PREPARAZIONE PROVA TEORICA 10/01/2020

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

- BINOMIO di NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{dove } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$\Rightarrow$ MA SE $n < k \to \binom{n}{k} = 0$

- PRINCIPIO di INDUZIONE

É UNA TECNICA di DIMOSTRAZIONE

$P(n)$ con $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) $\mapsto \forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ É VERA

1) $P(1)$ É VERA
2) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ } ALLORA SEGUE CHE $\forall n$ $P(n)$ É VERA

es. $n^2 + 3n + 2 = a_n$ a_n É PARI.

1) $a(1)$ É PARI $\to 1^2 + 3 + 2 = 6$ É PARI
2) SUPPONIAMO a_n SIA PARI

$a(n+1)$ É PARI $\to a(n+1) = (n+1)^2 + 3(n+1) + 2 =$

$\forall n$ a_n É PARI. $= \underbrace{(n^2+3n+2)}_{\text{PARI x SUPP.}} \underbrace{+2n+4}_{\text{PARI } 2(n+2)}$

- DISUGUAGLIANZA di BERNOULLI

$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \forall n \in \mathbb{N}$

DIM. (x INDUZIONE) $P(n)$ $(1+a)^n \geq 1 + na$

1) $P(1)$ $1+a \geq 1+a$ VERA
2) $P(n)$ VERA, $P(n+1)$ É VERA?

$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$

$(1+a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$

$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$

QUINDI $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

CENNI di TOPOLOGIA della RETTA

- PUNTI di ACCUMULAZIONE

$E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

x_0 É UN PUNTO di ACCUMULAZIONE di E SE ACCADE CHE $\forall\, \mathcal{U}$ INTORNO di x_0

$\mathcal{U} \cap E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

es. $E = (-\infty, 0) \cup (1, 2] \cup \{3\}$

$\to$ SE PRENDO $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}$ $\exists\, \mathcal{U}_{\frac{1}{2}} \mid \mathcal{U} \cap E = \emptyset$

$\frac{1}{2}$ NON É PUNTO di ACCUMULAZIONE

$\to$ SE PRENDO $\mathcal{U}_3$ $\mathcal{U}_3 \cap E \setminus \{3\} = \{3\} \setminus \{3\} = \emptyset$

3 É UN PUNTO ISOLATO $\mathcal{U}_{x_0} \cap E = x_0$

$\to$ 0 e 2 SONO PUNTI di ACCUMULAZIONE

$\Rightarrow$ I = INT. (a, b), L'INSIEME di PUNTI di ACC. di I É $[a, b]$

$\Rightarrow$ SOLO $+\infty$ É UN PUNTO di ACC. di $\mathbb{N}$

- TEOREMA di BOLZANO-WEIERSTRASS

$E \subset \mathbb{R}$ LIMITATO & INFINITO

ALLORA "E" AMMETTE ALMENO UN PUNTO di ACC.

- TEOREMA

E É UN INSIEME LIMITATO É CHIUSO

ALLORA AMMETTE MAX e MIN

LIMITI di FUNZIONI e SUCCESSIONI

- TEOREMA dell'UNICITÀ del LIMITE

$x_0 \in \mathbb{R}^*$ di ACC. PER A

SE ESISTE IL $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ALLORA ESSO È UNICO

DIM. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$ $\quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l''$ $\quad l', l'' \in \mathbb{R}^*, \ l' \neq l''$

SIANO $V_{l'}$ e $V_{l''}$, $V_{l'} \cap V_{l''} = \emptyset$

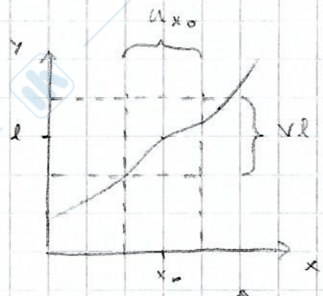
$$\left[\begin{array}{l} V_{l'} \ \exists \, U'_{x_0} \mid \forall x \in U'_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in V_{l'} \\ V_{l''} \ \exists \, U''_{x_0} \mid \forall x \in U''_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in V_{l''} \end{array}\right\} \Rightarrow U_{x_0} = U'_{x_0} \cap U''_{x_0}$$

DEFINIZIONE di LIMITE (*)

$\rightarrow x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\} \subset U'_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$
$\subset U''_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \in V_{l'} \\ f(x) \in V_{l''} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in V_{l'} \cap V_{l''}$$

$\Rightarrow V_{l'} \cap V_{l''} \neq \emptyset$ ASSURDO



- DEFINIZIONE di LIMITE (*)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $l \in \mathbb{R}^*$, x_0 PUNTO di ACC.

f HA LIMITE l PER x CHE TENDE A x_0

$\forall V_l \ \exists \, U_{x_0}$ t.c. $\forall x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$ $\quad f(x) \in V_l$

- TEOREMA della PERMANENZA del SEGNO

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ SE $l > 0$ ALLORA $\exists \, U_{x_0} \mid f(x) > 0$

ANALOGAMENTE PER $l < 0$ $\quad \forall x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

DIM. $\exists V_l \left[\begin{array}{c}\forall y \in V_l \\ y > 0\end{array}\right]$ (V_l TUTTO POSITIVO)

$\exists \, U_{x_0} \mid x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

QUINDI $f(x) \in V_l \Rightarrow f(x) > 0$ (PERCHÉ "$V_l > 0$")

$\hookrightarrow$ x LA DEF. di LIMITE

CONSEGUENZA: SE $U_{x_0} \mid f(x) \geq 0$ $\quad \forall x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \geq 0$ $\quad$ (≤ 0 SE $f(x) \leq 0$)

