Esami scritti di Analisi Matematica I 2017 - 2018

1 Esame del 31 gennaio 2018 - I^o turno

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = e^3 - e^{4\sqrt{|x|}-x}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ nel suo dominio e stabilire la natura degli eventuali punti di non derivabilità. Calcolare la funzione derivata $f'(x)$.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Determinare il più grande intervallo del tipo $(k, +\infty)$, $k \in \mathbb{R}$, sul quale la restrizione di f risulta essere invertibile. Determinare il dominio e studiare la monotonia della funzione inversa.

Esercizio 2, versione A. (5 punti)

(a) Enunciare un teorema del confronto per funzioni con limite finito

(b) Mostrare che se $f(x)$ è una funzione tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $M(x)$ è la funzione mantissa, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x)M(x) = 0$.

(c) Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^{-x}+1}{M(4^{-x})+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4^{-x}+1}{M(4^{-x})+1}$$

dove $M(x)$ è la funzione mantissa.

Esercizio 2, versione B. (5 punti)

(a) Enunciare un teorema del confronto per funzioni con limite $+\infty$.

(b) Mostrare che se $f(x)$ è una funzione tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $M(x)$ è la funzione mantissa, allora $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty$.

(c) Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+1}{M(2^x)+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{M(2^x)+1}$$

dove $M(x)$ è la funzione mantissa.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) dom$f = \mathbb{R}$. Poiché $4\sqrt{|x|} - x = -x + o(x)$, per $x \to \pm\infty$, abbiamo che

$$\begin{array}{lcll} f(x) & = & e^3 + o(1), & \text{per } x \to +\infty, \\ f(x) & = & -e^{-x+o(x)} + e^3, & \text{per } x \to -\infty. \end{array}$$

Ne segue che

$$\begin{array}{lcl} \lim_{x\to+\infty} f(x) & = & e^3 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) & = & -\infty \end{array}$$

e quindi

1) f ha asintoto orizzontale destro di equazione $y = e^3$.

2) f non ha asintoto obliquo sinistro, perché f è un infinito di ordine superiore a 1 rispetto a x, per $x \to -\infty$.

Osserviamo adesso che

$$f(x) = 0 \iff e^{4\sqrt{|x|}-x} = e^3 \iff 4\sqrt{|x|} - x = 3 \iff 4\sqrt{|x|} = x + 3.$$

L'equazione ha soluzioni se e solo se $x + 3 \geq 0$. Elevando al quadrato otteniamo

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 16|x| = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$$

da cui ricaviamo i due sistemi

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x^2 + 22x + 9 = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\begin{cases} -3 \leq x < 0 \\ x_{1,2} = -11 \pm 4\sqrt{7} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x_{3,4} = 5 \pm 4 \end{cases} \implies x_3 = 1,\ x_4 = 9.$$

Osserviamo che $-11 - 4\sqrt{7} < -3$, e quindi non è una soluzione accettabile, mentre lo è la soluzione $-11 + 4\sqrt{7}$, poiché $-3 < -11 + 4\sqrt{7} < 0$.

Dunque f ha tre zeri: $x_2 = -11 + 4\sqrt{7}$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 9$.

b) Osserviamo che $\sqrt{|x|}$ non è derivabile in $x = 0$; perciò f è composizione di funzioni derivabili, e quindi è derivabile, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dobbiamo verificare invece se f è derivabile in $x = 0$. Possiamo procedere in due modi diversi:

Metodo 1. Usando i limiti notevoli, vediamo che

$$f(x) = e^3 - 1 - 4\sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|}), \qquad \text{per} \;\; x \to 0.$$

Applicando adesso la definizione di derivata di una funzione in un punto otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\sqrt{|x|} + o(\sqrt{|x|})}{x}$$

da cui segue

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty.$

Dunque f non è derivabile in $x = 0$, che risulta essere un punto di cuspide di f.

Metodo 2. Poiché f è continua in $\mathbb{R}$ ed è derivabile se $x \neq 0$, possiamo calcolare la derivata fuori da $x = 0$ ed applicare il teorema "del tappabuchi" per verificare se f è derivabile in $x = 0$.

Ricordando che $\frac{d}{dx}|x| = \text{sgn } x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{4\sqrt{|x|}-x}\left[\frac{4}{2\sqrt{|x|}}\,\text{sgn } x - 1\right] = -e^{4\sqrt{|x|}-x}\left[\frac{2}{\sqrt{|x|}}\,\text{sgn } x - 1\right] = \\ &= \begin{cases} e^{4\sqrt{|x|}-x}\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right) & x > 0 \\ e^{4\sqrt{|x|}-x}\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{-x}}\right) & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{4\sqrt{x}-x}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{4\sqrt{-x}-x}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{-x}}\right) = +\infty.$$

Tramite il teorema "del tappabuchi" giungiamo così alla conclusione che f non è derivabile in $x = 0$, che risulta essere un punto di cuspide per f.

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di f determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di f'.

Osserviamo che per $f'(x) > 0$ per ogni $x < 0$, dato che $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) > 0$.

Per le $x > 0$ invece

$$f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4.$$

Dunque $x = 4$ è l'unico punto critico di f. Osserviamo che anche il punto di cuspide $x = 0$ è un possibile punto di estremo della funzione. Per studiare la natura dei due punti, studiamo il segno di f'. Vediamo che, per le $x > 0$:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geq 4.$$

