

# Esami scritti di Analisi Matematica I 2016 - 2017

|   |                                                  |    |
|---|--------------------------------------------------|----|
| 1 | Esame del 1 febbraio 2017 - I° turno . . . . .   | 2  |
| 2 | Esame del 1 febbraio 2017 - II° turno . . . . .  | 6  |
| 3 | Esame del 14 febbraio 2017 - I° turno . . . . .  | 10 |
| 4 | Esame del 14 febbraio 2017 - II° turno . . . . . | 13 |
| 5 | Esame del 3 luglio 2017 . . . . .                | 18 |
| 6 | Esame del 19 settembre 2017 . . . . .            | 22 |

## 1 Esame del 1 febbraio 2017 - I° turno

**Esercizio 1.** Sia data la funzione

$$f(x) = 1 - \left| \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right|.$$

- a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.
- b) Calcolare la derivata di  $f$ . Studiare la monotonia e tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .
- c) Si consideri ora la funzione composta  $g(x) = e^{f(x)}$ . Sfruttando le informazioni già ottenute per  $f$ , determinare il dominio di  $g$  e i suoi limiti agli estremi del dominio. Verificare che  $g$  ammette un prolungamento per continuità, che indicheremo con  $h(x)$ .
- d) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di  $h$ .
- e) Tracciare un grafico qualitativo di  $h$ , e determinarne gli estremi inferiore e superiore.

---

**Esercizio 2.**

- a) Si scriva la definizione della relazione  $f(x) = o(2x^2 - 1)$  per  $x \rightarrow +\infty$ , e la si illustri con un esempio.
- b) Stabilire se, nell'ipotesi  $f(x) = o(2x^2 - 1)$  per  $x \rightarrow +\infty$ , segue

$$e^{f(x)} = o(e^{2x^2-1}) \quad \text{per} \quad x \rightarrow +\infty.$$

In caso affermativo, lo si dimostri, in caso negativo si dia un contreesempio.

---

**SVOLGIMENTO****Esercizio 1.**

a) La funzione è definita se  $x^2 - 5x + 6 \neq 0$  e quindi

$$\text{dom} f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty).$$

Si ha:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$  mentre  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ . Dunque

- 1) le due rette  $x = 2$  ed  $x = 3$  sono asintoti verticali per  $f$ ;
- 2) la retta  $y = 1$  è asintoto orizzontale bilatero per  $f$ ;
- 3) essendoci un asintoto orizzontale bilatero, non esistono asintoti obliqui.

Si può notare che  $f(x) < 1$  per ogni  $x$  del dominio.

b) Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se } x < 2 \text{ e } x > 3 \\ 1 + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

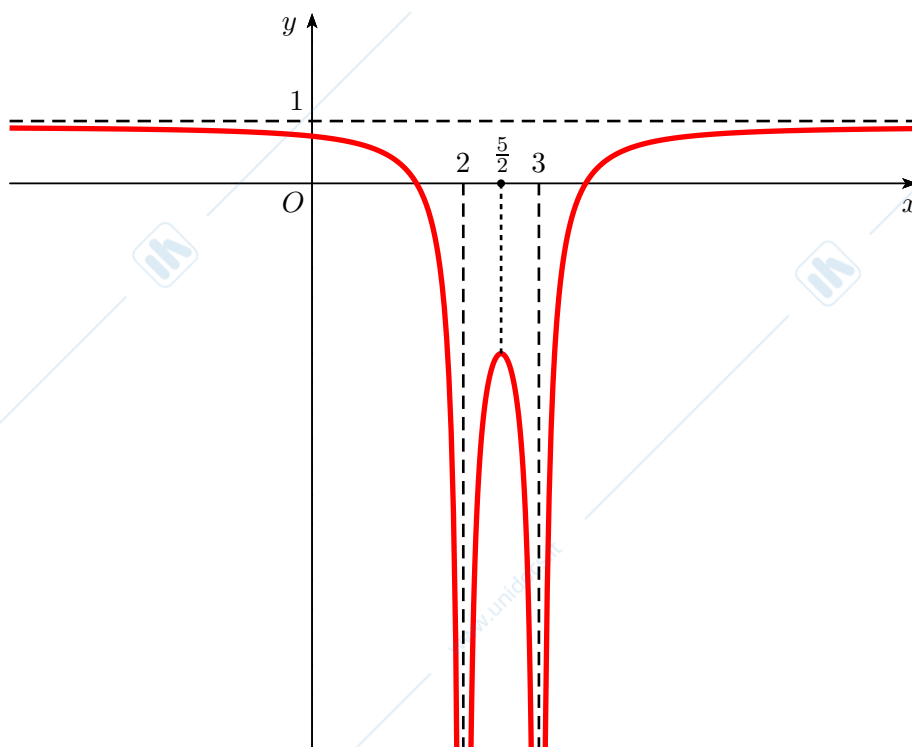
e quindi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se } x < 2 \text{ e } x > 3 \\ -\frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} & \text{se } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Notiamo che  $2x - 5$  ha segno costante per  $x < 2$  ed  $x > 3$  mentre cambia segno nell'intervallo  $(2, 3)$ . Considerando i segni si trova:

- la funzione decresce in  $(-\infty, 2)$  e in  $[5/2, 3)$ ;
- la funzione cresce in  $(2, 5/2]$  e in  $(3, +\infty)$ . Il punto  $x_0 = 5/2$  è punto di massimo locale.