DIM. SE NON FOSSE VERO

$\lim_{x \to x_0} f(x) < 0 \Rightarrow \exists \, U'_{x_0} \mid f(x) < 0 \quad \forall x \in U'_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$x \in U_{x_0} \cap U'_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$, $f(x) \geq 0$ e $f(x) < 0$ ASSURDO

VALE SIA ... SIA

- TEOREMA della LOCALE LIMITATEZZA

$\lim_{x \to x_0} f = l \in \mathbb{R}$ (ESISTENZA LIMITE per f)

ALLORA $\exists \, U_{x_0} \mid f_{|U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}}$ È LIMITATA (LOCALMENTE)

$\hookrightarrow$ INS. PUNTI ACC. PER A

- TEOREMA del CONFRONTO

$f, g, h: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ACC. PER A

SUPPONIAMO CHE $\exists \, U_{x_0}$ $\quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\quad \forall x \in U_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = l \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = l$

DIM. $l \in \mathbb{R}$ $\quad \varepsilon > 0$ $\quad \exists \, U'_{x_0} \mid g(x) < l + \varepsilon \quad \forall x \in U'_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

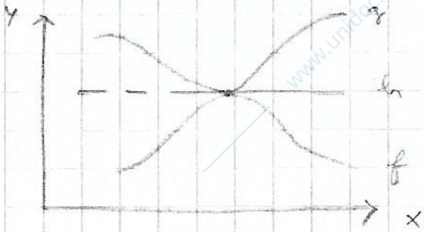
$\exists \, U''_{x_0} \mid l - \varepsilon < f(x) \quad \forall x \in U''_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$U'''_{x_0} = U'_{x_0} \cap U''_{x_0} \cap U_{x_0}$, $\forall x \in U'''_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$l - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < l + \varepsilon$

$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = l$

SE $l = +\infty$ $\quad \lim_{x \to x_0} f = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h = +\infty \Leftarrow f(x) \leq h(x)$



es. $\lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{sen} x) = ?$

$x + \operatorname{sen} x \geq x - 1$

$\lim_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (x + \operatorname{sen} x) = +\infty$

– TEOREMA del LIMITE di UNA FUNZIONE MONOTONA

$f : (a,b) \to \mathbb{R} \quad a, b \in \mathbb{R}^*$

SE f É MONOTONA $\Rightarrow$ ESISTONO $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$

- SE $f \nearrow$ $\quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{(a,b)} f \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{(a,b)} f$
- SE $f \searrow$ $\quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{(a,b)} f \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{(a,b)} f$

DIM. (CASO SUCCESSIONI) SE $\{a_n\} \nearrow$ $\quad a_n \le a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \sup a_n \quad n \in \mathbb{N}$

1) $\{a_n\}$ LIMITATA SUPERIORMENTE

$\sup a_n = l \quad n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon > 0$

PROP. l – $\sup a_n$ $\quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid l - \varepsilon < a_{n_0} \qquad n \ge n_0 \quad a_{n_0} \le a_n$ PER MONOTONIA di a_n

$\forall n \ge n_0 \quad l - \varepsilon < a_{n_0} < a_n \Rightarrow l - \varepsilon < a_n \le l < l + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$ $\qquad l-\varepsilon \quad l \qquad a_n \le l \ \forall n$

2) $\{a_n\}$ NON LIMITATA SUPERIORMENTE

$M > 0 \quad \exists n_0 \quad M < a_{n_0} \le a_n \quad n \ge n_0$ — MONOTONIA di a_n

$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge n_0 \quad a_n > M$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ $\qquad M \quad a_{n_0}$

– TEOREMA del LIMITE di UNA FUNZIONE COMPOSTA

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)$ dove $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $y = f(x)$

es. $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \lim_{y \to 0} \operatorname{sen} y = 0$

– TEOREMA SUL LIMITE del PRODOTTO di UNA f LIMITATA PER UNA f INFINITESIMA

$h(x), \ k(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} h = 0 \qquad |k(x)| \le M$ (LIMITATA)

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} hk = 0 \qquad$ es. $\lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen} x = 0$

DIM. $\lim_{x \to x_0} |hk| = 0 \qquad 0 \le |hk| = |h||k| \le M|h| \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} hk = 0 \qquad\qquad$ ↳ MAX k

– LIMITI NOTEVOLI TRIGONOMETRICI

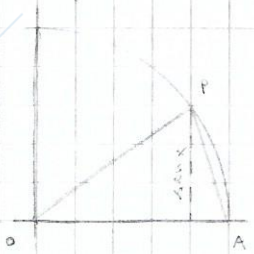
- $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

DIM. USO IL TEOR. del CONFRONTO

CONSIDERO $\operatorname{sen} x$ nell' INTERVALLO $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

$x = -y \quad \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} x = \lim_{y \to 0^+} \operatorname{sen}(-y) = -\lim_{y \to 0^+} \operatorname{sen} y$

RESTRINGO L'INT. A $0 < x < \pi/4$



IL TRIANGOLO $O\hat{A}P$ $\subset$ SETTORE OAT

A $O\hat{A}P = \frac{b \cdot h}{2} = (\cos 0 \cdot \operatorname{sen} x)/2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

A $OAT = 1/2 \ x$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \le \frac{1}{2} x \qquad x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$0 < \operatorname{sen} x \le x$

per $x \to 0 \qquad 0 \le \operatorname{sen} x \le 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$

- $\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$

DIM. $x - x_0 = h \qquad x = x_0 + h$

$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x_0 + h) =$

$= \lim_{h \to 0} (\underbrace{\operatorname{sen} x_0 \cos h}_{1 \operatorname{sen} x_0} + \underbrace{\cos x_0 \operatorname{sen} h}_{0 \cos x_0}) = \operatorname{sen} x_0$

- $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$

SE $x_0 \ne k\pi$ É VERO PERCHE per $x \to x_0$ $\cos x$ É DEFINITIVAMENTE MONOTONA

