DOMINIO DI FUNZIONE

- FUNZIONE FRATTA → DENOMINATORE $\neq 0$
- RADICE PARI → ARGOMENTO ≥ 0
- LOGARITMO → ARGOMENTO > 0
- TANGENTE → ARGOMENTO $\neq \pi/2 + k\pi$
- COTANGENTE → ARGOMENTO $\neq k\pi$
- ARCO SENO E ARCO COSENO → $-1 \leq$ ARG. ≤ 1
- CASO $f(x)^{g(x)}$ → $f(x) = e^{g(x) \log x}$
- QUANDO CI SONO PIÚ CASI NE DEVE ESSERE CALCOLATA L'INTERSEZIONE TRAMITE UN SISTEMA

PROPRIETÁ DISEQUAZIONI

RADICE:

1) $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

2) $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$$

LOGARITMO:

1) $\log_a[f(x)] > n$
→ SE $a > 1$ ALLORA $f(x) > a^n$
→ SE $0 < a < 1$ ALLORA $f(x) < a^n$
SI PONE L'ARGOMENTO > 0 E SI CALCOLA L'INTERSEZIONE

2) $\log_a[f(x)] > \log_a[g(x)]$
→ SE $a > 1$ ALLORA $f(x) > g(x)$
→ SE $0 < a < 1$ ALLORA $f(x) < g(x)$
SI PONE L'ARGOMENTO del LOGARITMO > 0 E SI CALCOLA L'INTERSEZIONE

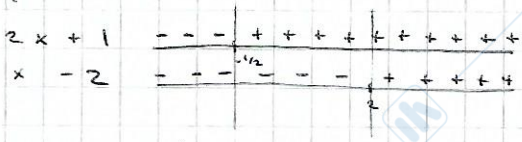
VALORE ASSOLUTO:

$|x-3| + x > 0$

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x - 3 + x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 3 < 0 \\ -x + 3 + x > 0 \end{cases}$$

→ CON DUE VALORI ASSOLUTI SI ANALIZZANO I VARI CASI:

es. $|2x+1| + |x-2| = 4$



$$\begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 - x + 2 = 4 \end{cases}$$

$-1/2$ e 2 SONO I VALORI PER CUI SI ANNULLANO RISPETTIV. $2x+1$ e $x-2$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 2 \\ 2x + 1 - x + 2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x + 1 + x - 2 = 4 \end{cases}$$

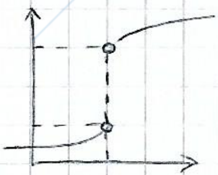
⇒ SI CALCOLA L'UNIONE delle SOLUZIONI

PUNTI DI DISCONTINUITÁ

SE $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ALLORA LA FUNZIONE É CONTINUA IN x_0

- DISCONTINUITÁ DI I SPECIE O DI SALTO IN x_0

SE $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ESISTONO, SONO FINITI e DIVERSI

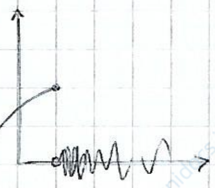


es. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ → IN 0 SINGOLARITÁ $0 \notin Dom(f)$

$g(x) = sgn(x)$

- DISCONTINUITÁ DI II SPECIE O ESSENZIALE IN x_0

SE ALMENO UNO TRA $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ NON ESISTE O É ∞

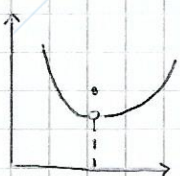


es. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ → IN 1 SINGOLARITÁ $1 \notin Dom(f)$

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2-1} & se\ x > 1 \\ 0 & se\ x \le 1 \end{cases}$

- DISCONTINUITÁ DI III SPECIE O ELIMINABILE IN x_0

SE $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ESISTE FINITO MA É DIVERSO DA $f(x_0)$



SI PUÓ, RIDEFINENDO LA FUNZIONE NEL PUNTO, ELIMINARE LA DISCONTINUITÁ

SE $x_0 \notin Dom(f)$ ALLORA SI PARLA DI SINGOLARITÁ O PUNTO SINGOLARE

I PUNTI DI DISCONTINUITÁ SI TROVANO QUANDO CI SONO DEI VALORI CHE ANNULLANO IL DENOMINATORE O LA FUNZIONE

DERIVABILITÁ

UNA FUNZIONE É DERIVABILE IN UN PUNTO x_0 SE:

1) É CONTINUA IN x_0
2) IL LIMITE DESTRO e SINISTRO DEL RAPPORTO INCREMENTALE CALCOLATO NEL PUNTO SONO FINITI e COINCIDONO:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

OPPURE $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

→ PER TROVARE PUNTI DI MAX e MIN STUDIEREMO $f'(x) > 0$ e $f'(x) \geq 0$ TROVANDO COSÍ LE ASCISSE DEI PUNTI STAZIONARI, PER LE ORDINATE BASTERÁ SOSTITUIRE TALI VALORI A $f(x)$

→ PER TROVARE L'EQ. DELLA RETTA TANGENTE IN UN PUNTO SI USA $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ DOVE y_0 e x_0 SONO LE COORDINATE DEL PUNTO e $f'(x_0)$ TRAMITE SOST. DI x_0 ALLA $f'(x)$

CALCOLO di LIMITI - ALGEBRA di LIMITI

PROPRIETÁ LIMITI:

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$
2) $\lim_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$
3) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right)$
4) $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$

- METODO SOSTITUZIONE DIRETTA

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ PER IPOTESI di CONTINUITÁ

(PER "ELIMINARE" VALORI ASSOLUTI FARE LIMITE dell' ARGOMENTO ...)