Il grafico è nella figura seguente.



- c) 1) La funzione  $g$  ha lo stesso dominio di  $f$  perché l'esponenziale è ovunque definito.  
 2) Dal teorema delle funzioni composte si ha:
- la funzione  $g$  è continua, perché composizione di funzioni continue e  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \text{dom } g$ ;
  - la retta  $y = e$  è asintoto orizzontale bilatero, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e.$$

- $g$  tende a zero quando  $f$  tende a  $-\infty$  e quindi per  $x \rightarrow 2$  e per  $x \rightarrow 3$ .
- Dunque, in ambedue questi valori di  $x$  la funzione  $g$  ammette estensione continua  $h$  ottenuta ponendo

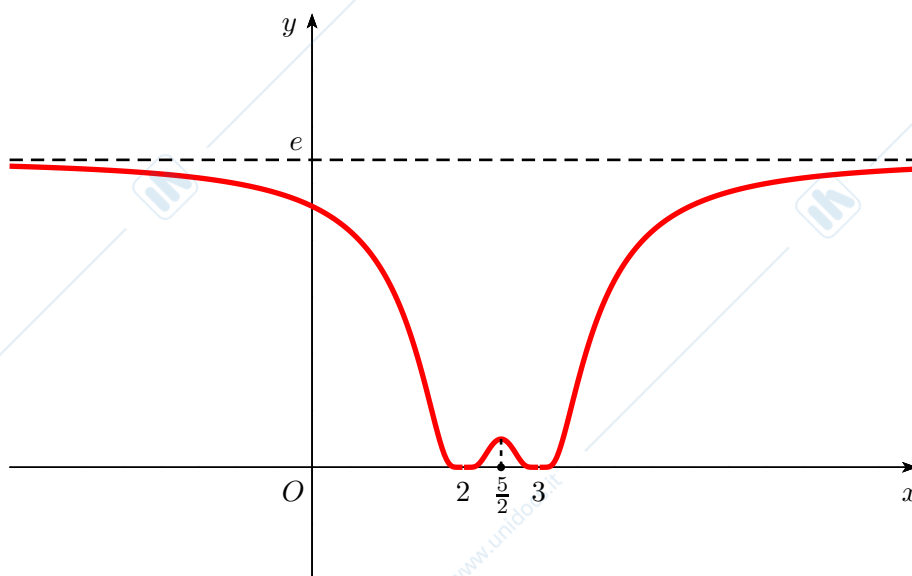
$$h(x) = \begin{cases} e^{f(x)} & \text{se } x \neq 2 \text{ e } x \neq 3 \\ 0 & \text{se } x = 2 \text{ e } x = 3. \end{cases}$$

La funzione così estesa è continua su  $\mathbb{R}$ .

- d) La funzione  $e^y$  è crescente e quindi la funzione  $h$  è crescente, oppure decrescente, negli stessi intervalli in cui è crescente o decrescente la funzione  $f$ . In particolare, il punto  $5/2$  è punto di massimo relativo per  $h$ . Inoltre  $h(x) = 0$  se  $x = 2$  ed  $x = 3$  mentre  $h(x) > 0$  su  $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ . Dunque i punti 2 e 3 sono punti di minimo assoluto per  $h$ .
- e) L'estremo inferiore di  $h$  è 0 (ed è anche minimo); l'estremo superiore è  $e$ . Non esiste massimo. L'esercizio non chiede di studiare la derivabilità di  $h$  in  $x = 2$  e in  $x = 3$ . Per completezza, osserviamo che  $h'(x) = f'(x) e^{f(x)}$  per ogni  $x \neq 2, 3$  e

$$\lim_{x \rightarrow 2} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 3} h'(x) = 0.$$

Il grafico è nella figura seguente.



### Esercizio 2.

- a) Diciamo che  $f(x) = o(2x^2 - 1)$  per  $x \rightarrow +\infty$  se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{2x^2 - 1} = 0$ .

Come esempi si possono considerare:

Esempio 1:  $f(x) = x$ .

In questo caso sia la funzione  $f(x) = x$  che la funzione  $g(x) = 2x^2 - 1$  sono infiniti per  $x \rightarrow +\infty$  e vale  $f(x) = o(2x^2 - 1)$ .

Esempio 2:  $f(x) = 1$ .

