k-1} : \forall n, m > \bar{n}_k \quad |a_n - a_m| < \frac{1}{2^k}$$

$$\left| a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k} \right| < \frac{1}{2^k} \rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}| < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

dunque $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k})$ converge assolutamente
 $\in \mathbb{R}$

Per ora ho dedotto: se (a_n) è di Cauchy, allora $\exists (\bar{n}_k)$: $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}) \in \mathbb{R}$
 successione serie telescopica

$$\exists \text{ finito il limite } \sum_{k=1}^p (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k})$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} (a_{\bar{n}_{p+1}} - a_{\bar{n}_1})$$

non dipende da p

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} (a_{\bar{n}_{p+1}}) - a_{\bar{n}_1}$$

(a_n) ammette una sottosuccessione convergente

Quanto fatto a pagina 2 si ripete per dimostrare che (a_n) converge.

Esercizio (15.16.1) Discutere al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

• Se $x=2$ la serie converge

• la serie è a termini positivi se $x > 2$

• Se $x=3$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ DIVERGE, per il confronto con la serie armonica a divergere per $x > 3$

• Se $2 < x < 3$ $\eta \sqrt{\frac{(x-2)^n}{n}} = \frac{(x-2)}{\sqrt{n+2}} \rightarrow \frac{(x-2)}{1}$ $(x-2) \in (0,1)$ CONVERGE

• $x < 2$, la serie è a termini non positivi.

$$\text{Considero } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$$

se $x \in (1,2)$ $|x-2| < 1$
con lo stesso ragionamento

CONVERGE ASSOLUTAMENTE

• $x=1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (segni alterni) CONVERGE

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} < +\infty$$

• $x < 1$ Per risolvere questo caso serve il TEO (15.16.1) criterio di Leibnitz

TEOREMA (15.16.1)
Criterio di Leibnitz

Definizione Sia $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (a_n)$ si dice a termini alterni

Sia $(a_n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Se valgono: (i) (a_n) è decrescente
(ii) $(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$\text{Allora } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$$

$$\text{DIM: } S_i = \sum_{j=1}^i (-1)^j a_j$$

$$S_{2n+1} = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n} - a_{2n+1} \quad \text{dato che } a_{2n+1} \leq a_{2n} \rightarrow a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$$

$$= S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq S_{2n-1}$$

$\Rightarrow n \rightarrow S_{2n+1}$ è crescente

$$S_{2n+2} = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2n+1} - a_{2n+2} \quad \text{dato che } a_{2n+1} \leq a_{2n+2} \rightarrow a_{2n+1} - a_{2n+2} \leq 0$$

$$= S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n}$$

$\Rightarrow n \rightarrow S_{2n+2}$ è decrescente

Inoltre (S_{2n+1}) è limitata dall'alto
 (S_{2n+2}) è limitata dal basso

dispari
pari

$$\text{monotone } \rightarrow S_{2n+1} \leq -a_{2n+1} \leq 0 \quad (16.2.1)$$

Ho usato che $a_n \geq 0$

a_n è decrescente ($a_{n+1} \leq a_n$)

$$\rightarrow S_{2n} \geq -a_1 + a_{2n+2} \geq -a_1 \quad (16.2.2)$$

(costante)

TEO sulle successioni
monotone (9.9.1)

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \in \mathbb{R} \quad \text{dispari}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \in \mathbb{R} \quad \text{pari}$$

$$S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2} \rightarrow 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n+2} - S_{2n+1}) = p - p = 0 \rightarrow p = p$$

$$S_{2n+1} - S_{2n+2} = -a_{2n+1} \rightarrow 0 \quad \text{la succ. delle somme parziali dispari converge allo stesso lim delle suc. delle somme parziali pari}$$

Devo dimostrare che la succ. delle somme parziali converge a $p = p$

Ho una successione reale (b_n) di cui so:

$$b_{2n} \rightarrow p \in \mathbb{R} \quad \text{Aneziro che } b_n \rightarrow p$$

$$b_{2n+1} \rightarrow p \in \mathbb{R}$$

↓ Coprono tutti gli indici

$$\text{N.B. } \begin{cases} C_{k+1} = 1 \\ C_{k+2} = 2 \\ C_{k+3} = 2 \\ C_{k+4} = 10 \end{cases} \quad \begin{matrix} C_k \text{ non} \\ \text{converge} \end{matrix}$$

↓ non coprono tutti gli indici

$b_n \rightarrow p$ perché b_{2n}, b_{2n+1} sono due sottosuccessioni che ricoprono TUTTI GLI INDICI ■

Tornando all'esercizio, manca il caso $x < -1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

la successione $\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} = \frac{[(-1)(\text{numero})]^n}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$

spazi tende $+\infty$
spazi tende $-\infty$
non è infinitesima e NON CONVERGE

ESERCIZIO $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergenti
Dim $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

ESERCIZIO Sia $x \in \mathbb{R}$; $x^+ =$ parte positiva $x^- =$ parte negativa
 $= \max(x, 0)$ $= \min(x, 0)$

ESERCIZIO Sia $\sum |a_n| < +\infty$
Allora $\sum a_n^+ < +\infty$, $\sum a_n^- < +\infty$ e si ha $\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$

ESERCIZIO $\sum |a_n| < +\infty \Leftrightarrow \sum a_n^+ < +\infty$ Es. ha $\sum |a_n| = \sum a_n^+ + \sum a_n^-$
 $\sum a_n^- < +\infty$

ESERCIZIO Supponiamo $\sum |a_n| < +\infty$, $\sum a_n \in \mathbb{R}$
 Allora $\sum a_n^+ = +\infty$, $\sum a_n^- = +\infty$

Definizione riordinamento Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serie a termini qualunque.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ si dice **riordinamento** di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se $\exists$ funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biettiva:

$$b(n) = a_{f(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

N.B. non è sempre possibile

Esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

• DIVERGE
 (non converge $\frac{1}{n} = 0$)
 assolutamente

• converge (per il test di Leibniz)

→ la serie converge condizionatamente

$$\mathbb{R} \ni S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \rightarrow S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$\frac{3}{2}S = S + \frac{1}{2}S = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots\right)$$

se potremo sommare a mio piacimento

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \dots = S$$

$$\frac{3}{2}S = S \quad \text{ASSURDO!}$$

N.B. $\sum a_n = \sum n a_n$
 se $\sum a_n \in \mathbb{R}$

La proprietà commutativa non vale per le serie infinite

• SERIE convergenti
 condizionatamente

→ non si riordina

Sia $\sum a_n$ conv. cond.

[dato nel $[-\infty, +\infty]$ esiste un riordinamento $\sum b_n$ di $\sum a_n$

tale che $\sum b_n = 0$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

• SERIE assolutamente convergenti
 convergenti

→ si riordinano

TEOREMA
(16.7.1)
di Dirichlet

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ assolutamente convergente. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ un riordinamento di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ è assolutamente convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

DIM Caso 1. Supponiamo $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ (serie a termini positivi)

Dato $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Dato che sono in presenza di un riordinamento i b_{k_j} per $k=1 \dots n$ sono alcuni degli a_j (non tutti),
 dunque $B_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j \in \mathbb{R}$ (converge)

contando serie
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j$
 a.t. positivi

Scambiando il ruolo degli a_n e b_n $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_j$

Allora $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$

es $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $b_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_4$
 $B_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$
 $= a_2 + a_4 + a_1 + a_5 \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j$

Caso 2 a_n di segno qualunque

Considero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ (per ipotesi)

Nota che $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Applico il caso 1 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ è assolutamente convergente

Nota che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$ è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$