- CALCOLO LIMITE DESTRO e SINISTRO

- NELL' IPOTESI di CONTINUITÁ É INUTILE
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$
- NEL CASO di FUNZIONI CONTINUE A DESTRA O A SINISTRA IL RISPETTIVO LIMITE DESTRO E SINISTRO SI OTTIENE PER SOSTITUZIONE DIRETTA
- SE LA FUNZIONE NON É DEFINITA IN UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE del DOMINIO $x_0 \notin \text{Dom } f$
(SE lim DX ≠ lim SX IL LIMITE NON ESISTE)
- QUANDO NON SIAMO CERTI della CONTINUITÁ della FUNZIONE (FUNZIONE DEFINITA A TRATTI)

→ PSEUDO-SOSTITUZIONE (ALG. INFINITI e INFINITESIMI)

- CALCOLO PER SOSTITUZIONE di VARIABILE

$\lim_{x \to x_0} g(f(x))$ CAMBIO di VARIABILE $y = f(x)$

CALCOLO LIMITE PARTE INTERNA $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
SE ESISTE POSSIAMO SCRIVERE: $\lim_{y \to l} g(y)$

- FORME INDETERMINATE

OPERAZIONI PER LE QUALI NON SI PUÓ STABILIRE UN RISULTATO A PRIORI

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [1^{\infty}] \quad [\infty - \infty] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

1) RICONOSCERE IL TIPO di FORMA INDETERMINATA
2) UTILIZZARE IL METODO PIÚ ADEGUATO

- LIMITI NOTEVOLI
- TEOREMA del CONFRONTO
- TRUCCHI ALGEBRICI
- (TEOR. de L'HOPITAL)
- SVILUPPI di TAYLOR
- CONFRONTO TRA INFINITI e INFINITESIMI

VEDI (2)

- LIMITI CHE TENDONO A ∞

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_k x^k + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^k}\right)}{x^m \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_0}{x^m}\right)} = \begin{cases} k > m \\ k = m \\ k < m \end{cases}$$

SE $k > m$ $\quad l = +\infty \left(\text{sgn} \frac{a_k}{b_m} \right)$

SE $k = m$ $\quad l = a_k / b_m$

SE $k < m$ $\quad l = 0$

- LIMITI FUNZIONI MONOTONE

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ $\quad f$ MONOTONA NELL'INTERVALLO (a, b)

SE f CRESCENTE:

$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f(a, b)$ $\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \inf f(a, b)$

SE f DECRESCENTE:

$\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf f(a, b)$ $\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \sup f(a, b)$

- LIMITI DI SUCCESSIONI

1) SE FISSATO $M \in \mathbb{R} \to a_n > M$ DEFINITIVAMENTE
OVVERO $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0 \quad a_n > M$
(CIOÉ SE É POSITIVA DA UN CERTO TERMINE IN AVANTI)
ALLORA LA SUCCESSIONE DIVERGE A $+\infty$:
$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

2) SE FISSATO $M \in \mathbb{R} \to a_n < M$ DEFINITAVAMENTE
(CIOÉ SE É NEGATIVA DA UN CERTO TERMINE IN AVANTI)
ALLORA LA SUCCESSIONE DIVERGE A $-\infty$:
$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

3) SE FISSATO $\varepsilon > 0$ ESISTE l t.c. $|a_n - l| < \varepsilon$ DEF.
(CIOÉ SE DA UN CERTO TERMINE IN AVANTI I TERMINI della SUCCESSIONE DISTANO da l MENO di ε)
ALLORA LA SUCCESSIONE CONVERGE:
$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ $\quad$ (SE $l = 0$ ALLORA SUCCESSIONE INFINITESIMA)

4) SE NON SI VERIFICANO NESSUNO DEI CASI PRECEDENTI $\lim_{n \to +\infty} a_n$ NON ESISTE e LA SUCCESSIONE É INDETERMINATA

CALCOLO DI LIMITI - FORME INDETERMINATE ②

I LIMITI CHE RICONDUCONO A FORME INDETERMINATE COME $\frac{0}{0}$ $\frac{\infty}{\infty}$ $0 \cdot \infty$ 1^{∞} $\infty - \infty$ 0^0 ∞^0

DEVONO ESSERE CALCOLATI MEDIANTE STRADE ALTERNATIVE:

- LIMITI NOTEVOLI

SONO LIMITI DI f ELEMENTARI DIMOSTRATI
SI UTILIZZANO NEL CALCOLO DI LIMITI PIÙ COMPLESSI

1) LOGARITMO NATURALE
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2) LOGARITMO IN BASE a $\quad a>0,\ a \neq 1$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln(a)} = \log_a e$$

3) ESPONENZIALE
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

4) ESPONENZIALE IN BASE a $\quad a>0$
$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

5) NUMERO DI NEPERO
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

6) POTENZA CON DIFFERENZA
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

7) SENO e ARCO SENO
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

8) COSENO
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

9) TANGENTE e ARCO TANGENTE
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

→ METODO INGENUO (PASSAGGIO x PASSAGGIO)

→ EQUIVALENZE ASINTOTICHE per $x \to 0$

$\sin x = x \qquad e^x - 1 = x$

$\arcsin x = x \qquad \log(1+x) = x$

$a^x - 1 = x \ln(a) \qquad (1+x)^\alpha = 1 + x\alpha$

$1 - \cos x = \frac{x^2}{2}$

$\lim_{x \to 0}$ NUMERATORE $= \lim_{x \to 0}$ L.N. · DENOMINATORE

→ LIMITI NOTEVOLI IN FORMA GENERALE

QUANDO $x_0 \neq 0$ ma $f(x)$ GENERA UN INFINITESIMO

es. $\lim_{x \to 5} \frac{\sin(x-5)}{x-5} = 1$

$\sin(x-5) = x-5$ per $x \to 5$

- **CONFRONTO TRA INFINITI**

PERMETTONO di RISOLVERE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$

ALCUNE FUNZIONI TENDONO A ∞ PIÙ VELOCEMENTE DI ALTRE

f È UN INFINITO per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ $f(x)$ È INFINITO di **ORDINE SUPERIORE** RISPETTO a $g(x)$ (+ VEL. A ∞)