In questo caso  $g(x) = 2x^2 - 1$  è un infinito per  $x \rightarrow +\infty$ , mentre  $f$  non lo è e vale  $f(x) = o(2x^2 - 1)$ .

Esempio 3:  $f(x) = \sin x$ .

In questo caso  $g(x) = 2x^2 - 1$  è un infinito per  $x \rightarrow +\infty$ , mentre  $f$  non ha limite per  $x \rightarrow +\infty$ , ma è limitata, e vale  $f(x) = o(2x^2 - 1)$ .

- b) Poniamo  $g(x) = 2x^2 - 1$ . L'esercizio chiede se è vero che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)-g(x)} = 0.$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \left[ \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right] = -\infty.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 0$$

e quindi  $e^{f(x)} = o(e^{g(x)})$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

## 2 Esame del 1 febbraio 2017 - II<sup>o</sup> turno

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi(x-4)}{x+8+|4-x|}.$$

- a) Determinarne il dominio, i limiti agli estremi, e gli eventuali asintoti.
- b) Calcolarne la derivata, determinando eventuali punti di non derivabilità.
- c) Studiarne la monotonia e tracciarne un grafico qualitativo.
- d) Si consideri ora la funzione composta  $h(x) = \sin(f(x))$ . Sfruttando le informazioni già ottenute per  $f$ , determinare dominio e immagine della funzione  $h$ .
- e) Specificare se  $h$  ammette valore massimo e valore minimo assoluti.

---

**Esercizio 2.**

- a) Enunciare il Teorema di Lagrange, e dare poi un esempio di funzione che *NON* soddisfa la tesi del teorema.
  - b) Dimostrare che se  $f$  è derivabile e  $f'(x) < -3$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
-

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

- a) Il denominatore è sempre diverso da 0 e quindi i valori della funzione possono essere calcolati per ogni  $x$  reale:  $\text{dom} f = \mathbb{R}$ .

La funzione è continua e quindi non ha asintoti verticali.

Conviene notare che

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi(x-4)}{x+8+(4-x)} = \frac{\pi}{12}(x-4) = f_1(x) & \text{se } x \leq 4, \\ \frac{\pi(x-4)}{x+8-(4-x)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-4}{x+2} = f_2(x) & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

Dunque, se  $x \leq 4$  il grafico di  $f$  è la retta  $y = \frac{\pi}{12}(x-4)$ , da cui  $f_1(4) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$ .

La funzione  $f_1$  coincide con il suo asintoto obliquo sinistro.

La funzione  $f_2(x)$  è l'iperbole equilatera  $y = \frac{\pi}{2} \frac{x-4}{x+2}$ , quindi  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f_2(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \frac{\pi}{2}$ . La funzione ammette la retta  $y = \frac{\pi}{2}$  come asintoto orizzontale destro.

- b) La funzione è derivabile in ogni  $x \neq 4$ , perché quoziente di funzioni derivabili, con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{12} & \text{se } x < 4, \\ \frac{3\pi}{(x+2)^2} & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

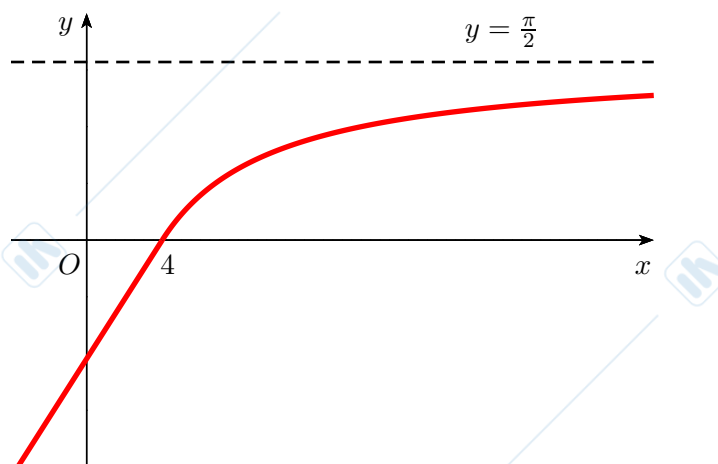
Resta da studiare la derivabilità in  $x = 4$ . Ricordando che la funzione  $f$  è continua, si può usare il *Teorema del tappabuchi* (corollario del Teorema di De L'Hôpital), e calcolare i limiti laterali di  $f'$  per  $x \rightarrow 4$ :

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) = \frac{\pi}{12}, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) = \frac{3\pi}{6^2} = \frac{\pi}{12}.$$

Quindi  $\lim_{x \rightarrow 4} f'(x) = \frac{\pi}{12}$  e  $f$  è derivabile anche in  $x = 4$  con  $f'(4) = \frac{\pi}{12}$ . Pertanto  $f$  è derivabile su  $\mathbb{R}$ .