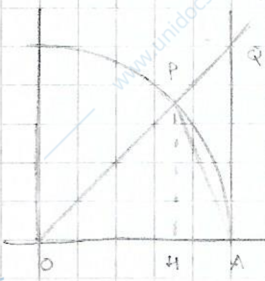
SE $x_0 = k\pi$ $\cos x$ É MONOTONA da DX e da SX, QUINDI AMMETTE lim DX e lim SX CHE VALGONO 1

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

DIM. SI USA IL TEOR. del CONFRONTO

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \quad (x = -y)$

CONSIDERO L'INTERVALLO $0 < x < \pi/2$



$O\hat{A}P \subset O\hat{A}P \subset O\hat{A}Q \qquad A_{O\hat{A}P} \leq A_{O\hat{A}P} \leq A_{O\hat{A}Q}$

$\overline{HP} = \operatorname{sen} x \quad \widehat{AP} = x \quad \overline{AQ} = \operatorname{tg} x \quad \overline{OA} = 1$

$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \leq x/2 \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$

$\operatorname{sen} x \leq x \leq \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x / \cos x$

$1 \leq x / \operatorname{sen} x \leq 1/\cos x$

$\to$ RECIPROCO $\quad 1 \geq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \geq \cos x$

x IL TEOR. del CONFRONTO $\quad f(x) \geq g(x) \geq h(x)$

$\left.\begin{array}{l} f \to 1 \text{ per } x \to 0 \\ h \to 1 \text{ per } x \to 0 \end{array}\right\}$ SEGUE CHE $g \to 1$ per $x \to 0$ ✓

- $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

DIM. CONSIDERO $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

$\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} \qquad 1 - \operatorname{sen}^2 x = y$

$\Rightarrow = \lim_{y \to 1^-} y^{1/2} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

DIM. $= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2}_{= 1 \cdot 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{= \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

DIM. $= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{=1} \cdot \overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{=1} = 1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1$

DIM. $\operatorname{arcsen} x = y \Rightarrow = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{sen} y} = 1$

– DEFINIZIONE INFINITESIMO e INFINITO

$f: A \to \mathbb{R}, \ x_0 \in \mathbb{R}^*, \ x_0$ ACC. per $A \quad (x_0 \notin A)$

- f É UN INFINITESIMO per $x \to x_0$ SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- f É UN INFINITO per $x \to x_0$ SE $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

– PRINCIPIO di SOSTITUZIONE degli INFINITESIMI

$\lim_{x \to x_0} \frac{f + F}{g + G}$ DOVE per $x \to x_0$ $\begin{cases} F = o(f) & \text{INF. SUP. RISPETTO A } f \\ G = o(g) & \text{" " " " } g \end{cases}$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = l \overset{(=)}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} \frac{f + F}{g + G} = l$

DIM. $\frac{f + F}{g + G} = \frac{f + o(f)}{g + o(g)} = \frac{f}{g} \cdot \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} = l$

$\frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 + F(x)/f(x)}{1 + G(x)/g(x)} \right)$ e

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} \left(\frac{1 + G(x)/g(x)}{1 + F(x)/f(x)} \right)$

POICHÉ $\lim_{x \to x_0} F(x)/f(x) = \lim_{x \to x_0} G(x)/g(x) = 0$ SI HA:

$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{1 + F(x)/f(x)}{1 + G(x)/g(x)} \right) = 1, \quad \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1 + G(x)/g(x)}{1 + F(x)/f(x)} \right) = 1$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} = \ldots \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{1 + F(x)/f(x)}{1 + G(x)/g(x)} \right) = \ldots \frac{f(x)}{g(x)}$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ldots \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)} \left(\frac{1 + G(x)/g(x)}{1 + F(x)/f(x)} \right) = \ldots \frac{f(x) + F(x)}{g(x) + G(x)}$

FUNZIONI CONTINUE

- DEFINIZIONE di FUNZIONE CONTINUA

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$

f É CONTINUA IN x_0 SE:

1) x_0 É UN PUNTO ISOLATO, $U_{x_0} \cap A = \{x_0\}$.
2) x_0 É di ACC. per A e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f SI DICE CONTINUA IN A SE f É CONTINUA IN TUTTI I PUNTI di A $\to$ $f \in C^0(A)$

- OPERAZIONI SULLE FUNZIONI CONTINUE

f e g SONO FUNZIONI CONTINUE IN x_0, $c \in \mathbb{R}$ ALLORA:
$f+g$, fg, f/g $(g \neq 0)$, cf SONO CONTINUE

- CONTINUITÁ delle FUNZIONE COMPOSTA

$f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$

SUPPONIAMO $f(A) \subset B$ $\quad g \circ f: A \to \mathbb{R}$

$x_0 \in A$, $y_0 = f(x_0)$, f CONTINUA IN x_0, g CONT. IN y_0

ALLORA $g \circ f$ CONTINUA IN x_0 $\quad g(f(x))$

- TEOREMA di WEIERSTRASS IN INT. CHIUSI E LIMIT.