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ È INFINITO di **ORDINE INFERIORE** RISPETTO a $g(x)$ (+ LENT. A ∞)

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ $f(x)$ e $g(x)$ SONO INFINITI dello **STESSO ORDINE**

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$ $f(x)$ e $g(x)$ SI DICONO INFINITI NON CONFRONTABILI

→ GERARCHIA degli INFINITI $x \to +\infty$ $a > 0, \neq 1$ $0 < b < c$ $1 < d < g$

$\log_a x < x^b < x^c < d^x < g^x < x^x$ → INFINITO di ORD. SUPERIORE

LA **PARTE PRINCIPALE** DELL'INFINITO È L'INFINITO CHE TENDE PIÙ VELOCEMENTE A ∞, IN UNA SOMMA TRA INFINITI È L'UNICO CHE SI CONSIDERA PER IL CALCOLO DEL LIMITE

- **CONFRONTO TRA INFINITESIMI**

PERMETTONO A RISOLVERE LA FORMA $\frac{0}{0}$

ALCUNE FUNZIONI TENDONO A 0 PIÙ VELOCEMENTE di ALTRE

f È UN INFINITESIMO per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ È INFINITESIMO di **ORDINE SUPERIORE** RISPETTO A $g(x)$ (+ VEL. A 0)

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ $f(x)$ È INFINITESIMO di **ORDINE INFERIORE** RISPETTO A $g(x)$ (+ LENT. A 0)

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ $f(x)$ e $g(x)$ SONO INFINITESIMI dello **STESSO ORDINE**

se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \nexists$ $f(x)$ e $g(x)$ SI DICONO INFINITESIMI NON CONFRONTABILI

→ GERARCHIA degli INFINITESIMI $x \to +\infty$ $a > b > 1$ $c > d > 0$ $s > 0, \neq 1$

$\frac{1}{x^x} < \frac{1}{a^x} < \frac{1}{b^x} < \frac{1}{x^c} < \frac{1}{x^d} < \frac{1}{\log_s x}$ → INFINITESIMO di ORD. INF.

LA **PARTE PRINCIPALE** DELL'INFINITESIMO È L'INFINITESIMO CHE TENDE PIÙ LENTAMENTE A 0, IN UNA SOMMA TRA INFINITESIMI È L'UNICO CHE SI CONSIDERA PER IL CALCOLO DEL LIMITE (OCCORRE CHE GLI ELEMENTI della SOMMA SIANO SOLTANTO INFINITESIMI)

- **TEOREMA del CONFRONTO**

1) SE $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$
ALLORA $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

UTILI PER SENO e COSENO: $-1 \leq \sin x \leq 1$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ $|\sin x| \leq |x|$

2) (PER LIMITI INFINITI CON $x_0 = \pm\infty$)
SE $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$

STUDIO di FUNZIONE

SCHEMA RIASSUNTIVO:

1. DETERMINARE IL DOMINIO di f
2. DETERMINARE EVENTUALI SIMMETRIE
3. INTERSEZIONI CON GLI ASSI
4. ASINTOTI
5. STUDIO MONOTONIA e MAX e MIN RELATIVI
6. CONVESSITÀ, CONCAVITÀ e PUNTI di FLESSO

2. SIMMETRIE

SI DISTINGUONO TRE TIPOLOGIE:

a) f È PARI $\Rightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \text{dom} f$
ALLORA IL GRAFICO È SIMM. RISPETTO ALL'ASSE Y
POSSIAMO RESTRINGERE LO STUDIO di f a $\{x \in \text{dom} f \mid x \geq 0\}$

b) f È DISPARI $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \text{dom} f$
ALLORA IL GRAFICO È SIMM. RISPETTO ALL'ORIGINE
POSSIAMO RESTRINGERE LO STUDIO di f a $\{x \in \text{dom} f \mid x \geq 0\}$

c) f È PERIODICA $\Rightarrow f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \text{dom} f,\ T > 0$
ALLORA IL GRAFICO SI RIPETE ad INTERVALLI
POSSIAMO RESTRINGERE LO STUDIO di f a $\{x \in \text{dom} f \mid 0 \leq x \leq T\}$

3. INTERSEZIONI CON GLI ASSI

BASTA PORRE PRIMA $x = 0$ poi $y = 0$ e CALCOLARE IL RISULTATO
(SU EQ. DIFFICILI NON PERSEVERARE SU $y = 0$, PUÒ ESSERE RICAVATO SUCCESSIVAMENTE)

4. ASINTOTI

SI PONGONO I LIMITI della FUNZIONE TENDENTI AGLI "ESTREMI" del DOMINIO:

- ASINTOTO VERTICALE V $(x_0 \neq \pm\infty)$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ ASINTOTO V DESTRO $x = x_0$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ASINTOTO V SINISTRO $x = x_0$

SE ENTRAMBI $= \pm\infty \Rightarrow$ ASINTOTO VERTICALE $x = x_0$

- ASINTOTO ORIZZONTALE H $(x_0 = \pm\infty)$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow y = \ell \text{ ASINTOTO H} \\ \left.\begin{matrix} \pm\infty \\ \text{N.E.} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{NON CI SONO ASINTOTI H} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ IN $f(x)$ POSSONO ESISTERE INFINITI ASINTOTI V MA AL MASSIMO 2 ASINTOTI H

- ASINTOTO OBLIQUO

NEL CASO $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ POTREBBE ESISTERE L'ASINTOTO OBLIQUO; ALTRE CONDIZIONI:

- $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad m \neq 0$
- $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$