- c) Poiché  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , deduciamo che  $f$  è strettamente crescente in  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo che, poiché  $f$  è derivabile in  $x = 4$ , la retta  $y = f_1(x)$  è tangente al grafico dell'iperbole  $y = f_2(x)$  nel punto  $x = 4$  in cui si congiungono i due grafici.



- d) La funzione  $h$  è composta di  $y = \sin t$  e di  $t = f(x)$ , funzioni ambedue definite su  $\mathbb{R}$ . Dunque,  $\text{dom } h = \mathbb{R}$ . L'immagine di  $f$  è  $\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = (-\infty, \frac{\pi}{2})$ . Dunque  $h(\mathbb{R}) = \sin(f(\mathbb{R})) = \sin((-\infty, \frac{\pi}{2})) = [-1, 1]$ . Quindi  $\text{Im } h = [-1, 1]$ .
- e) Da  $\text{Im } h = [-1, 1]$ , deduciamo che  $\min_{x \in \mathbb{R}} h(x) = -1$  e che  $\max_{x \in \mathbb{R}} h(x) = 1$  e quindi  $h$  ammette massimo e minimo assoluti.

### Esercizio 2.

- a) **Teorema (di Lagrange o del valor medio).** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Supponiamo che:

- a)  $f$  sia continua in  $[a, b]$ ;
- b)  $f$  sia derivabile in  $(a, b)$ .

Allora esiste  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

Un esempio di funzione che NON soddisfa la TESI del teorema di Lagrange è una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) \neq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Esempio 1:  $f(x) = |x|$  su  $[-1, 1]$ .

In questo caso  $f$  è continua in  $[-1, 1]$ , è derivabile in ogni  $x \in (-1, 1)$  con  $x \neq 0$  e non è derivabile in  $x = 0$ , e risulta che

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = 0,$$

mentre  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ .

$$\text{Esempio 2: } f(x) = \begin{cases} 1 & x = 2 \\ 0 & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$



In questo caso  $f$  non è continua in  $x = 2$ , è derivabile in  $(2, 3)$  e

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = -1,$$

mentre  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in (2, 3)$ .

- b) Poiché  $f$  è derivabile su  $\mathbb{R}$ , applichiamo il Teorema di Lagrange ad  $f$  ristretta ad un qualunque intervallo  $[0, x]$ , con  $x > 0$ . Ne segue che esiste  $c(x) \in (0, x)$  tale che

$$\forall x > 0 : \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c(x)) < -3.$$

Dunque  $f(x) < f(0) - 3x$ . Per il Teorema del confronto sui limiti, poiché  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) - 3x) = -\infty$ , anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

---

---

### 3 Esame del 14 febbraio 2017 - I° turno

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - x^3}.$$

- a) Determinarne il dominio, gli zeri, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti.
- b) Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.
- c) Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di  $f$ , specificando se sono relativi o assoluti.
- d) Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .
- e) Verificare che la restrizione di  $f$  all'intervallo  $[0, 2]$  è invertibile e, sapendo che  $f(1) = \sqrt{2}$ , scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa nel punto di ascissa  $\sqrt{2}$ .

---

**Esercizio 2.**

- a) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = 2x.$$

- b) Sia  $y$  una funzione che risolve, in un intorno di  $x_0 = 1$ , il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3e^{xy} \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Senza calcolare esplicitamente tale soluzione, determinare l'equazione della retta tangente al grafico di  $y$  nel punto di coordinate  $(1, 2)$ .

---

## SVOLGIMENTO

### Esercizio 1.

a) L'argomento della radice è non negativo per  $x \leq 3$ , da cui  $\text{dom } f = (-\infty, 3]$ .

Inoltre,  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$  e  $f(x) = 0 \iff x = 0$  o  $x = 3$ .

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 0.$$

Si noti che, essendo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ , la funzione non ammette asintoto obliquo sinistro.

Inoltre, la funzione è continua perché composizione di funzioni continue, quindi non ammette asintoti verticali.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{3x(2-x)}{2\sqrt{3x^2-x^3}} = \frac{3x(2-x)}{2|x|\sqrt{3-x}} \quad \forall x \in \text{dom } f, \quad x \neq 0, 3.$$

Osservando che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3/\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3/\sqrt{3}, \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -\infty,$$

si conclude che  $x = 0$  è l'unico punto di non derivabilità di  $f$ .