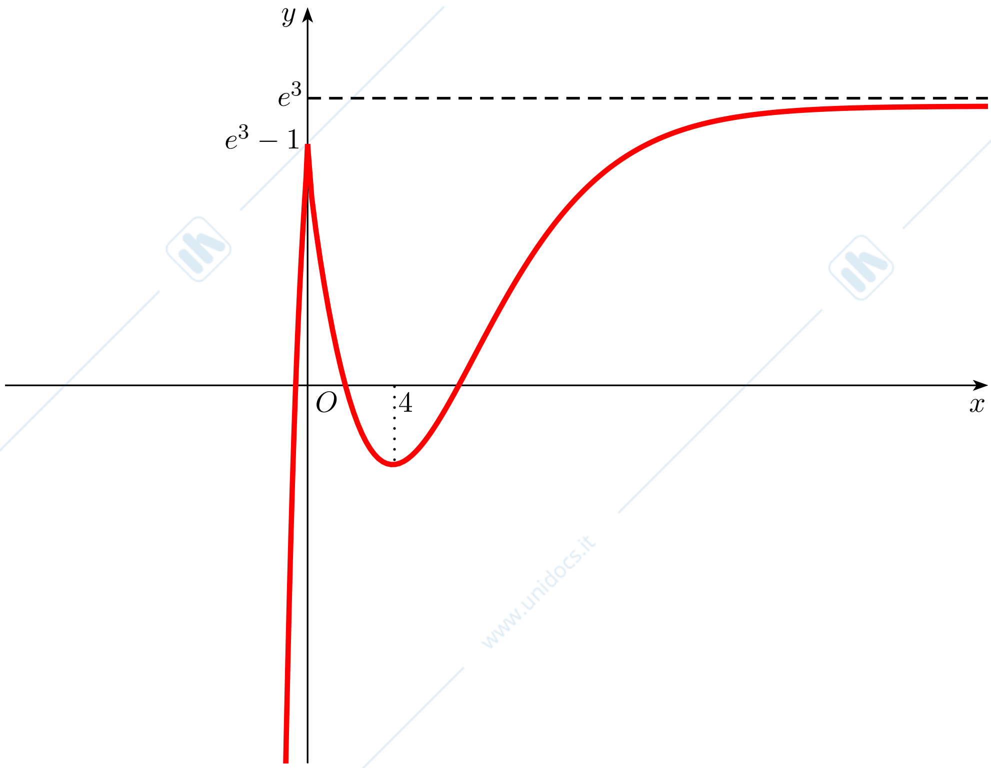
Ne segue che $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (0, 4)$. Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- f è strettamente crescente su $(-\infty, 0]$ e su $[4, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli),
- f è strettamente decrescente su $[0, 4]$.

Osserviamo che $f(0) = e^3 - 1 < e^3$. Dunque $x = 0$ è un punto di massimo locale (o relativo), perché esistono $x \in \operatorname{dom} f$ tali che $f(x) > f(0)$, dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^3$.

$x = 4$ è un punto di minimo locale (o relativo), perché la funzione è illimitata inferiormente. Vediamo anche che $f(4) = e^3 - e^4 < 0$.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) La restrizione di f ad una semiretta $(k, +\infty)$, cioè $f\big|_{(k,+\infty)}$, è invertibile se e solo se $k \geq 4$. Dunque il più grande intervallo $(k, +\infty)$ su cui f è invertibile è $(4, +\infty)$.

dom $(f\big|_{(4,+\infty)})^{-1} = \text{im } (f\big|_{(4,+\infty)}) = (e^3 - e^4, e^3)$. Poiché $f\big|_{(4,+\infty)}$ è strettamente crescente sul suo dominio, anche la sua funzione inversa è strettamente crescente sul suo dominio.

Esercizio 2, versione A.

a) Enunciamo entrambi i teoremi del confronto nel caso di limiti finiti. Lo studente poteva enunciare uno dei due a sua scelta.

Primo teorema del confronto. *Siano f e g due funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di A. Supponiamo che*

1. *esista un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x)$;*
2. *esistano $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$.*

Allora $\ell \leq m$.

Secondo teorema del confronto, o dei due carabinieri. *Siano f, g e h tre funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di A. Supponiamo che*

1. *esista un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;*
2. *$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.*

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

b) Ricordiamo che $M(x) = x - [x]$ è una funzione periodica di periodo 1, tale che $0 \leq M(x) < 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |f(x)M(x)| < |f(x)|$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ se e solo se $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = 0$, per il Teorema dei due carabinieri sopra enunciato abbiamo che $\lim_{x\to+\infty} |f(x)M(x)| = 0$, da cui segue che $\lim_{x\to+\infty} f(x)M(x) = 0$.

Lo stesso risultato si può dimostrare anche utilizzando la definizione di limite. Infatti

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a \in \mathbb{R} \;\; \text{tale che, se} \;\; x \in (a, +\infty) \cap \operatorname{dom} f \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < \varepsilon.$$

Dunque, per $x \in (a, +\infty) \cap \operatorname{dom} f$ abbiamo che

$$0 \leq |f(x)M(x)| < \varepsilon$$

e dunque, per la definizione di limite, $\lim_{x\to+\infty} f(x)M(x) = 0$.

c) Osserviamo che $1 \le M(4^{-x}) + 1 < 2$, e dunque $\frac{1}{2} < \frac{1}{M(4^{-x})+1} \le 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque

$$\frac{1}{2}(4^{-x}+1) < \frac{4^{-x}+1}{M(4^{-x})+1} \le 2(4^{-x}+1), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(4^{-x}+1) = +\infty$, per il Teorema del confronto nel caso di infiniti, abbiamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^{-x}+1}{M(4^{-x})+1} = +\infty.$$

Quando $x \to +\infty$, conviene utilizzare la sostituzione $t = 4^{-x}$, ricordando che $\lim_{t\to 0^+} M(t) = 0$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4^{-x}+1}{M(4^{-x})+1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t+1}{M(t)+1} = 1.$$

Esercizio 2, versione B.

a) **Teorema del confronto per limiti uguali a** $+\infty$. *Siano f e g due funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia x_0 un punto di accumulazione di A. Supponiamo che*

1. *esista un intorno I di x_0 tale che, per ogni $x \in I \cap A \setminus \{x_0\}$, $g(x) \ge f(x)$;*
2. *esista $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.*

Allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

b) Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + M(x) \ge f(x)$.

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, per il teorema enunciato in precedenza abbiamo che anche $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty$.