$\Rightarrow$ ALLORA ESISTE ASINTOTO OBLIQUO di EQUAZIONE $y = mx + q$

5. MAX e MIN RELATIVI (MONOTONIA)

- SI PONE $f'(x) = 0$ e SI TROVANO LE ASCISSE di PUNTI STAZIONARI (MAX o MIN)
- SI STUDIA POI LA MONOTONIA PONENDO $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$, CAPENDO COSÍ DOVE CRESCE e DOVE DECRESCE $f(x)$ e di CONSEGUENZA QUALI SONO I MAX e QUALI I MIN
- PER OTTENERE LE ORDINATE di MAX e MIN BASTERÁ SOSTITUIRE LE RADICI di $f'(x) = 0$ A $f(x)$ e RICAVARNE LE SOLUZIONI

6. CONCAVITÁ, CONVESSITÁ e PUNTI di FLESSO

- SI STUDIA $f''(x) > 0$ (CONVESSA $\vee$) e $f''(x) < 0$ (CONCAVA $\wedge$)
- NEI PUNTI di ASCISSA $f''(x) = 0$ e ORDINATA OTTENUTA PER SOSTITUZIONE a $f(x)$ AVREMO UN PUNTO di FLESSO SE IN QUESTO PUNTO $f(x)$ PASSA DA CONCAVA A CONVESSA (O VICEVERSA)

CALCOLO LIMITI - TEOREMA di HOPITAL

CONDIZIONI PER USARE HOPITAL SU $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$:

1) LIMITE della FORMA $[\frac{0}{0}]$ o $[\frac{\infty}{\infty}]$
2) $f(x)$ e $g(x)$ DERIVABILI IN $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$
3) $g'(x) \neq 0$ IN $U_{x_0} \setminus \{x_0\}$
4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ESISTE FINITO o INFINITO

SE SODDISFATTE LE 4 CONDIZIONI $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

OSS. LA FORMA $[0 \cdot \infty]$ É RICONDUCIBILE A $[\frac{\infty}{\infty}]$:
$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{1/f(x)}$

LA FORMA $[0^0]$ É RICONDUCIBILE A FORME DET. :
$\lim_{x \to c} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \to c} e^{g(x) \ln f(x)}$

RICORDA: SE DOPO AVERE USATO HOPITAL SI OTTIENE NUOVAMENTE UNA FORMA $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ E CI SONO LE CONDIZIONI 2, 3, 4 SODDISFATTE POSSIAMO RIAPPLICARE HOPITAL PIÙ VOLTE

CALCOLO LIMITI - FORMULA di TAYLOR

LA FORMULA di TAYLOR CONSENTE di APPROSSIMARE, ALMENO LOCALMENTE, TUTTE LE f SUFFICIENTEMENTE REGOLARI IN POLINOMI

CONDIZIONI:
1) f DEFINITA IN I $(I = (-\delta, \delta)$ con $\delta > 0)$
2) f DERIVABILE $n-1$ VOLTE IN I
3) ESISTE LA DERIVATA n-esima ALMENO IN 0

ALLORA $f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\downarrow} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{RESTO di PEANO}}$ per $x \to 0$

$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)x}{1} + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

INTEGRALI INDEFINITI - PER SOSTITUZIONE

$\int k\,dx = kx + c$ $\qquad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$ $\qquad \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \operatorname{cotg} x + c$ $\qquad \int e^x\,dx = e^x$

$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$ $\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + c$

FUNZIONI COMPOSTE:

$\int f'(x)[f(x)]^{\alpha}\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

$\int f'(x)\cos[f(x)]\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$ $\qquad \int f'(x)\operatorname{sen}[f(x)]\,dx = -\cos$

$\int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$ $\qquad \int f'(x)\,a^{f(x)}\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$

$\int |x|\,dx = \frac{x|x|}{2} + c$ $\qquad \int \operatorname{tg} x\,dx = -\int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$

INTEGRALI INDEFINITI - PER PARTI

REGOLA di DERIVAZIONE PER PARTI:

$\int g'f\,dx = fg - \int f'g\,dx$

DOVE CONSIDERO f = FATTORE FINITO
e g' = FATTORE DIFFERENZIALE

$\int x^n e^x\,dx$, $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx$, $\int x^n \cos x\,dx$ } CONSIDERO SEMPRE x^n COME FATTORE FINITO IN MODO DA "NON AUMENTARE" IL GRADO

$\int x^n \ln x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arcsen} x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg}\,dx$ } CONSIDERO x^n COME FATTORE DIFFERENZIALE PERCHÉ PIÚ FACILE DA INTEGRARE

INT. CICLICI:

$\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx$ SI PONE $= I$

$\Rightarrow I = e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx$

$= e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \operatorname{sen} 2x\,dx =$

$= e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x - 4I$ DA CUI:

$I = \frac{1}{5}(e^x \operatorname{sen} 2x - 2e^x \cos 2x + c)$

NELLA SOSTITUZIONE PUÓ ESSERE UTILE CAMBIARE VARIABILE TUTTAVIA:

$x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$

(MA ANCHE $f(x) = t \quad f'(x)\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{f'(x)}$)

es $\int \frac{1}{x(\ln x + 1)}\,dx = \int \frac{1}{\ln x + 1}\cdot\frac{1}{x}\,dx$ $\qquad y = \ln x + 1$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c \Rightarrow = \ln|\ln x + 1| + c$

es. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}\cdot\cos y\,dy = \int \cos y\cdot\cos y$ → PER PARTI / $\cos(2y) = \ldots$

$x = \operatorname{sen} y \qquad dx = \cos y\,dy$

INTEGRALI INDEFINITI - FUNZIONI RAZIONALI

(A)' $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi $(Q(x) \neq 0)$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

  $\int \frac{K}{ax+b}\,dx = \frac{K}{a} \ln|ax+b| + c$

  IL POLINOMIO AL NUMERATORE È LA DERIVATA DEL DENOMINATORE

- COSTANTE AL NUMERATORE, QUADRATO AL DENOMINATORE

  RICORDARE CHE $\frac{1}{(f(x))^2} = (f(x))^{-2}$ e $\int f'(x)(f(x))^n\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$