$f: [a,b]$, f É CONTINUA IN $[a,b]$

ALLORA f AMMETTE MAX e MIN

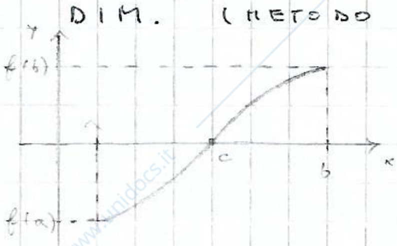
CIOÉ: $\exists x_1 \in [a,b]$, $\exists x_2 \in [a,b]$ t.c. $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in [a,b]$

- TEOREMA degli ZERI

$f: I \to \mathbb{R}$ ① I INTERVALLO CHIUSO e LIMITATO
② $f \in C^0(I)$ ③ $a, b \in I$ $f(a) \cdot f(b) < 0$ (SEGNO OPPOSTO)

ALLORA $\exists c$ APPARTENENTE ALL'INTERVALLO di ESTREMI a e b t.c. $f(c) = 0$ (c É UNO ZERO di f)

DIM. (METODO BISEZIONE) $a < b$ SUPP. $f(a) < 0$, $f(b) > 0$



PONGO $a = a_0$, $b = b_0$, $c_0 = (a_0 + b_0)/2$

$\to$ SE $f(c_0) = 0$ ABBIAMO FINITO

$\to$ SE $f(c_0) > 0$ RESTRINGO A $[a_0, c_0]$

$\to$ SE $f(c_0) < 0$ RESTRINGO A $[c_0, b_0]$

$\Rightarrow$ SI OTTIENE $[a_1, b_1]$ POSTI RISPETTIV. DOVE $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$ (H_p RISPETTATE)

POSSIAMO QUINDI ITERARE IL PROCEDIMENTO

AL PASSO n, DATO $[a_n, b_n]$, SI PONE $c_n = (a_n + b_n)/2$

$\to$ SE $f(c_n) < 0$ ALLORA $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$

$\to$ SE $f(c_n) > 0$ ALLORA $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$

(SE $f(c_n) = 0$ ABBIAMO FINITO)

QUINDI $[a,b] = \ldots \subset [a_n, b_n] \subset \ldots \subset [a_0, b_0]$

$\Rightarrow$ $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$ $\quad \forall n$

INOLTRE $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = (b-a)/2^{n+1}$ $\quad \forall n$

CIÓ IMPLICA $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ MONOTONE e LIMITATE

$\Rightarrow$ ESISTE IL LIMITE ED É FINITO

QUINDI $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$ e $\lim_{n \to \infty} b_n = x_1$

$x_0 = x_1$ INFATTI $x_1 - x_0 = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$

RESTA QUINDI DA PROVARE $f(x_0) = 0$:

$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0) \leq 0$

$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(x_1) = f(x_0) \geq 0$ $\to$ SEGUE dalla CONTINUITÁ di f e che $f(a_n) < 0$ $\forall n$

$\Rightarrow$ $0 \leq f(x_0) \leq 0$, OVVERO $f(x_0) = 0$

IL TEOREMA É DIMOSTRATO

- TEOREMA dei VALORI INTERMEDI

$f: I \to \mathbb{R}$

1) I INTERVALLO 2) f CONTINUA

ALLORA $\inf_I f < t < \sup_I f \quad \exists c \in I \mid f(c) = t$

OVVERO: f ASSUME IN I TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $\sup f$ e $\inf_I f$ $(\forall y \in (\inf f, \sup f) \; \exists x \in I \mid f(x) = y$

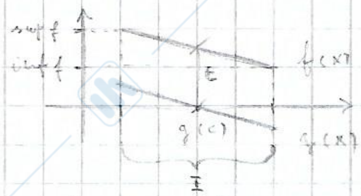
DIM. $\exists x' \in I \quad t < f(x')$ MAX, $\exists x'' \in I \quad t > f(x'')$ MIN

PONGO $g(x') = f(x') - t > 0$ e $g(x'') = f(x'') - t < 0$

$\Rightarrow$ x IL TEOR. degli ZERI $\exists c \in I \mid g(c) = 0$

QUINDI $f(c) - t = 0 \Rightarrow f(c) = t$

(DOVE $t \in (\inf_I f, \sup_I f)$)



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \to \sup_{\mathbb{R}} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \to \inf_{\mathbb{R}} = -\infty$

$f(I)$ É UN'INTERVALLO ($J \subset I$, J INT. ALLORA $f(J)$ É INT.)

$y_1, y_2 \in f(I)$, $y_1 < y_2$ $\quad [y_1, y_2] \subset f(I)$?

$\to$ x IL TEOR. di V. INTERMEDI $\exists x_1 \in I, \exists x_2 \in I \mid f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

$\Rightarrow \inf_{[x_1, x_2]} f \leq y_1 < t < y_2 \leq \sup_{[x_1, x_2]} f$

- CONTINUITÁ della FUNZIONE INVERSA

$f: E \to \mathbb{R}$ ① f CONTINUA ② f INIETTIVA

f^{-1} É CONTINUA? $f^{-1}: f(E) \to E \subset \mathbb{R}$

- SE E É CHIUSO e LIMITATO $\Rightarrow f^{-1}$ É CONTINUA
- SE E É UN INTERVALLO ALLORA STRETTA MONOT. di $f \Leftrightarrow f^{-1}$ É CONTINUA

CALCOLO DIFFERENZIALE

- DEFINIZIONE DERIVATA

SAPENDO CHE:

EQ. RETTA PER 2 PUNTI $\binom{x_1}{y_1}$ e $\binom{x_2}{y_2}$: $y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{\text{COEFF. ANG.}} (x - x_1) + y_1$

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 ACC per A

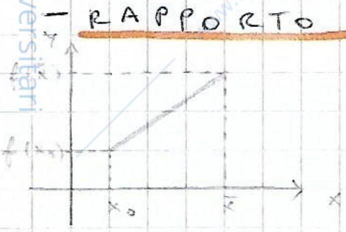
f É CONTINUA IN x_0 SE $f(x) = f(x_0) + o(1)$ per $x \to x_0$

ALLORA f É DERIVABILE IN x_0 SE $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

t.c. $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$

OVVERO $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda = f'(x)$

- RAPPORTO INCREMENTALE



$y = \boxed{\frac{f(\bar{x}) - f(x_0)}{\bar{x} - x_0}} (x - x_0) + f(x_0)$

RAPPORTO INCREMENTALE = COEFF. ANG. della RETTA PASSANTE PER $\bar{x}$ e x_0 (É IL RAPPORTO TRA VARIAZIONE di ORDINATE e VARIAZIONE di ASCISSE)

SE $\exists \lim_{x \to x_0}$ RAPP. INCR. $\Rightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

É LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO IN $(x_0, f(x_0))$

RICORDA: SE PONGO $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$

OTTENGO $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

- CONTINUITÁ delle FUNZIONI DERIVABILI

f DERIVABILE IN $x_0 \Rightarrow f$ CONTINUA IN x_0

DIM. f DER. IN x_0 $\quad \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) / (x - x_0) = f'(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{0} = 0$

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (DEF. di f CONTINUA)

- SE f CONTINUA, f É DERIVABILE ?