Lo stesso risultato si può dimostrare anche utilizzando la definizione di limite. Infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\forall k \in \mathbb{R} \;\; \exists a \in \mathbb{R} \;\; \text{tale che, se} \;\; x \in (a, +\infty) \cap \operatorname{dom} f \quad \Longrightarrow \quad f(x) > k.$$

Dunque, per $x \in (a, +\infty) \cap \operatorname{dom} f$ abbiamo che

$$f(x) + M(x) \ge f(x) > k.$$

Per definizione di limite, $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + M(x)) = +\infty$.

c) L'esercizio è del tutto analogo a quello della versione A. In questo caso, ponendo $t = 2^x$, abbiamo che:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+1}{M(2^x)+1} = \lim_{t\to0^+} \frac{t+1}{M(t)+1} = 1.$$

Procedendo per confronto come nella versione A otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{M(2^x)+1} = +\infty.$$

2 Esame del 31gennaio 2018 - II^o turno

Esercizio 1. (8 punti)

Si consideri la funzione

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2-x-2}}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ nel suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Rappresentare nel piano l'insieme

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ :\ y^2(x^2-x-2)-x^2=0\}.$$

Esercizio 2, versione A. (5 punti)

(a) Enunciare il Teorema della Media Integrale.

(b) Dato $a>0$ determinare $M\in\mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_0^a e^{-x^2}\,dx \le M$.

(c) Mostrare che la funzione integrale

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

ha asintoti orizzontali.

Esercizio 2, versione B. (5 punti)

(a) Enunciare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

(b) Dato $a>0$ determinare $M\in\mathbb{R}$ tale che $\displaystyle\int_0^a e^{x^2}\,dx \le M$.

(c) Mostrare che la funzione integrale

$$F(x)=\int_0^x e^{t^2}\,dt$$

non ha asintoti orizzontali.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è definita se $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) > 0$, cioè se $x < -1$ o se $x > 2$: ne segue che dom $f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

Osserviamo che $f(x) > 0$, per ogni $x \in$ dom f.

Inoltre

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to2} f(x) = +\infty$.

Ne segue che

- f ha asintoto orizzontale bilaterale di equazione $y = 1$,
- f ha asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 2$.

b) Osserviamo che f è composizione di funzioni derivabili in tutto il dominio. Dobbiamo quindi limitarci a calcolarne la derivata. Osserviamo che $f(x) = \operatorname{sgn} x \, \dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$.

$$f'(x) = \operatorname{sgn} x \, \frac{\sqrt{x^2-x-2} - x\,\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}}{x^2-x-2} = \operatorname{sgn} x \, \frac{2(x^2-x-2) - x(2x-1)}{2(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x-2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x+4}{2(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x-2}} & \text{se } x < -1 \\[2ex] -\dfrac{x+4}{2(x^2-x-2)\sqrt{x^2-x-2}} & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di f determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di f'.

$f'(x) = 0$ se e solo se $x = -4$.

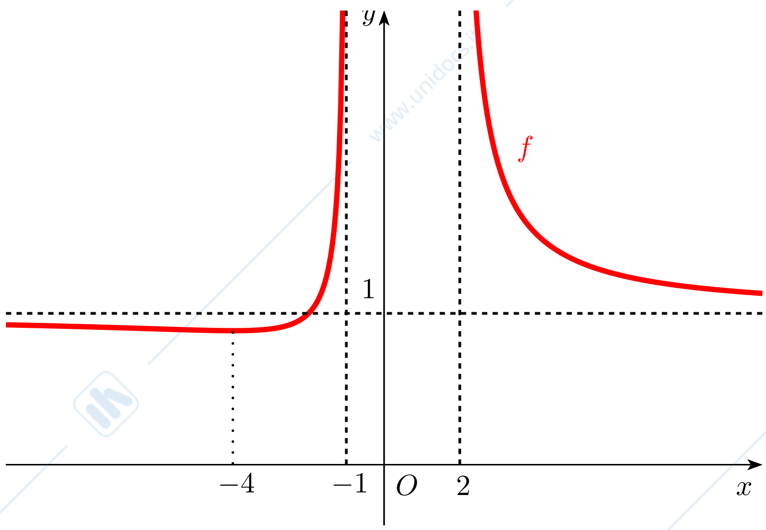
- Se $x > 2$, $f'(x) < 0$.
- Se $x < -1$, $f'(x) > 0$ se e solo se $-4 < x < -1$.

Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- f è strettamente crescente su $[-4, -1)$,
- f è strettamente decrescente su $(-\infty, -4]$ e su $(2, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli).

Ne segue che $x = -4$ è l'unico punto di estremo locale della funzione ed è un punto di minimo assoluto per f. Per meglio disegnare il grafico, osserviamo che $f(-4) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} < 1$.

d) Un grafico qualitativo di f è



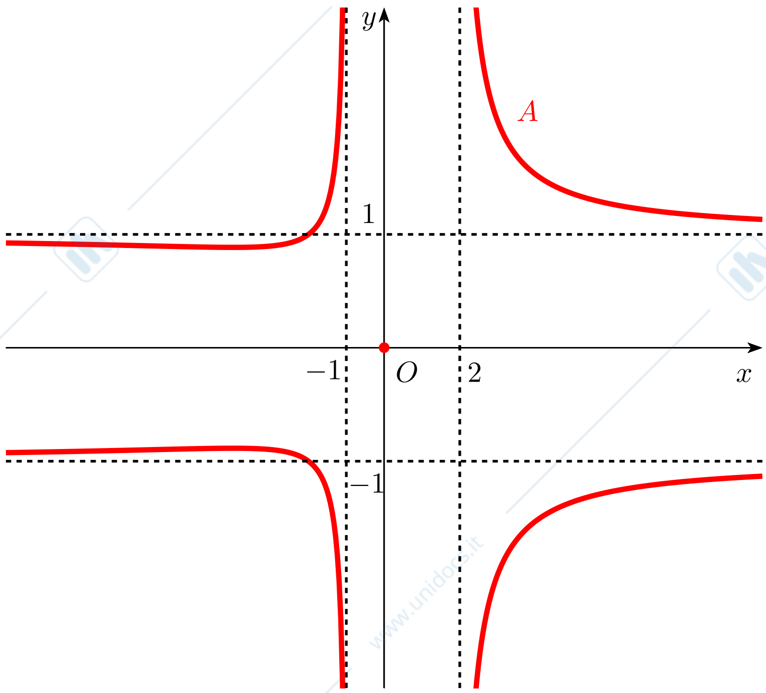
e) Dobbiamo disegnare l'insieme A dei punti del piano cartesiano che soddisfano l'equazione

$$y^2(x^2 - x - 2) - x^2 = 0.$$

Prima di tutto vediamo che $(0, 0) \in A$. I punti $x = -1$ e $x = 2$ in cui si annulla $x^2 - x - 2$ non appartengono ad A, per cui possiamo scrivere

$$y^2 = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \pm\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

Dunque per disegnare l'insieme A è sufficiente disegnare il grafico della funzione f, il grafico della funzione $-f$ (simmetrico del precedente rispetto all'asse x) e l'origine.