  (A)

  es. $\int \frac{5}{(2x-1)^2}\,dx = \frac{5}{2}\int 2(2x-1)^{-2} = \frac{5}{2}\,\frac{(2x-1)^{-1}}{-1} = -\frac{5}{4x-2} + c$

- TIPOLOGIA $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ CON $b^2-4ac < 0$ $(\Delta < 0)$

  DOBBIAMO RICONDURRE ALLE FORME:

  $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}\,dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$ e $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

  es. $\int \frac{18x \overset{+6-3}{+3}}{9x^2+6x+\underset{1+1}{2}}\,dx = \int \frac{18x+6}{9x^2+6x+2}\,dx - \int \frac{3}{1+(3x+1)^2}\,dx =$

  $= \ln|9x^2+6x+2| - \operatorname{arctg}(3x+1) + c$

- METODO GENERALE

  SCALETTA:

  1) DIVISIONE TRA POLINOMI $\rightarrow$ SE $\text{grad } Q(x) > \text{grad } P(x)$ SALTO IL PASSAGGIO (A)'
  2) FATTORIZZARE UTILIZZANDO SCOMPOSIZIONI di RUFFINI, SOMMA e PRODOTTO $[x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)]$ o SI RISOLVE L'EQUAZIONE di 2° GRADO ASSOCIATA DA CUI $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
  3) DECOMPORRE LA FRAZIONE IN FRATTI SEMPLICI

     $\frac{\gamma x + \beta}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} = \boxed{\frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2}} = \frac{A(x-\alpha_2)+B(x-\alpha_1)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} =$

     $= \frac{x(A+B) - (\alpha_2 A + \alpha_1 B)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = \gamma \\ -\alpha_2 A - \alpha_1 B = \beta \end{cases}$

     DA CUI SI RICAVANO A e B
  4) INTEGRARE I VARI "PEZZETTINI"

es. $\int \frac{x^2-5}{x^2-5x+6}\,dx \overset{(1)}{=} \int \left(1 + \frac{5x-11}{x^2-5x+6}\right)dx$

(2) $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$

(3) $\frac{5x-11}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$

$= \frac{x(A+B) - (3A+2B)}{(x-2)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 5 \\ 3A+2B = 11 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 11-10 = 1 \\ B = 5-A = 4 \end{cases}$

(4) $\int 1\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx =$

$= x + \ln|x-2| + 4\ln|x-3| + c$

N.B. SE $\alpha_1 = \alpha_2$ RICONDUCIAMO A (A) (LEZIONE 28)

INTEGRALI IMPROPRI e CRITERI DI CONVERGENZA

CALCOLO INTEGRALI IMPROPRI

- **I° SPECIE:** SE ALMENO UNO degli ESTREMI NON É DEFINITO

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{M} f(x)\,dx + \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$$

es. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_3^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$$= \lim_{c\to-\infty} \int_c^3 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{c\to+\infty} \int_3^c \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_c^3 + \lim_{c\to+\infty} \left[\operatorname{arctg}\right]_3^c =$$

$$= \lim_{c\to-\infty} [\operatorname{arctg}(3) - \underbrace{\operatorname{arctg}(c)}_{-\frac{\pi}{2}}] + \lim_{c\to+\infty} [\underbrace{\operatorname{arctg}(c)}_{\frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg}(3)] = \pi$$

- **II° SPECIE:** SE HANNO ALMENO 1 PUNTO SINGOLARE DENTRO L'INTERVALLO D'INTEGRAZIONE

(1) $\int_a^b f(x)\,dx$ con f su $[a,b)$ (2) $\int_a^b f(x)\,dx$ con f su $(a,b]$

(3) $\int_a^b f(x)\,dx$ con f su (a,b) (4) $\int_a^b f(x)\,dx$ con f su $[a,c) \cup (c,b]$

(1) $= \displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ (2) $= \displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$

(3) $(a,b) = (a,c] \cup [c,b) \Rightarrow =$ (2) + (1) OPPURE $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ u\to0^+}} \int_{a+u}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{u\to0^+} \int_{c+u}^b f(x)\,dx$$

es. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{0+\varepsilon}^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\sqrt{x}\right]_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\sqrt{4} - \sqrt{\varepsilon}\right] = 2$

($0 \notin$ dom f, f DEF. SU $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) CASO $(a,b]$

- **III° SPECIE:** I ∪ II SI SVOLGONO A SECONDA DEI CASI

⇒ SE IL LIMITE CALCOLATO:

- É UGUALE A $+\infty$ o $-\infty$, DIREMO CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO DIVERGE (A $+\infty$ o $-\infty$)
- ESISTE ed É FINITO, DIREMO CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE
- NON ESISTE, DIREMO CHE L'INTEGRALE IMPROPRIO NON ESISTE o É INDETERMINATO

$\displaystyle\int_{K_0}^{\infty} P(x)\, e^{-\lambda x}$ SE $\lambda > 0$ L'INTEGRALE IMPROPRIO CONVERGE

CALCOLO INTEGRALI INDEFINITI

- METODO GENERALE per FUNZIONI RAZIONALI #2
SI ESEGUONO GLI STESSI PASSAGGI del METODO GIÀ DESCRITTO PER FORME CON DENOMINATORE CHE A SEGUITO della FATTORIZZAZIONE MANTIENE UN POLINOMIO DI GRADO 2 NON SCOMPONIBILE $\Rightarrow$ CAMBIA PERÒ LA DECOMPOSIZIONE ③:

$$\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x(x^2+\delta)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+\delta} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + \delta A}{x(x^2+\delta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=\alpha \\ C=\beta \\ A=\gamma \end{cases}$$

es. $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx$ ② $x^3+x = x(x^2+1)$

③ $\frac{1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} =$

$= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$

④ $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

N.B. es. 1 $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

es. 2 $\frac{1}{x(x-3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3}$

CRITERI di CONVERGENZA (INT. IMPROPRI)