NO INFATTI:

$f(x) = |x| \qquad \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0}$ | PRENDENDO $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

$\Rightarrow f$ É CONTINUA IN 0, MA NON É DERIVABILE IN 0

- REGOLE di DERIVAZIONE

$f, g \ \ A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 ACC. per A, f e g DER. ALLORA:

- $f + g$ É DERIVABILE IN x_0 $\quad D(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

DIM. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) + g(x) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right\} = f'(x_0) + g'(x_0)$

- fg É DERIVABILE IN x_0 $\quad D(fg)(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

DIM. $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)g(x) \overbrace{- f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0)}^{\text{SI AGGIUNGE } (=0)} - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$

$= \lim_{x \to x_0} \left\{ f(x)\dfrac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + g(x_0)\dfrac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right\} =$

$= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

- $1/g$ $\ (g(x_0) \neq 0)$ É DER. IN x_0 $\quad D(1/g) = -g'(x_0)/g^2(x_0)$
- $f/g = f \cdot 1/g$ É DER. IN x_0 $\quad D(f/g) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

- TEOREMA di DERIVAZIONE della f COMPOSTA

$f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $g(I) \subset J$ $\quad (f \circ g: I \to \mathbb{R})$ $\quad x_0 \in J \quad y_0 = g(x_0)$

1) f SIA DERIVABILE IN y_0 $\quad$ 2) g SIA DERIVABILE IN x_0

ALLORA $f \circ g$ É DERIVABILE IN x_0

$D(f \circ g)(x_0) = f'(y_0)\, g'(x_0)$

$\to D(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0) \to D f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

- TEOREMA di DERIVAZIONE della f INVERSA

I INTERVALLO, $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$

1) f CONTINUA IN I $\quad$ 2) f INVERTIBILE

3) f DERIVABILE IN x_0 $\quad$ 4) $f'(x_0) \neq 0$

ALLORA $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ É DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$

$D f^{-1}(y_0) = 1/f'(x_0) \qquad J = f(I)$

- TEOREMA di FERMAT

$f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO

1) x_0 INTERNO A I $\quad$ 2) f ABBIA IN x_0 MAX o MIN RELATIVO

3) f DERIVABILE IN x_0

ALLORA $f'(x_0) = 0$

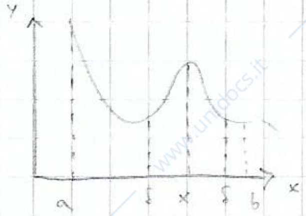
x_0 É MAX RELATIVO SE $\exists\, \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \quad f(x) \leq f(x_0)$

DIM. x_0 MAX RELATIVO $\quad \delta' > 0 \quad (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \subset I$

$\delta'' = \min\{\delta', \delta\} \quad (x_0 - \delta'', x_0 + \delta'') \subset I$

$\forall x \in (x_0 - \delta'', x_0 + \delta'') \quad f(x) \leq f(x_0)$

SEMPRE $f(x) - f(x_0) \leq 0$ $\quad x - x_0$ VARIA



É UN COEFF. ANG.

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \geq 0 & x_0 - \delta'' < x < x_0 \quad (f \nearrow) \\ \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta'' \quad (f \searrow) \end{cases}$

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

X LA UNS. della PERM. del SEGNO

$0 \leq f'(x) \leq 0 \iff f'(x) = 0$

- TEOREMA di ROLLE

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

1) $f \in C^0([a,b])$ 2) f DER. IN (a,b) 3) $f(a) = f(b)$

ALLORA $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = 0$

OVVERO ESISTE UN PUNTO STAZIONARIO

DIM. x IL TEOR. di WEIERSTRASS f AMMETTE MAX e MIN $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)\ \forall x$

SI DISTINGUONO 2 CASI:

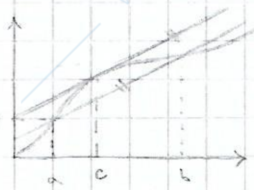
- 1° CASO: x_1 e x_2 CADONO NEGLI ESTREMI
  $x_1 = a$, $x_2 = b$ $\Rightarrow f(x_1) = f(a) = f(b) = f(x_2)$
  $\Rightarrow f(a) \le f(x) \le f(b)$ $f(x)$ COSTANTE per Hp
  $\Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x$ DIMOSTRATO
- 2° CASO: ALMENO UNO DEI DUE PUNTI x_1, x_2 NON CADE NEGLI ESTREMI
  $\to$ x IL TEOR. di FERMAT I MAX e MIN HANNO $f'(x) = 0$ DIMOSTRATO

- TEOREMA di LAGRANGE

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

1) $f \in C^0([a,b])$ 2) f DERIVABILE IN (a,b)

ALLORA $\exists\, c \in (a,b) \mid f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



GEOMETRICAMENTE: $\exists\, c$ PER IL QUALE LA r TANGENTE a f IN $(c, f(c))$ È // AL SEGMENTO FORMATO da $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

DIM. $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, RISPETTA Hp

$g(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$

x TEOR. di ROLLE $\exists\, c \in (a,b) \mid g'(c) = 0$

$\Rightarrow g'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ✓

- CRITERI di MONOTONIA

$f: I \to \mathbb{R}$ I INTERVALLO, f DERIVABILE, ALLORA:

- f CRESCENTE IN I $\iff f'(x) \ge 0\ \forall x \in I$
- f DECRESCENTE IN I $\iff f'(x) \le 0\ \forall x \in I$

DIM. ① f CRESCENTE $\Rightarrow f'(x) \ge 0\ \forall x \in I$ $x_0 \in I$

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0\ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ $x > x_0$ $\frac{+}{+}$, $x < x_0$ $\frac{-}{-}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$ CRESCENTE $x \ge x_0 \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)$

DA DIM. ② $f'(x) \ge 0\ \forall x \in I \Rightarrow f$ CRESCENTE

$x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ (MONOTONIA di f)

$f|_{[x_1, x_2]}$, $f \in C^0([x_1, x_2])$, f DER. IN (x_1, x_2)

x IL TEOR. di LAGRANGE $\exists\, c \in (x_1, x_2)$

t.c. $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \ge 0$ $[x_1, x_2] \subset I$
$\hookrightarrow$ VEDI 2° RIGA

- $f'(x) > 0$ IN I $\Rightarrow f$ STRETT. CRESCENTE
- $f'(x) < 0$ IN I $\Rightarrow f$ STRETT. DECRESCENTE

DIM (STRETT. CRESCENTE) $x_1 < x_2$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0$

$f(x_2) - f(x_1) > 0$

$\forall x_1, x_2$ $x_1 < x_2$ $f(x_1) < f(x_2)$

- CRITERIO di STRETTA MONOTONIA

$f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, SONO EQUIVALENTI:

1) f STRETT. CRESCENTE
2) $f'(x) \ge 0\ \forall x \in I$ e f' NON SI ANNULLA IN NESSUN INTERVALLO APERTO

- CARATTERIZZAZIONE delle f a DERIVATA NULLA IN UN INTERVALLO

$f: I \to \mathbb{R}$, I INTERVALLO, f DERIVABILE

ALLORA f COSTANTE IN I $\Leftrightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in I$

DIM. $f = \text{cost.} \Rightarrow f' = 0$ f cost se $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

$f' = 0$ IN I $\begin{cases} f' \geq 0 \text{ IN I} \\ f' \leq 0 \text{ IN I} \end{cases}$ x i CRITERI di MONOTONIA

$f'=0 \Rightarrow f$ cost $\quad x = \bar{x}$ $\quad f(x) \leq f(\bar{x}) \ \forall x \leq \bar{x}$ $\quad f(x) \geq f(\bar{x}) \ \forall x \leq \bar{x}$ $\rightarrow \forall x \leq \bar{x}$ $\quad f(x) \leq f(\bar{x}) \leq f(x)$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = f(x)$

- TEOREMA di DE L'HOPITAL $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$

- $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $l \in \mathbb{R}^*$

1) $\lim_{x \to a^+} f = 0$ $\lim_{x \to a^+} g = 0$ $\left[o \ \lim_{x \to a^+} f = \pm\infty \ \lim_{x \to a^+} g = \pm\infty \right]$

2) f e g DERIVABILI IN (a, b)

3) $g'(x) \neq 0$ IN (a, b)

SE $\exists \lim_{x \to a^+} f'/g' = l$ ALLORA $\lim_{x \to a^+} f/g = l$.

DIM. $\lim_{x \to a^+} f = \lim_{x \to a^+} g = 0$

$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & a < x < b \\ 0 & x = a \end{cases}$ $\quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & a < x < b \\ 0 & x = a \end{cases}$

$\lim_{x \to a^+} f/g = \lim_{x \to a^+} \tilde{f}/\tilde{g}$ $\quad \lim_{x \to a^+} f'/g' = l$

$\forall V_l \ \exists \delta > 0 \mid x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f'(x)/g'(x) \in V_l$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ PER IL TEOR. di CAUCHY $\exists c$ e CADE IN $(a, a+\delta)$

[POSSO QUINDI APPLICARE CAUCHY IN $[a, x]$

$\exists c \in (a, x) \mid \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

PASSANDO al $\lim_{x \to a^+}$ OTTENIAMO LA TESI]

- FORMULA di TAYLOR

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, I INTERVALLO

f DERIVABILE n VOLTE IN x_0, $n \geq 1$

POLINOMIO di TAYLOR RELATIVO ad f di ORDINE n e di PUNTO INIZIALE x_0:

$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$

RESTO: $R_{n,f,x_0} = f(x) - T_{n,x_0}(x)$

- TEOREMA di TAYLOR-PEANO · MANCA DIM?

SE SODDISFATTE Hp FORMULA di TAYLOR ALLORA:

$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^k} = 0$ $[R_n(x) = o((x - x_0)^k)$ per $x \to x_0]$

VALE IL VICEVERSA: SE $f: I \to \mathbb{R}$, DERIVABILE IN x_0 n VOLTE e SE P_n POLINOMIO di grado n t.c. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$ $[f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)]$

ALLORA: P_n È IL POLINOMIO di TAYLOR di f di PUNTO INIZIALE x_0 e ORDINE n

$\rightarrow f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n)$ F. TAYLOR con RESTO PEANO

$\rightarrow$ SE $x_0 = 0 \Rightarrow$ POLINOMIO di MCLAURIN

- CRITERIO di CONVESSITÁ x f 2 VOLTE DERIVABILI

$f: I \to \mathbb{R}$, f DERIVABILE

f CONVESSA $\Leftrightarrow$ f' CRESCENTE (CONCAVA - DECRESCENTE)

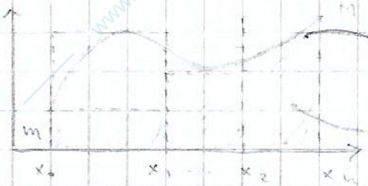
SE f 2 VOLTE DERIVABILE IN I

f CONVESSA $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ [f CONCAVA $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0$]