Esercizio 2, Versione A.

a) Data una funzione integrabile f su un intervallo chiuso $[a, b]$, si dice *media integrale* di f su $[a, b]$ il numero reale $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema della Media Integrale

1. *Sia f una funzione integrabile su un intervallo chiuso $[a, b]$; siano $i = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ e $s = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Allora $i \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq s$.*
2. *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.*

b) Poiché $f(x) = e^{-x^2}$ è decrescente su $\mathbb{R}$, $f(x) \leq f(0) = 1$ per ogni $x \in [0, a]$. Dunque, per la monotonia dell'integrale:

$$\int_0^a e^{-x^2}\,dx \leq \int_0^a 1\,dx = a.$$

Affinché la disuguaglianza richiesta sia verificata possiamo scegliere $M = a$.

c) La funzione integrale assegnata ha asintoti orizzontali se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left[-\int_x^0 e^{-t^2}\,dt\right]$$

esistono finiti, uguali a $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ rispettivamente. In questo caso F ha asintoto orizzontale destro di equazione $y = \ell_1$ e asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = \ell_2$.

Osserviamo che i due limiti esistono finiti se e soltanto se gli integrali impropri $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ e $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx$ convergono. Poiché la funzione $e^{-x^2} = o(x^2)$ per $x \to \pm\infty$, per il criterio del confronto asintotico i due integrali impropri convergono e la funzione integrale assegnata ha asintoto orizzontale destro e sinistro.

Esercizio 2, Versione B.

a) **Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**

Sia f una funzione continua su un intervallo aperto I. Dati $x_0, x \in I$ consideriamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

Allora la funzione F è derivabile su I e $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$.

b) Poiché $f(x) = e^{x^2}$ è crescente su $\mathbb{R}$, $f(x) \le f(a) = e^{a^2}$ per ogni $x \in [0, a]$. Dunque, per la monotonia dell'integrale:

$$\int_0^a e^{x^2}\,dx \le \int_0^a e^{a^2}\,dx = ae^{a^2}.$$

La disuguaglianza richiesta è verificata per ogni $M \ge ae^{a^2}$.

c) In questo caso la funzione $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = \lim_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty$. Dunque gli integrali impropri $\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx$ e $\int_{-\infty}^0 e^{x^2}\,dx$ divergono e la funzione integrale $\int_0^x e^{t^2}\,dt$ non ha asintoti orizzontali.

---

3 Esame del 13 febbraio 2018

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log |\sqrt[3]{x} + 2| + \sqrt[3]{x}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Sia

$$g(x) = \frac{x-\alpha}{|x-\alpha|} f(x)$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. A partire dal grafico di $f(x)$ ottenuto al punto precedente, tracciare un grafico qualitativo di $g(x)$ per $\alpha = 1$ e stabilire se esistono valori di α per i quali la funzione $g(x)$ possa essere prolungata per continuità in $x = \alpha$.

Esercizio 2. (5 punti)

(a) Dare la definizione di funzione crescente su un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Date una funzione f crescente su A e una funzione g decrescente su $\mathbb{R}$, stabilire la monotonia della funzione composta $g \circ f$ su A, motivando opportunamente la risposta.

(c) Sia A l'intervallo $(3, 5)$ e sia f crescente su A. Dimostrare che $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ non può essere uguale a $+\infty$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) La funzione è definita se $|\sqrt[3]{x}+2|>0$, cioè se $\sqrt[3]{x}+2\neq 0$. Ne segue che

$$\mathrm{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-8\}=(-\infty,-8)\cup(-8,+\infty).$$

Osserviamo inoltre che

$$f(x)=\sqrt[3]{x}+o(\sqrt[3]{x}), \qquad \text{per } x\to-\infty \text{ e per } x\to+\infty.$$

Dunque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}+o(\sqrt[3]{x})\right)=+\infty$ mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Poiché f è un infinito di ordine inferiore a 1 rispetto a x, per $x\to\pm\infty$, la funzione non ha asintoto obliquo né destro né sinistro.

Inoltre $\lim_{x\to-8} f(x)=-\infty$; la retta $x=-8$ è l'unico asintoto verticale di f. Riassumendo:

1) f non ha asintoti obliqui;

2) la retta $x=-8$ è asintoto verticale bilaterale per f.

b) Osserviamo che $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x=0$; dunque f è composizione di funzioni derivabili, e quindi è derivabile, per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{-8,0\}$. Dobbiamo verificare invece se f è derivabile in $x=0$. Possiamo procedere in due modi diversi:

Metodo 1. Usando la definizione di derivata, calcoliamo il limite del rapporto incrementale, con $x_0=0$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \log|\sqrt[3]{x}+2|+\sqrt[3]{x}=\log\left|2\left(1+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\right)\right|-\sqrt[3]{x}= \\ &= \log 2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+o(\sqrt[3]{x})=\log 2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+o(\sqrt[3]{x}), \qquad \text{per } \ x\to 0. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log|\sqrt[3]{x}+2|+\sqrt[3]{x}-\log 2}{x}= \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+o(\sqrt[3]{x})}{x}=+\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che f non è derivabile in $x=0$, che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

Metodo 2. Poiché f è continua nel suo dominio ed è derivabile se $x \in \mathrm{dom} f \setminus \{0\}$, possiamo calcolare la derivata fuori da $x = 0$ e applicare il teorema "del tappabuchi" per verificare se f è derivabile in $x = 0$.