Il punto  $x = 3$  non è un punto interno al dominio di  $f$  e quindi non ha senso chiedersi se esiste la derivata di  $f$  in questo punto. Poiché  $f$  è continua in  $(-\infty, 3]$ , ha però senso chiedersi se esiste la derivata sinistra di  $f$  in  $x = 3$ . Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -\infty,$$

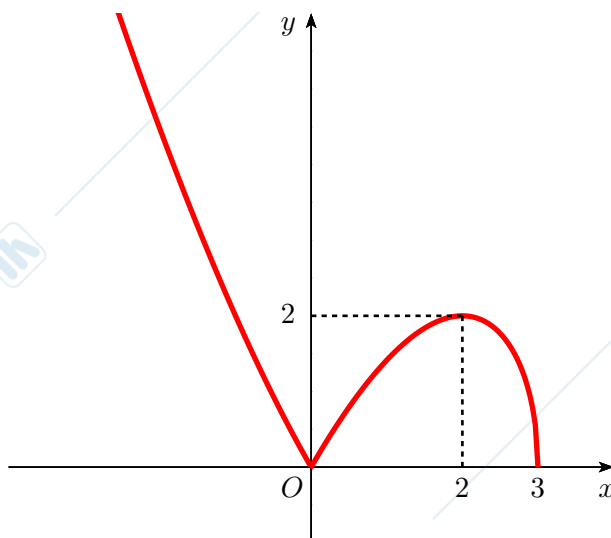
per il *Teorema del tappabuchi*  $f$  non ha derivata sinistra in  $x = 3$ .

c) Si ha  $f'(x) > 0 \iff x(2-x) > 0 \iff 0 < x < 2$ .

Da cui,  $f$  è decrescente strettamente in  $(-\infty, 0]$  e in  $[2, 3]$ , crescente strettamente in  $[0, 2]$ .

In particolare,  $x = 2$  è un punto di massimo relativo mentre  $x = 0$  e  $x = 3$  sono punti di minimo relativo. Infine, dai punti precedenti la funzione è inferiormente limitata con  $\inf f = 0$  e superiormente illimitata, ne concludiamo che  $f$  non ammette punti di massimo assoluto mentre  $x = 0$  e  $x = 3$  sono punti di minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



- e) Per quanto detto sopra  $f$  è crescente strettamente in  $[0, 2]$  e dunque invertibile in tale intervallo. La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa  $\sqrt{2}$  ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(\sqrt{2}) + (f^{-1})'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

Poiché  $f(x) = \sqrt{2}$  per  $x \in [0, 2]$  se e solo se  $x = 1$ , si ha che  $f^{-1}(\sqrt{2}) = 1$  e di conseguenza

$$y = 1 + \frac{1}{f'(1)}(x - \sqrt{2}) \implies y = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}(x - \sqrt{2}).$$

### Esercizio 2.

- a) L'equazione caratteristica  $\lambda^2 + 4 = 0$  ha soluzioni immaginarie pure  $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ . Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata  $y'' + 4y = 0$  è

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La forzante dell'equazione completa è del tipo  $f(x) = e^{0x}p_1(x)$ , con  $p_1(x) = 2x$  (polinomio di grado 1). Siccome  $\lambda = 0$  non è radice dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma  $y_p(x) = ax + b$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  (generico polinomio di grado 1).

Imponendo che  $y_p$  sia soluzione dell'equazione, si ha  $y_p'(x) = a$ ,  $y_p''(x) = 0$  e  $4(ax + b) = 2x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Ne segue che  $a = 1/2$  e  $b = 0$ . In definitiva, l'integrale generale dell'equazione assegnata è

$$c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{2}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b) L'equazione della retta tangente è  $y = y(1) + y'(1)(x - 1)$ . Dal problema di Cauchy, sfruttando il dato iniziale, si ricava che  $y'(1) = 3e^{1 \cdot y(1)} = 3e^2$ . Quindi l'equazione della retta richiesta è

$$y = 2 + 3e^2(x - 1).$$

## 4 Esame del 14 febbraio 2017 - II° turno

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{2x} \cdot |x - 1|^{1/3}.$$

- a) Determinarne il dominio, gli zeri e i limiti agli estremi del dominio.
- b) Individuare eventuali punti di non derivabilità, e studiare in tali punti l'esistenza delle derivate destre e sinistre.
- c) Determinare la derivata, gli intervalli di monotonia e i punti di massimo e minimo di  $f$ , specificando se sono relativi o assoluti.
- d) Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .
- e) Verificare che esiste un intorno di  $x = 0$  in cui  $f$  è invertibile e, sapendo che  $f(0) = 1$ , determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa, nel punto di ascissa 1.

---

**Esercizio 2.**

- a) Determinare e rappresentare graficamente tutte le soluzioni  $z \in \mathbb{C}$  dell'equazione

$$(z - i)^3 + 27 = 0.$$

- b) Rappresentare graficamente, nel piano complesso, gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}, \quad B = \{z^2 : z \in A\}.$$

---

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

a) La funzione è prodotto di funzioni elementari definite su tutto  $\mathbb{R}$  da cui  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ .

Inoltre,  $f(x) = 0 \iff x = 1$ . I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Poiché  $f$  è un infinito di ordine superiore a  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f$  non ammette asintoto obliquo destro.

b) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x}(x-1)^{1/3} & \text{se } x \geq 1 \\ e^{2x}(1-x)^{1/3} & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Quindi  $f$  è derivabile in tutti i punti  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , in quanto composizione di funzioni derivabili.