INTEGRALE SECONDO RIEMANN

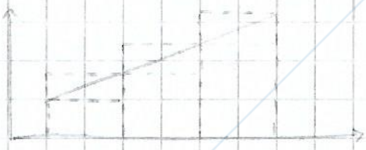
- INTEGRABILITÀ f LIMITATA

- PARTIZIONE D di $[a,b]$: È UN INSIEME FINITO $\{x_i \mid i = 0, \dots, n\} \subseteq [a,b]$ t.c. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
LA SUA AMPIEZZA $|D| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid \; \leq i \leq n\}$



$$S(D,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$s(D,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$



- $m(b-a) \leq \sup\{s(D,f) \mid D \text{ part.}\} \leq \inf\{S(D,f) \mid D \text{ part}\} \leq M(b-a)$
DATO dal LEMMA: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, D_1 e D_2 PART. di $[a,b]$:
SE D_1 È PIÙ FINE di D_2 (AMPIEZZA MINORE) ALLORA:
$s(D_2,f) \leq s(D_1,f) \leq S(D_1,f) \leq S(D_2,f)$
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA È INT. SECONDO RIEMANN IN $[a,b]$ SE $\sup\{s(D,f) \mid D \text{ part.}\} = \inf\{S(D,f) \mid D \text{ part.}\}$
QUESTO VALORE È DETTO INT. di RIEMANN $:= \int_a^b f(x)\,dx$

- PROPRIETÀ INTEGRALI

a) $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow f+g \in R([a,b])$
$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$
b) $\lambda \in \mathbb{R}$ $f \in R([a,b]) \Rightarrow \lambda f \in R([a,b])$
$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$
] LINEARITÀ
c) $f, g \in R([a,b]) \Rightarrow fg \in R([a,b])$ $\int_a^b fg\,dx \neq \int_a^b f\,dx \int_a^b g\,dx$
d) $f \in R([a,b])$, $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq 0$
e) $f, g \in R([a,b])$, $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$
f) $f \in R([a,b]) \Rightarrow |f| \in R([a,b])$
g) IN $[a,b]$ $a < b$ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
$b < a$ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
h) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$] ADDITIVITÀ
$f: I \to \mathbb{R}$, INTEGRABILE SE $a, b, c \in I$

- INTEGRABILITÀ f CONTINUE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ LIMITATA
- f È CONTINUA IN $[a,b]$ ALLORA f È INTEGRABILE
- $\exists\, a_1, \dots, a_n \in [a,b]$ t.c. f SIA CONTINUA IN $[a,b] \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ ALLORA f È INTEGRABILE e SI PUÒ APPLICARE LA PROPRIETÀ ADDITIVA

- INTEGRABILITÀ f MONOTONE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f MONOTONA IN $[a,b]$ ALLORA f È INTEGRABILE

- TEOREMA FONDAMENTALE del CALCOLO INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$
$c \in [a,b]$ $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ (f INTEGRALE)
$F_c: [a,b] \to \mathbb{R}$
Ts: F_c È DERIVABILE IN OGNI PUNTO di $[a,b]$
$F_c'(x) = f(x)$

- TEOR. della MEDIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ f LIMITATA
a) f È INTEGRABILE IN $[a,b]$ $\inf_{[a,b]} f \leq \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{K} \leq \sup_{[a,b]} f$
b) SE f È CONTINUA IN $[a,b]$
$\exists\, c \in (a,b)$ $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

DIM. "TEOR. FOND."

I PARTE: $x_0 \in [a,b]$ $\lim_{h\to 0} \frac{F_c(x_0+h)-F_c(x_0)}{h} \overset{?}{=} f(x_0)$

$\frac{1}{h}\{F_c(x_0+h)-F_c(x_0)\} = \frac{1}{h}\{\int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt\} =$

$= \frac{1}{h}\{\int_c^{x_0+h} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt\} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt$

→ SE $h<0$ $\frac{1}{-h}\int_{x_0+h}^{x_0} f(t)\,dt = f(\xi)$ $= \frac{F_c(x_0+h)-F_c(x_0)}{h}$

→ SE $h>0$ $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(\xi)$

QUINDI $|\xi - x_0| < h$ $(x_0 - h < \xi < x_0+h)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{F_c(x_0+h)-F_c(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x_0)$

- $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ $G' = f$ (G PRIMITIVA di f)

$F'_c = f$ $F_c(x) = G(x) - c$ $G - F_c = c$ (COSTANTE)

$(G-F_c)' = 0$ in $[a,b]$

IN PIÙ SAPENDO CHE $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x)+c$

SE $x=a$ $\Rightarrow F(a) = G(a)+c = 0 \Rightarrow c = -G(a)$

$\Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$

SAPENDO CHE $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =$

$= (G(b)-c) - (G(a)-c) = G(b) - G(a)$

- INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c$ INFATTI $\int f(x) = F(x)+c$

DIM. $\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

- INTEGRAZIONE PER PARTI

$(fg)' = f'g + fg'$

$fg + c = \int (f'g + g'f)\,dx = \int (fg)'\,dx = \int f'g\,dx + \int g'f\,dx$

$\Rightarrow \int g'f\,dx = fg - \int f'g\,dx$

INTEGRALI IMPROPRI

- DEFINIZIONE

$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ f È INT. IN SENSO IMPROPRIO SE:

1) $\forall c > a$ $f \in \mathcal{R}([a,c])$

2) $\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ ESISTE FINITO

$f:(-\infty,a]\to\mathbb{R}$ f È INT. IN SENSO IMPROPRIO SE:

1) $\forall c < a$ $f \in \mathcal{R}([c,a])$

2) $\lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,dx$ ESISTE FINITO

N.B. SENSO IMPROPRIO = GENERALIZZATO (S.G.)