Ricordando che $\frac{d}{dx} \log |x| = \frac{1}{x}$, per ogni $x \neq 0$, abbiamo che:

$$f'(x) = \frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} + 1 \right), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 0\}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} + 1 \right) = +\infty.$$

Tramite il teorema "del tappabuchi" giungiamo così alla conclusione che f non è derivabile in $x = 0$, che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di f determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di f'.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \left(\frac{1}{2+\sqrt[3]{x}} + 1 \right) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{3+\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt[3]{x}};$$

$$f'(x) = 0 \iff 3 + \sqrt[3]{x} = 0 \iff x = -27.$$

Dunque $x = -27$ è l'unico punto critico di f, ed è l'unico possibile punto di estremo di f, visto che l'unico punto di non derivabilità di f è un punto a tangente verticale. Per studiarne la natura, studiamo il segno di f'. Vediamo che:

$$3 + \sqrt[3]{x} > 0 \iff x > -27,$$

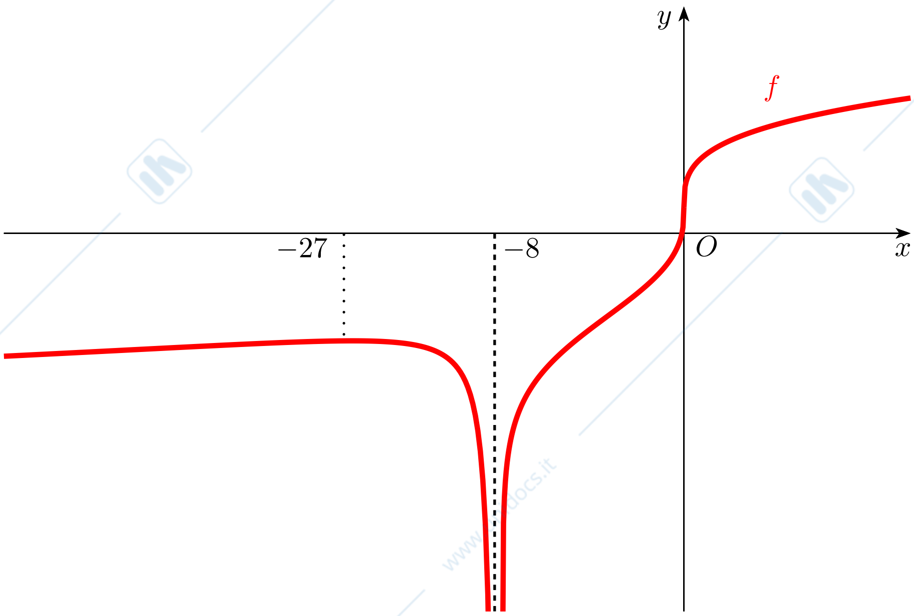
$$2 + \sqrt[3]{x} > 0 \iff x > -8.$$

Ne segue che $f'(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -27) \cup (-8, 0) \cup (0, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (-27, -8)$. Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- f è strettamente crescente su $(-\infty, -27]$ e su $(-8, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli)
- f è strettamente decrescente su $[-27, -8)$.

Inoltre, $x = -27$ risulta essere un punto di massimo locale (o relativo). Non è un punto di massimo assoluto perché la funzione è illimitata superiormente. Osserviamo inoltre che $f(-27) = -3$.

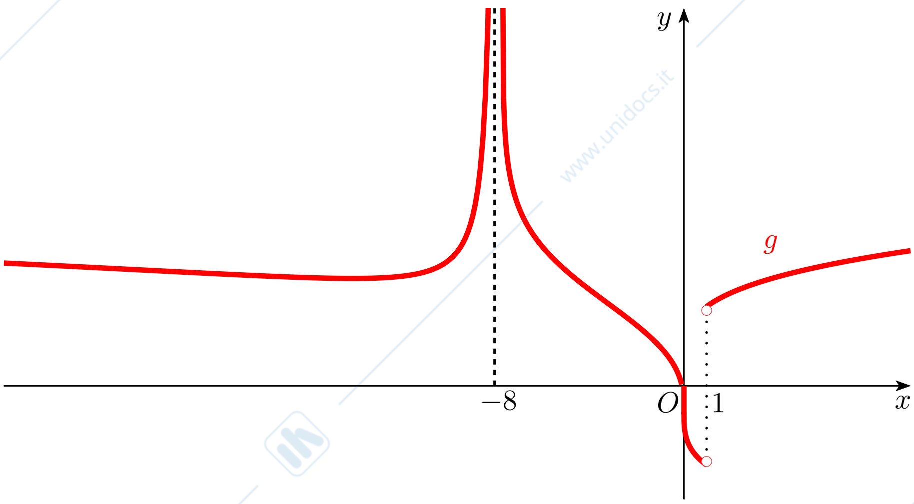
d) Un grafico qualitativo (non in scala) di f è



e) Osserviamo che , per $\alpha = 1$:

$$g(x) = \text{sgn }(x-1)f(x) = \begin{cases} f(x) & x > 1 \\ -f(x) & x < -1, \; x \neq -8. \end{cases}$$

Dunque il grafico di g si ottiene dal grafico di f lasciando invariato il grafico precedente per le $x > 1$ e considerando il grafico simmetrico rispetto all'asse x, quando $x < 1$. Si ottiene



Osserviamo che la funzione così ottenuta ha una singolarità di tipo salto in $x = 1$. L'unico caso in cui la funzione g presenta una singolarità eliminabile (e dunque è prolungabile per continuità) è quello in cui α è uno zero di f. Poiché f ha un unico zero $\bar{x} \in (-8, 0)$ (come si può dimostrare usando il teorema degli zeri), g risulta prolungabile per continuità in α se e solo se $\alpha = \bar{x}$.

Attenzione: poichè per rendere visibile il punto di minimo è stato necessario riscalare il grafico, il punto di intersezione del grafico di f con l'asse y sembra essere l'origine, mentre abbiamo visto che $f(0) = \log 2$. In effetti, come affermato in precedenza, la funzione ha uno zero in un punto $\bar{x} < 0$.