- I CRITERIO: CONFRONTO
SE $0 \le f(x) \le g(x)$ ALLORA $0 \le \int_I f(x)\,dx \le \int_I g(x)\,dx$
CON I = INTERVALLO SEMIAPERTO
$\Rightarrow$ SE $\int_I g(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_I f(x)\,dx$ CONVERGE
$\Rightarrow$ SE $\int_I f(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_I g(x)\,dx$ DIVERGE
es. $\int_0^{+\infty} \frac{2+\operatorname{sen} x}{x^2+4}\,dx \quad 0 \le \frac{2+\operatorname{sen} x}{x^2+4} \le \frac{3}{x^2+4} \le \frac{3}{x^2}$
$\frac{3}{x^2}$ È INT. IN S.G. $\Rightarrow$ LO È ANCHE LA FUNZIONE ORIGINALE

- f È ASS. INT. $\Rightarrow f$ È INT. (IN S.G.)
es. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx \quad \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$
$1/x^2$ È INT. IN S.G. $\Rightarrow$ LO È PURE $\operatorname{sen} x / x^2$
(NON VALE IL CONTRARIO)

- II CRITERIO: CONFRONTO ASINTOTICO
SE $f \sim g$ per $x \to c$ o $x \to \pm\infty$ (c = I di SINGOLARITÀ)
ALLORA SE f È INT. IN S.G. $\Leftrightarrow g$ È INT. IN S.G.

- FUNZIONI CONFRONTO

$$\frac{1}{|x-x_0|^\alpha} \begin{cases} \text{INT. di } \infty & \begin{cases} \text{SE } \alpha > 1 \Rightarrow \text{CONVERGE} \\ \text{SE } \alpha \le 1 \Rightarrow \text{DIVERGE} \end{cases} \\ \text{INT. di } x = x_0 & \begin{cases} \text{SE } \alpha < 1 \Rightarrow \text{CONVERGE} \\ \text{SE } \alpha \ge 1 \Rightarrow \text{DIVERGE} \end{cases} \end{cases}$$

VALE UGUALE PER $\frac{1}{x^\alpha}$

INT. INDEFINITI PER SOSTITUZIONE:

FORMULA GENERALE: $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\, dy$

NELLA PRATICA SI SOSTITUISCE ALL'ELEMENTO "FASTIDIOSO" UNA CERTA VARIABILE CHE RENDE L'INTEGRAZIONE PIÙ SEMPLICE

es. $\int x\sqrt{x-1}\, dx$ PONGO $\sqrt{x-1} = t$ $\sqrt{x-1}$ = TERMINE "FASTIDIOSO"

DA CUI $x = t^2+1$ e RICAVO $dx = 2t\, dt$

$\Rightarrow \int (t^2+1)(t)(2t)\, dt = 2\int t^4 + t^2\, dt = 2\int t^4 + 2\int t^2 =$

$= 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3}\right)$ SOSTITUISCO LA t $\Rightarrow = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^5}{5} + \frac{(\sqrt{x-1})^3}{3}\right) + c$

RICORDA: SPESSO NON HO BISOGNO di RICAVARE X

es. $\int \underline{\text{sen}(e^x)}\, e^x\, dx = \int \underline{\text{sen}\, y}\; dy$ $\underline{y = e^x}$ $dy = e^x\, dx$

A VOLTE SI DEVE INVECE SOSTITUIRE $x = f(y)$ INVECE di $f(x) = y$ IN VARI MODI:

- FUNZIONI IRRAZIONALI del TIPO $\sqrt{ax^2+b}$

1) SE $a>0$ e $b>0$ $\Rightarrow x = \sqrt{b/a}\,\text{senh}\, t$, $\sqrt{ax^2+b} = \sqrt{b}\cosh t$

$dx = \sqrt{b/a}\,\cosh t$

2) SE $a<0$ e $b>0$ $\Rightarrow x = \sqrt{b/-a}\,\text{sen}\, t$ OPPURE $x = \sqrt{b/-a}\,\cos t$

3) SE $a>0$ e $b<0$ $\Rightarrow x = \sqrt{\frac{-b}{a}}\cosh t$, o $x = \sqrt{\frac{-b}{a}}\frac{1}{\text{sen}\, t}$, o $x = \sqrt{\frac{-b}{a}}\frac{1}{\cos t}$

es. $\int \sqrt{x^2+4}\, dx \rightarrow x = 2\,\text{senh}\, t$ RICORDANDO $\cosh^2 \alpha - \text{senh}^2 \alpha = 1$

$= \int \sqrt{4\,\text{senh}^2 t + 4}\; 2\cosh t\, dt =$ e $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$= 4\int (\cosh t)^2\, dt = 4\int \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2 =$

$= \int e^{2t} + 2 + e^{-2t}\, dt = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t + c$

$\rightarrow x = e^t - e^{-t} \Rightarrow x = e^t - \frac{1}{e^t} \Rightarrow e^{2t} - e^t x - 1 = 0$

$\Rightarrow e^t = \frac{x \pm \sqrt{x^2+4}}{2}$ NON CONSIDERO IL $(-)$

$\Rightarrow = \left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) - \left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)^2 + 2\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right) + c$

N.B. SE HO UNA FORMA del TIPO $\sqrt{x^2+ax+b}\, dx$ POSSO RICONDURLA AD UNO dei CASI DESCRITTI

es. $\int \sqrt{x^2+3x+1}\, dx = \int \sqrt{x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}\, dx$

$= \int \sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - 5/4}\, dx \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}}\cosh t \ldots$

- FUNZIONI TRIGONOMETRICHE del TIPO:

- $f(\text{sen}\, x, \cos^2 x)\cdot \cos x$ o $f(\cos x, \text{sen}^2 x)\cdot \text{sen}\, x$