- CRITERIO del CONFRONTO

SE f NON È INT. IN S.G. ANCHE g NON LO È

$f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$

1) $f \in \mathcal{R}([a,c])$ $\forall c \geq a$ (ANCHE g)

2) $\exists\, \bar{c}$ t.c. $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [\bar{c},+\infty)$

ALLORA SE g È INT. IN S.G. ANCHE f È INT. IN S.G.

DIM. $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^{\bar{c}} f(x)\,dx + \int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx$ $c \geq \bar{c}$

$\lim_{c\to+\infty} \int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx$ $\int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx \leq \int_{\bar{c}}^{c} g(x)\,dx \leq \int_{\bar{c}}^{+\infty} g(x)\,dx$

× Hp BASTA DIMOSTRARE CHE ESISTA FINITO

$f \geq 0$ SU $[a,+\infty)$ $\overset{*}{\Rightarrow}$ $\int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx = F\nearrow = F(c)$ × Hp

$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \sup F(t)$ $t \in [a,+\infty)$

$\forall c \geq \bar{c}$ $\int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx \leq M \Rightarrow \lim_{c\to+\infty} \int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx \leq M$

IL LIMITE ESISTE FINITO, DIMOSTRATO ✓

* POICHÉ $f \geq 0$, AMPLIANDO L'I. d'INTEGRAZIONE $\int_{\bar{c}}^{c} f(x)\,dx$ CRESCE

- CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g : [a,+\infty)\to\mathbb{R}$ DEFINITIVAMENTE NON NEG. per $x\to+\infty$

1) $f, g \in \mathcal{R}([a,c])$ $\forall c \geq a$

2) $f(x) = g(x)(1+o(1))$ per $x\to+\infty$

ALLORA f È INT. IN S.G. $\Leftrightarrow$ g È INT. IN S.G.

due Hp $\exists\, \bar{c} \in (a,c)$ | $0 \leq \frac{1}{2}f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$ per $\bar{c} \leq x < +\infty$

$f/2$ e $2f$ SONO INT. IN S.G. $\Leftrightarrow$ f lo È ($\Rightarrow$ VEDI DIM. PREC.)

SERIE NUMERICHE

- DEFINIZIONE

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$\{S_n\} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ = SERIE NUMERICA di TERM. GEN. a_n

SE $\{S_n\}$ É CONVERGENTE (ESISTE LIMITE)

SOMMA delle SERIE $= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- SERIE GEOMETRICA

MOLT. SOPRA e SOTTO $\times (1-r)$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ SERIE GEOM. di RAGIONE r

$\to$ per $r = 1$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad S_n = 1+1+\ldots+1 = \sum_{k=0}^{n} 1^n$

$S_n = n+1 \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$ DIVERGE SEMPRE

$\to$ per $r \neq 1 \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = 1 - r^{n+1}/1-r$

$\Rightarrow (1-r)(1+r+\ldots+r^n) = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n - r - r^2 - \ldots$

$= 1 - r^{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} = \begin{cases} 1/(1-r) & |r|<1 \quad (-1<r<1) \\ +\infty & r \geq 1 \\ \text{IND} & r \leq 1 \end{cases}$

INFATTI:

$(1-(-1)^{n+1})/2 = \begin{cases} 1 & \text{SE } n \text{ PARI} \\ 0 & \text{SE } n \text{ DISPARI} \end{cases} \to$ IND.

- CRITERIO della RADICE

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow$ SERIE CONVERGENTE

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE

OVVERO SE $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.:

1) $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ É CONVERGENTE $(\forall n \geq n_0)$

2) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ " É DIVERGENTE $(\forall n \geq n_0)$

- CRITERIO del RAPPORTO

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad a_n \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1})/a_n < 1 \Rightarrow$ SERIE CONVERGENTE

$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1})/a_n > 1 \Rightarrow$ SERIE DIVERGENTE

OVVERO SE $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.:

1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ É CONVERGENTE $(\forall n \geq n_0)$

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow$ " É DIVERGENTE $(\forall n \geq n_0)$

DIM. 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k \quad \forall n \geq n_0 \quad a_{n+1} \leq k\, a_n$

ALLORA $a_n \leq a_{n-1} k \leq a_{n-2} k^2 \leq \ldots \leq a_1 k^{n-1}$

COSTANTE

$\Rightarrow$ x il CONFRONTO e LA SERIE GEOM. $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 k^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_1 k^{-1}) k^n \to$ LA SERIE $\sum_{n=0}^{\infty} k^n$ CONVERGE SE $0 < k < 1 \quad (0 \leq k)$

2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ per $n \to \infty \Rightarrow a_n$ CRESCENTE

$\Rightarrow a_n$ NON TENDE A 0 $\Rightarrow$ COND. NEC. NON SODD.

- RELAZIONI TRA SERIE e INT. IMPROPRI

DATA $\{a_k\} \geq 0$ POSSIAMO DEFINIRE $\bar{f}, \underline{f} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ COSTANTI A TRATTI $\begin{cases} \bar{f}(x) = a_k & \text{SE } k \leq x < k+1 \\ \underline{f}(x) = a_{k+1} & \text{SE } k \leq x < k+1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

DALLA DEF. $\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \int_0^{+\infty} \bar{f}(x)\,dx = a_0 + \int_0^{+\infty} \underline{f}(x)\,dx$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ É CONV. $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \bar{f}(x)\,dx$ É CONV.

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \underline{f}(x)\,dx$ " "

- CRITERIO INTEGRALE

$f: [k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$

1) $f \geq 0$ IN $[k_0, +\infty)$ $\qquad$ 2) $f \searrow$

TESI: $\sum_{n=k_0}^{\infty} f(n)$ É CONVERGENTE (DIVERGENTE) $\Leftrightarrow \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ è CONV. (DIV.)

$\sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq \int_{N-1}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$