Esercizio 2.

a) Si dice che una funzione f è crescente su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2).$$

b) Supponiamo ora che g sia decrescente su A. Il dominio della funzione composta $g \circ f$ è dato dalle $x \in A$ tali che $f(x) \in \mathbb{R}$, e dunque dom $g \circ f = A$. Inoltre:

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Poiché g è decrescente su $\mathbb{R}$, abbiamo che:

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) \geq g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Dunque $g \circ f$ <u>è decrescente su</u> A.

c) Sia f crescente su $A = (3, 5)$. Per dimostrare che $\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq +\infty$, possiamo utilizzare due metodi diversi.

<u>*Metodo 1*</u> Supponiamo per assurdo che f abbia limite $+\infty$; allora, per definizione di limite:

(3.0) $$\forall M \in \mathbb{R}\ \ \exists \delta > 0 \quad x \in (3, 3+\delta) \cap (3, 5) \quad \Longrightarrow \quad f(x) > M.$$

Possiamo scegliere per esempio $M = f(4)$. Dalla (3.0) otteniamo allora che esiste $\bar{x} < 4$ tale che $f(\bar{x}) > f(4)$, contro l'ipotesi che f sia crescente.

<u>*Metodo 2*</u> Il teorema sul limite delle funzioni monotone ci permette di affermare che il limite di f per $x \to 3^+$ esiste e

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \inf\{f(x)\ :\ x \in (3, 5)\}.$$

Detto ℓ il limite così ottenuto, per definizione di estremo inferiore di un insieme:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in (3, 3+\varepsilon) \text{ tale che } \;\ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Poiché esiste almeno un numero reale $f(x) > \ell$, ℓ non può essere uguale a $+\infty$.

4 Esame del 3 luglio 2018

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{x+1}.$$

(a) Determinare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio e la parte principale di $f(x)$ rispetto all'infinito campione x, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

(b) Studiare la derivabilità di $f(x)$ in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata. Stabilire la natura di eventuali punti di non derivabilità.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $f(x)$.

(e) Esibire un esempio di una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente decrescente tale che la funzione composta $g \circ f$ sia derivabile in $x = -1$.

Esercizio 2. (5 punti) Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + 5y = 0.$$

(a) Dire cosa significa che una funzione $y = f(x)$ è soluzione dell'equazione data su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Dimostrare che se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due soluzioni dell'equazione su $\mathbb{R}$ allora la funzione $5f_1(x) - 2f_2(x)$ è soluzione dell'equazione su $\mathbb{R}$.

(c) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione

$$y'' + 5y = \frac{1}{4}e^{-\alpha x}$$

non sono limitate su $\mathbb{R}$ (non è richiesto il calcolo esplicito dell'integrale generale).

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) È chiaro che dom $f = \mathbb{R}$. Inoltre

$$f(x) = x^2 \sqrt[3]{x} + o(x^2 \sqrt[3]{x}), \qquad \text{per } \ x \to +\infty \ \textit{ e per } \ x \to -\infty,$$

dunque la parte principale di f rispetto a x è uguale a $x^{7/3}$, per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Inoltre f non ha asintoti obliqui perché f ha ordine di infinito superiore a 1 rispetto a x, per $x \to \pm\infty$.

Anche se non è esplicitamente richiesto dall'esercizio, in questo caso è facile vedere che $x = 0$ e $x = -1$ sono gli unici due zeri di f, e che $f(x) > 0$ se e solo se $x > -1$.

b) Poiché $\sqrt[3]{x+1}$ non è derivabile in $x = -1$, la funzione f è certamente derivabile per $x \neq -1$ dove è composizione di funzioni derivabili. Poiché f è continua in $x = -1$, per verificare se f è derivabile in $x = -1$ possiamo utilizzare il teorema "del tappabuchi". Calcoliamo quindi la derivata di f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sqrt[3]{x+1} + x^2 \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \\ &= \frac{6x(x+1) + x^2}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{7x^2 + 6x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}. \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{x\to-1} f'(x) = \lim_{x\to-1} \frac{7x^2 + 6x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = +\infty.$$

Ne segue che f non è derivabile in $x = -1$, che risulta essere un punto (di flesso) a tangente verticale.

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di f determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di f'.

$$f'(x) = \frac{7x^2 + 6x}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}};$$

$$f'(x) = 0 \iff 7x^2 + 6x = x(7x+6) = 0 \iff x = -\frac{6}{7}.$$

Dunque $x = -\frac{6}{7}$ è l'unico punto critico di f. Inoltre

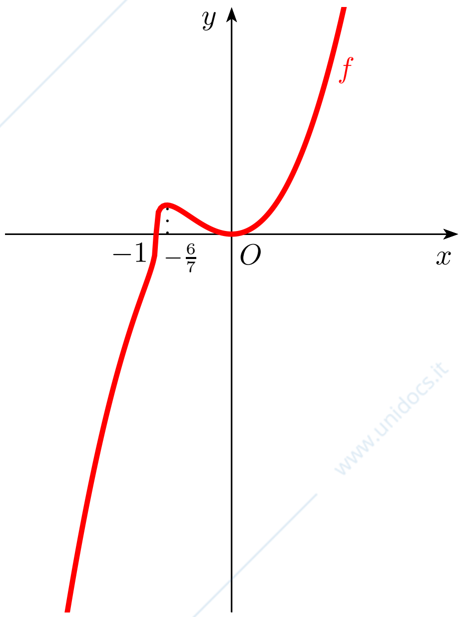
$$f'(x) \geq 0 \quad \iff \quad x(7x+6) \geq 0.$$

Ne segue che $f'(x) > 0$ se $x \in \left(-\infty, -\frac{6}{7}\right) \cup (0, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in \left(-\frac{6}{7}, 0\right)$. Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- f è strettamente crescente su $\left(-\infty, -\frac{6}{7}\right]$ e su $[0, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli);
- f è strettamente decrescente su $\left[-\frac{6}{7}, 0\right]$.