LE SOST. SARANNO RISPETTIVAMENTE $\text{sen}\, x = t$ e $\cos x = t$

- $f(\text{sen}^2 x, \cos^2 x, \text{sen}\, x \cos x)$ o $f(\text{tg}\, x)$

LA SOSTITUZIONE SARÀ $\text{tg}\, x = t$

RICORDANDO $\text{sen}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x}$

$\text{sen}\, x \cos x = \frac{\text{tg}\, x}{1+\text{tg}^2 x}$ $\Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

- $f(\text{sen}\, x, \cos x)$ LA SOSTITUZIONE CONSIGLIATA SARÀ $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$ RICORDANDO

$\text{sen}\, x = \frac{2\,\text{tg}\, x/2}{1+\text{tg}^2 x/2}$ $\cos x = \frac{1-\text{tg}^2 x/2}{1+\text{tg}^2 x/2}$ $\Rightarrow dx = \frac{2\, dt}{1+t^2}$

SERIE NUMERICHE

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\{s_n\}$ = SUCCESSIONE delle SOMME PARZIALI della SERIE
SE ESISTE IL LIMITE di s_n per $n \to \infty$
ALLORA $\sum_{n=0}^{\infty} = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$

1) SE $\lim_{n\to+\infty} s_n = l \in \mathbb{R}$ LA SERIE CONVERGE a l
2) SE $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$ LA SERIE DIVERGE A $\pm\infty$
3) SE $\lim_{n\to+\infty} s_n$ NON ESISTE LA SERIE É INDETERMINATA

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ É CONVERGENTE $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

- SERIE GEOMETRICA di ORDINE r

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ $r \in \mathbb{R}$ É DETTA SERIE GEOM. $\Rightarrow s_n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & r \neq 1 \\ n+1 & r=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{SE } |r|<1 \Rightarrow \text{CONVERGENTE} \\ +\infty & \text{SE } r \geq 1 \Rightarrow \text{DIVERGENTE} \\ \text{NON ESISTE} & \text{SE } r \leq -1 \Rightarrow \text{INDETERMINATA} \end{cases}$

- SERIE di MENGOLI

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ É DETTA SERIE di MENGOLI $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow s_n = \overbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}^{a_1} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}^{a_2} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}^{a_3} + \ldots \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{n-1}} - \cancel{\tfrac{1}{n}}}^{a_{n-1}} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{n}} - \tfrac{1}{n+1}}^{a_n} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ (SERIE TELESCOPICA)

- SERIE TELESCOPICHE

SONO SERIE CHE SI "ANNULLANO" A COPPIE
DI CUI É FACILE QUINDI STABILIRE LA CONVERGENZA
es. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n$

$\Rightarrow s_n = \ln(2) - \cancel{\ln(1)} + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) + \ldots + \ln(n+1) + - \ln(n) = \ln(n+1) \to +\infty$ DIVERGE

CRITERI di CONVERGENZA

LA CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UNA SERIE CONVERGA É CHE IL TERMINE GENERALE a_n SIA INFINITESIMO ($a_n \to 0$ per $n \to \infty$)

- SE $\sum_{n=1}^{\infty}$ É UNA SERIE A TERMINI DI SEGNO DEF. POSITIVO ($a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$) ALLORA PUÓ ESSERE O CONVERGENTE O DIVERGENTE
- $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ • $\sum_{n=0}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- CRITERIO del CONFRONTO

SUPPONIAMO $0 \leq a_n \leq b_n$ DEFINITIVAMENTE :
1) $\sum b_n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum a_n$ CONVERGE
2) $\sum a_n$ DIVERGE A $+\infty$ $\Rightarrow \sum b_n$ DIVERGE A $+\infty$

COME CONFRONTO SI USANO SERIE ARMONICHE GEN.:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CONVERGE $\alpha > 1$, DIVERGE $\alpha \leq 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ CONV. $\alpha > 1$ o $\alpha = 1, \beta > 1$; DIV. $\alpha < 1$ o $\alpha = 1, \beta \leq 1$

- CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO

DATE a_n e b_n A TERMINI DEF. POSITIVI
SE $a_n \sim b_n$ (CIOÉ SE $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$)
ALLORA LE SERIE $\sum a_n$ e $\sum b_n$ HANNO LO STESSO CARATTERE

RICORDA: $\lim_{f(x)\to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1 \Rightarrow e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$ (per $f(x) \to 0$)

$\Rightarrow \log n < n^k < a^n < n! < n^n$

- **CRITERIO del RAPPORTO**

SIA $a_n > 0$ DEFINITIVAMENTE e $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ TUTTO É POSSIBILE $\Rightarrow$ CAMBIARE CRITERIO

(MOLTO UTILE QUANDO TROVIAMO FATTORIALI)

- **CRITERIO delle RADICE**

SIA $a_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

- SE $\ell < 1$ ALLORA $\sum a_n$ CONVERGE
- SE $\ell > 1$ ALLORA $\sum a_n$ DIVERGE
- SE $\ell = 1$ TUTTO É POSSIBILE $\Rightarrow$ CAMBIARE CRITERIO

PUÓ ESSERE UTILE $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ e $\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

- **CRITERIO INTEGRALE**

SIANO $k_0 \in \mathbb{N}$, $f : [k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ t.c. $f \geq 0$ e DECR. IN $[k_0, +\infty)$

ALLORA $\sum_{n=k_0}^{\infty} f(n)$ É CONVERGENTE (DIVERGENTE) $\Leftrightarrow$ $\int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ É CONVERGENTE (DIVERGENTE)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- LINEARI di I ORDINE