Pertanto, l'unico punto dove  $f$  potrebbe non essere derivabile è  $x = 1$ . Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2x}(x-1)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2x}}{(x-1)^{2/3}} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{2x}(1-x)^{1/3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-e^{2x}}{(1-x)^{2/3}} = -\infty.$$

Dunque  $x = 1$  è un punto di non derivabilità e più precisamente è un punto di cuspidè.

c) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{3(x-1)^{2/3}}(6x-5) & \text{se } x \in (1, +\infty) \\ \frac{e^{2x}}{3(1-x)^{2/3}}(5-6x) & \text{se } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

Poiché  $f$  è continua in  $x = 1$ , un altro modo per verificare se  $x = 1$  è un punto di non derivabilità, è quello di ricorrere al *Teorema del tappabuchi*, calcolando

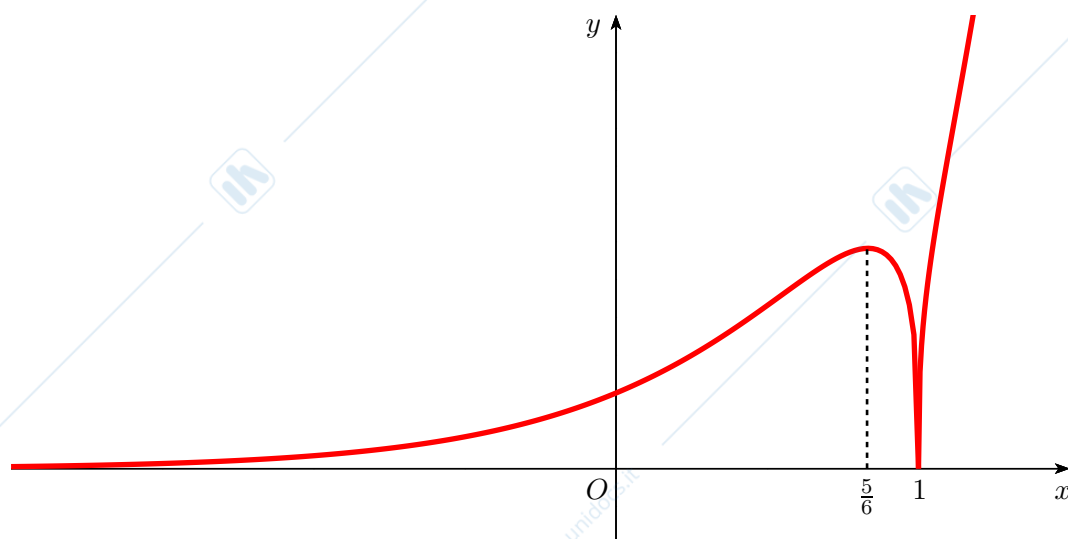
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Si ha che

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 5/6) \cup (1, +\infty).$$

Dunque  $f$  è crescente strettamente in  $(-\infty, 5/6]$  e in  $[1, +\infty)$ , mentre  $f$  è decrescente strettamente in  $[5/6, 1]$ . In particolare,  $x = 5/6$  è un punto di massimo relativo mentre  $x = 1$  è un punto di minimo relativo. Infine, poiché  $f(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , risulta che la funzione  $f$  è inferiormente limitata con  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f = 0$ ; poiché  $f(1) = 0$ ,  $x = 1$  è punto di minimo assoluto. Inoltre, sappiamo dal punto a) che è superiormente illimitata; concludiamo allora che  $f$  non ammette punti di massimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



e) Per quanto detto sopra,  $f$  è crescente strettamente in  $(-\infty, 5/6]$  e dunque invertibile in tale intervallo. Poiché  $x = 0$  è interno a tale intervallo, esistono intorno di  $x = 0$  in cui  $f$  è invertibile (ad esempio, l'intervallo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ). La retta tangente alla funzione inversa nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y(x) = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x - 1).$$

Poiché  $f^{-1}(1) = 0$  e  $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{3}{5}$ , la retta tangente ha equazione  $y = \frac{3}{5}(x - 1)$ .