Inoltre, $x = 0$ risulta essere un punto di minimo locale (o relativo) e $x = -\frac{6}{7}$ è un punto di massimo locale. Poiché f è illimitata superiormente e inferiormente, i punti trovati non sono punti di estremo assoluto. Osserviamo inoltre che $f(-6/7) = \frac{36}{49}\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$ e $f(0) = 0$.

d) Un grafico qualitativo di f è



e) Se consideriamo per esempio la funzione, strettamente decrescente su $\mathbb{R}$, $g(t) = -t^3$, abbiamo che la funzione composta

$$g \circ f(x) = -\left(x^2 \sqrt[3]{x+1}\right)^3 = -x^6(x+1)$$

è derivabile su $\mathbb{R}$; in particolare, è derivabile in $x = -1$.

Esercizio 2.

a) Si dice che f è una soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 5y' = 0$ su un intervallo aperto I se

- f è derivabile due volte su I,
- $f''(x) + 5f(x) = 0$, $\forall x \in I$.

b) Se f_1 e f_2 sono soluzioni dell'equazione differenziale data, devono soddisfare la definizione precedente. Consideriamo ora la funzione $g(x) = 2f_1(x) - 3f_2(x)$. Dobbiamo dimostrare che anch'essa soddisfa la definizione precedente. Prima di tutto, g è derivabile due volte in I perché è combinazione lineare di funzioni derivabili due volte in I. Inoltre:

$$\begin{aligned} g(x) &= 2f_1(x) - 3f_2(x), \\ g'(x) &= 2f_1'(x) - 3f_2'(x), \\ g''(x) &= 2f_1''(x) - 3f_2''(x). \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} g''(x) - 5g(x) &= [2f_1''(x) - 3f_2''(x)] - 5[2f_1(x) - 3f_2(x)] = \\ &= 2[f_1''(x) - 5f_1(x)] - 3[f_2''(x) - 5f_2(x)] = 0, \qquad \forall x \in I. \end{aligned}$$

Dunque g è soluzione dell'equazione differenziale assegnata.

c) Per determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea $y'' + 5y = 0$, consideriamo l'equazione caratteristica associata $z^2 + 5 = 0$, le cui soluzioni sono $z_{1,2} = \pm 5i$.

Dunque l'equazione omogenea ha integrale generale $c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Tutte le soluzioni trovate sono limitate su $\mathbb{R}$.

Per trovare l'integrale generale dell'equazione completa $y'' + 5y = \dfrac{1}{4}\, e^{-\alpha x}$ è sufficiente determinarne una soluzione particolare. Dai teoremi generali sappiamo che:

- se $\alpha \neq 0$, l'equazione ha una soluzione $\varphi(x) = ke^{-\alpha x}$, per qualche $k \in \mathbb{R}$;
- se $\alpha = 0$, l'equazione ha una soluzione $\varphi(x) = k$, per qualche $k \in \mathbb{R}$.

L'integrale generale è $c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + \varphi(x)$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. È chiaro che se $\alpha \neq 0$, tutte le soluzioni dell'equazione completa sono illimitate su $\mathbb{R}$.

Se $\alpha = 0$, <u>tutte</u> le soluzioni dell'equazione differenziale completa sono limitate su $\mathbb{R}$.

Dunque, per ogni valore $\alpha \neq 0$, tutte le soluzioni dell'equazione completa non sono limitate su $\mathbb{R}$.

5 Esame del 18 settembre 2018

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2}.$$

(a) Identificare il dominio di $f(x)$, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(b) Mostrare che $f(x)$ ha un prolungamento continuo $g(x)$ su $\mathbb{R}$. Studiare la derivabilità di $g(x)$ e calcolarne la derivata.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo di $g(x)$, precisando se sono relativi o assoluti.

(d) Tracciare qualitativamente il grafico di $g(x)$.

(e) Sia

$$F(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Determinare i punti critici e gli intervalli di monotonia di F. Stabilire se F ha massimi o minimi.

Esercizio 2. (5 punti)

(a) Dire che cosa si intende per rappresentazione algebrica e per rappresentazione trigonometrica (o polare) di un numero complesso.

(b) Determinare e rappresentare (nel piano complesso di Argand-Gauss) le radici cubiche complesse del numero $w = -1$.

(c) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $\left(2z + \frac{1}{2}\right)^3 = -1$.

SVOLGIMENTO

Esercizio 1.

a) $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Anche se non richiesto esplicitamente, osserviamo che $f(x) > 0$, per ogni $x \in \text{dom} f$.

Inoltre, ponendo $\dfrac{1}{(x-1)^2} = t$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} &= \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0 \\
\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} &= \lim_{t\to 0} te^{-t} = 0 \\
\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{(x-1)^2} e^{-1/(x-1)^2} &= \lim_{t\to 0} te^{-t} = 0.
\end{aligned}$$

b) Poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$, f ha prolungamento continuo su $\mathbb{R}$; il suo prolungamento g è:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $x \neq 1$, g è derivabile e

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -\frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} = \\
&= \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} \left[-1 + \frac{1}{(x-1)^2} \right] = \\
&= \frac{2}{(x-1)^3} e^{-1/(x-1)^2} \left[\frac{2x - x^2}{(x-1)^2} \right].
\end{aligned}$$

Poiché g è continua in $x = 1$ e $\lim_{x\to 1} g'(x) = 0$, la funzione g è derivabile su $\mathbb{R}$ e $g'(1) = 0$.

c) Per determinare i punti di estremo e gli intervalli di monotonia di g determiniamo prima i suoi punti critici (cioè i suoi punti a derivata nulla) e poi il segno di g'.

Osserviamo che per $g'(x) = 0$ se $x = 1$ o se $2x - x^2 = 0$. Dunque i punti critici di f sono $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$.