1) $u' - a(x)u = 0$ TUTTE LE SOLUZIONI $\Rightarrow u(x) = c\, e^{A(x)}$
2) $u'_f - a(x)u_f = f$
TUTTE LE SOLUZIONI $\Rightarrow u(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x)\, dx$
DOVE $A(x)$ = PRIMITIVA di $a(x)$ ($\int a(x)\, dx$)

es. $u' - 3u = x$ $a(x) = 3$ $A(x) = 3x$
$u(x) = e^{3x} \int e^{-3x} x\, dx \longmapsto$ PER PARTI
$\int e^{-3x} x\, dx = -\frac{e^{-3x}}{3}x + \int \frac{e^{-3x}}{3} dx = -\frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} - c$
$\Rightarrow e^{3x}\left[-\frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} - c\right] = -\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{9} + c\, e^{3x}\right)$

- PROBLEMI di CAUCHY

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \rightarrow \text{CONDIZIONE INIZIALE} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ TROVO LE SOLUZIONI POSSIBILI dell'EQ. DIFFERENZIALE
$\Rightarrow$ LE PONGO $= u_0$ SOSTITUENDO ALLA x IL TERMINE x_0
$\Rightarrow$ RICAVO c e LO SOSTITUISCO A TUTTE LE SOLUZIONI dell'EQ. DIFFERENZIALE
$\Rightarrow$ SI PUÒ EFFETTUARE LA RIPROVA SOSTITUENDO a $u(x)$ LA $u(x)$ TROVATA ($= f(x)$)

- di II ORDINE A COEFF. COSTANTI OMOGENEE

SONO EQ. DEL TIPO $u'' + au' + bu = 0$
1° PASSO È SCRIVERNE IL CORRISPONDENTE POLINOMIO CARATTERISTICO $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
$\Rightarrow$ CALCOLIAMO QUINDI IL Δ:

- SE $\Delta > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$ TUTTE LE SOL.: $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- SE $\Delta = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\in \mathbb{R}$) TUTTE LE SOL.: $(c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- SE $\Delta < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 = -a \pm \sqrt{-\Delta}\, i = \alpha + i\beta$ ($\in \mathbb{C}$)
TUTTE LE SOL.: $c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$
$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- METODI AD HOC

$P_m(x)$ = POLINOMIO di GRADO m

1) $u'' + au' + bu = P_m(x)$
SOLUZIONI DEL TIPO: $u = x^s Q_m(x)$
N.B. SE $b \neq 0 \Rightarrow s = 0$, SE $b = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow s = 1$,
SE $b = 0$, $a = 0 \Rightarrow s = 2$

es. $u'' + u = x^2 + 4x$ [$s = 0$]
CERCO $u = Q_m(x) = Ax^2 + Bx + C$
$u' = 2Ax + B$ $u'' = 2A$ SOSTITUISCO:
$Ax^2 + Bx + C + 2A = 1x^2 + 4x \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C + 2A = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = 4 \\ C = -2 \end{cases}$
$\Rightarrow u_f = x^2 + 4x - 2$
PONGO $u'' + u = 0$ PER TROVARE TUTTE LE SOL.
$\Rightarrow u_0(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$
ADESSO SOMMO LE SOLUZIONI OTTENUTE:
$\Rightarrow$ TUTTE LE SOL. $= c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x^2 + 4x - 2$

2) $u'' + au' + bu = P_m(x)\, e^{\alpha_1 x}$

SOLUZIONI DEL TIPO: $u = x^s Q_m(x)\, e^{\alpha_1 x}$

N.B. SE α_1 NON É SOL. di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow s = 0$

SE α_1 É SOL. MA $\Delta \neq 0 \Rightarrow s = 1$

SE α_1 É SOL. MA $\Delta = 0 \Rightarrow s = 2$

es. $u'' - 5u' + 6u = e^x$ $\quad \alpha_1 = 1$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \lambda = \frac{5 \pm 1}{2} = <^{3}_{2} \Rightarrow$ α_1 NON É RADICE

$\Rightarrow u_f = A e^x = u'_f = u''_f \rightarrow$ SOST. ALL'EQ.:

$\Rightarrow A e^x - 5 A e^x + 6 A e^x = e^x \Rightarrow e^x A(1 - 5 + 6) = e^x$

$\Rightarrow e^x\, 2A = e^x \Rightarrow 2A = 1 \quad u_f = \frac{1}{2} e^x$

TUTTE LE SOL.: $u_0 + u_f = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2} e^x$

3) $u'' + au' + bu = P_m(x)\, e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x$ $\quad$ ($\cos \beta_1 x$ o $\operatorname{sen} \beta_1 x$)

SOLUZIONI DEL TIPO: $u = x^s e^{\alpha_1 x} (Q_m(x) \cos \beta_1 x + Q^*_m(x) \operatorname{sen} \beta_1 x)$

N.B. SE $\alpha_1 + i\beta_1$ NON É SOL. di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow s = 0$

SE $\alpha_1 + i\beta_1$ É SOL. di $P(\lambda) = 0 \Rightarrow s = 1$

es. $u'' - 3u' + u = \operatorname{sen} x$ $\quad e^{\alpha_1 x} \operatorname{sen} \beta_1 x$

$\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \quad \Delta = 9 - 4 = 5 > 0 \quad \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1$

$u_f = A \cos x + B \operatorname{sen} x$ $\quad$ ($s = 0$, $\alpha_1 + i\beta_1 = i$ NON É SOL.)

SOSTITUISCO: $u'_f = -A \operatorname{sen} x + B \cos x \quad u''_f = -A \cos x - B \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow (-A \cos x - B \operatorname{sen} x) - 3(-A \operatorname{sen} x + B \cos x) + A \cos x +$

$+ B \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \Rightarrow (\cos x)(-A - 3B + A) +$

$+ (\operatorname{sen} x)(\cancel{-B} + 3A \cancel{+B}) = \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow 3A \operatorname{sen} x - 3B \cos x = 1 \operatorname{sen} x \Rightarrow 3A = 1 \quad A = \frac{1}{3},\ B = 0$

$\Rightarrow u_f = \frac{1}{3} \cos x$