### Esercizio 2.

a) Posto  $w = z - i$  si ha che

$$(z - i)^3 + 27 = 0 \iff (z - i)^3 = -27 \iff w^3 = -27.$$

Le radici cubiche di  $-27 = 27 \cdot e^{i\pi}$  sono date da

$$w_k = \sqrt[3]{27} \cdot e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)} = 3 \cdot e^{i(\pi/3 + 2k\pi/3)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

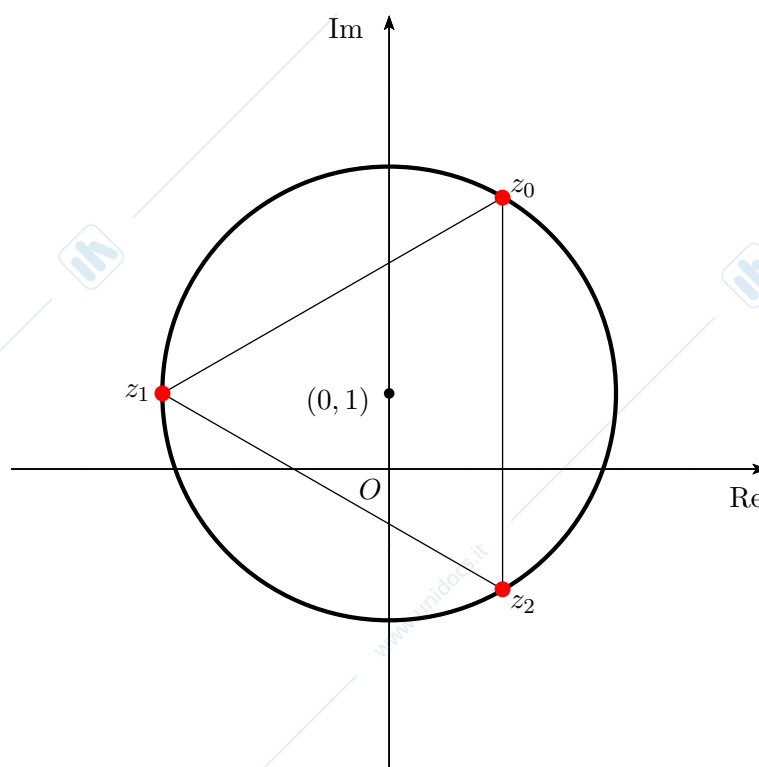
Dunque sono

$$w_0 = 3e^{i\pi/3} = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad w_1 = 3e^{i\pi} = -3, \quad w_2 = 3e^{i5\pi/3} = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione  $(z - i)^3 + 27 = 0$  sono i tre numeri  $z_k = w_k + i$ , con  $k = 0, 1, 2$ , cioè

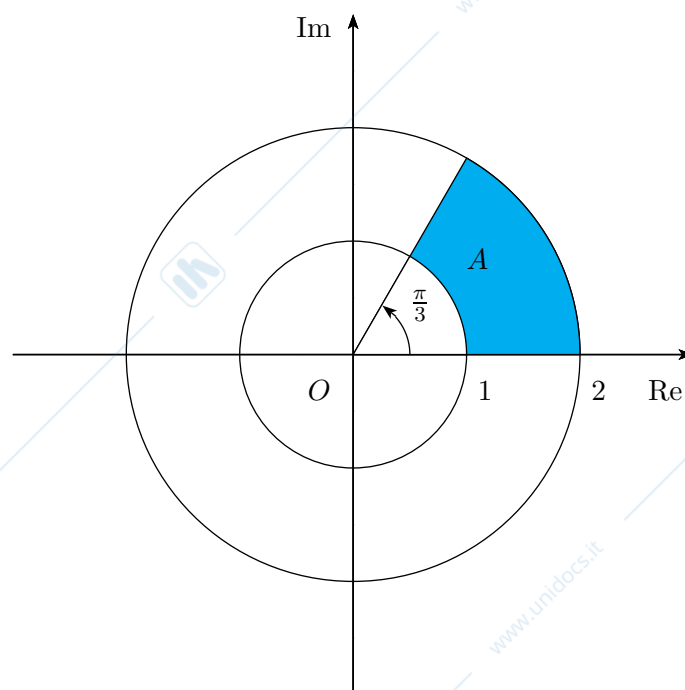
$$z_0 = \frac{3}{2} + i\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \quad z_1 = -3 + i, \quad z_2 = \frac{3}{2} + i\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Essi sono rappresentati nel piano di Gauss dai tre punti della circonferenza di centro  $(0, 1)$  e raggio 3 qui disegnati:



- b) Posto  $z = x + iy$ , si ha  $1 \leq |z| \leq 2 \iff 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ ; dunque nel piano di Gauss soddisfano questa disequazione i punti della corona circolare compresa tra le due circonferenze di raggi 1 e 2.