Per determinare il segno di g' osserviamo che

- $e^{-1/(x-1)^2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\dfrac{2}{(x-1)^3} > 0 \iff x \in (1, +\infty)$
- $\dfrac{2x - x^2}{(x-1)^2} > 0 \iff x \in (0,1) \cup (1,2)$

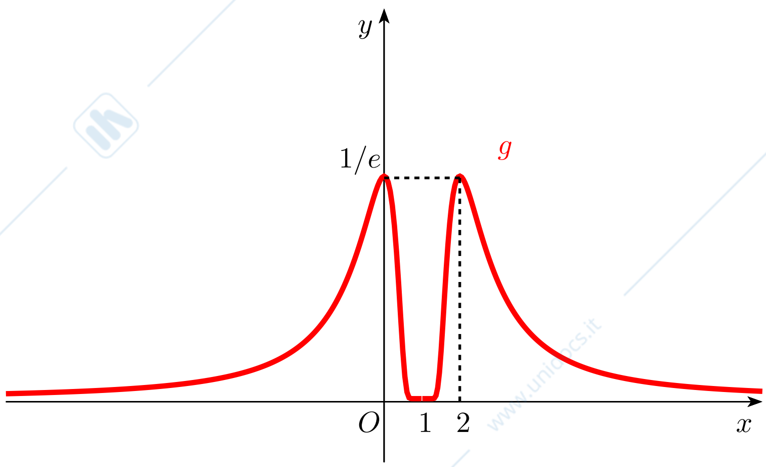
Studiando il segno del prodotto dei tre fattori, otteniamo che: $g'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ e $g'(x) < 0$ se e solo se $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$. Il teorema di Lagrange ci permette di affermare che in ogni intervallo in cui il segno della derivata è costante la funzione è monotona; in particolare:

- g è strettamente crescente su $(-\infty, 0]$ e su $[1, 2]$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli),
- g è strettamente decrescente su $[0, 1]$ e su $[2, +\infty)$ (ma non necessariamente sull'unione dei due intervalli).

Ne segue che:

- $x = 1$ è l'unico punto di minimo, locale e assoluto.
- $x = 0$ e $x = 2$ sono entrambi punti di massimo locale. Poiché $g(0) = g(2) = 1/e$, entrambi i punti sono anche di massimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di g è



e) Poiché g è continua su $\mathbb{R}$, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale la funzione integrale $F(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ è continua e derivabile su $\mathbb{R}$; inoltre

$$F'(x) = g(x) > 0, \forall x \neq 1,$$

dunque F ha l'unico punto critico $x = 1$. Inoltre F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e non ha punti di massimo o di minimo.

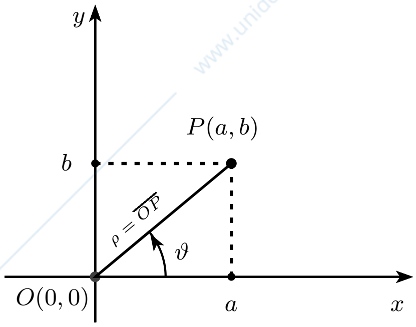
Esercizio 2.

a) Posto formalmente $i = \sqrt{-1}$, un qualunque numero complesso viene rappresentato in forma algebrica come $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Il numero complesso z può essere identificato con la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e venire quindi rappresentato nel piano cartesiano, che in questo caso prende il nome di piano di Argand-Gauss. Si può quindi rappresentare z in coordinate polari, ottenendo la cosiddetta rappresentazione trigonometrica di un numero complesso:

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ è la distanza del punto $P(a, b)$ dall'origine e ϑ è l'angolo formato dalla semiretta OP con il semiasse delle ascisse positive. (vedi figura)



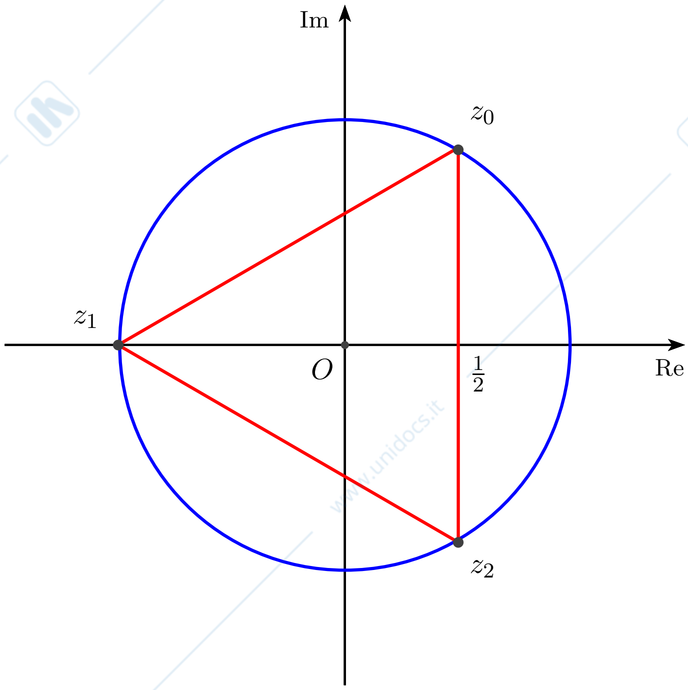
b) In forma trigonometrica, si ha $w = -1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. Dette z_i, con $i = 0, 1, 2$ le radici cubiche (in campo complesso) di w, si ha che:

$$\begin{aligned}
|z_i| &= \sqrt[3]{|-1|} = 1, \quad \text{per} \quad i = 0, 1, 2 \\
\vartheta_0 &= \frac{\pi}{3} \\
\vartheta_1 &= \frac{\pi + 2\pi}{3} = \pi \\
\vartheta_2 &= \frac{\pi + 4\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi
\end{aligned}$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i \\
z_1 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i
\end{aligned}$$

Nel piano di Argand-Gauss i tre punti costituiscono i vertici di un triangolo equilatero, inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (vedi figura).



c) Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\left(2z+\frac{1}{2}\right)^3=-1.$$

Se poniamo $v=2z+\dfrac{1}{2}$, otteniamo l'equazione $v^3=-1$, le cui soluzioni sono le tre radici cubiche di -1, che abbiamo calcolato al punto precedente. Poiché $z=\dfrac{1}{2}\left(v-\dfrac{1}{2}\right)$, le tre soluzioni dell'equazione sono:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\,i\\
z_1 &= \frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}\\
z_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\,i
\end{aligned}$$