I numeri complessi  $z$  per cui  $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$  sono i punti dell'angolo compreso tra la semiretta dell'asse reale positivo e la semiretta che forma con esso un angolo di  $\frac{\pi}{3}$ . Dunque l'insieme  $A$  è rappresentato dai punti del disegno sottostante:



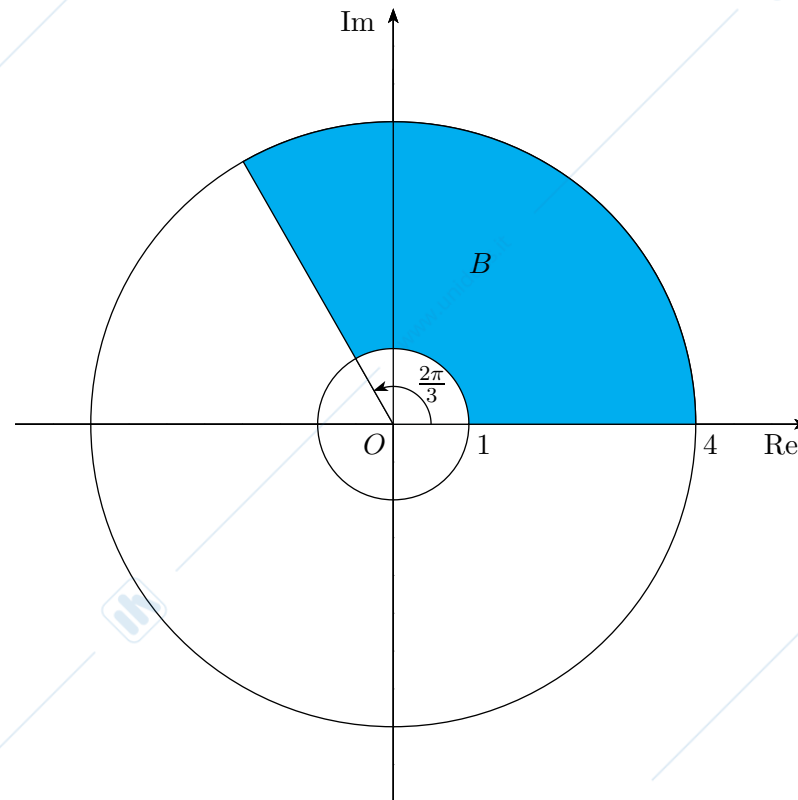


Per capire chi è  $B$ , scriviamo i punti di  $A$  in forma polare: posto  $z = \rho e^{i\theta}$ , si ha:

$$z \in A \iff 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Poiché  $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$ , si ha  $w \in B \iff 1 \leq |w| \leq 4, 0 \leq \arg(w) \leq \frac{2\pi}{3}$ .

Dunque l'insieme  $B$  è rappresentato dai punti del disegno sottostante:



## 5 Esame del 3 luglio 2017

**Esercizio 1.** Si consideri la funzione:

$$f(x) = (x + 1) \cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}}.$$

- a) Determinarne il dominio, le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti.
- b) Studiarne la derivabilità in ogni punto del dominio e calcolarne la derivata.
- c) Determinarne gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- d) Tracciare un grafico qualitativo di  $f$ .
- e) Stabilire se esiste un'estensione continua di  $f$  sull'intervallo  $[-3, 1]$ .

---

**Esercizio 2.**

- a) Enunciare il teorema della media integrale per le funzioni continue.
- b) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Calcolare la media integrale della funzione sugli intervalli  $[-1, 1]$  e  $[-1, \frac{1}{2}]$ , e dire se la media integrale è anche uno dei valori che la funzione assume in tali intervalli.

---

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

a) Il denominatore dell'esponenziale si annulla per  $x = -3$  e  $x = 1$ , da cui segue che

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}.$$

Inoltre,  $f(x) = g(x+1)$  con  $g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{|x|-2}}$  che è una funzione dispari. Ne segue che il grafico di  $f$  è simmetrico rispetto al punto  $(-1, 0)$ . Inoltre

$$f(x) > 0 \iff x > -1 \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \iff x = -1.$$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi,  $x = -3$  è asintoto verticale sinistro, mentre  $x = 1$  è asintoto verticale destro.

Poiché  $e^t = 1 + t + o(t)$  per  $t \rightarrow 0$ , si ha che per  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1) \cdot e^{\frac{1}{|x+1|-2}} = (x+1) \cdot \left[ 1 + \frac{1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{1}{|x+1|-2}\right) \right] = \\ &= x+1 + \frac{x+1}{|x+1|-2} + o\left(\frac{x+1}{|x+1|-2}\right) = \end{aligned}$$

essendo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{|x+1|-2} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x+1|-2} = -1$  si ottiene

$$= \begin{cases} x+2+o(1) & x \rightarrow +\infty \\ x+o(1) & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette l'asintoto obliquo destro  $y = x+2$  e l'asintoto obliquo sinistro  $y = x$ .

b) Si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x(x-3)}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} & x > -1, x \neq 1 \\ \frac{(x+5)(x+2)}{(x+3)^2} e^{-\frac{1}{x+3}} & x < -1, x \neq -3. \end{cases}$$

Essendo  $f$  continua in tutto il suo dominio e

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = e^{-\frac{1}{2}},$$

si conclude che  $f$  è derivabile anche in  $x = -1$  con  $f'(-1) = e^{-\frac{1}{2}}$ . Quindi  $f$  è derivabile in tutto il suo dominio.

c) Per  $x > -1$  si ha

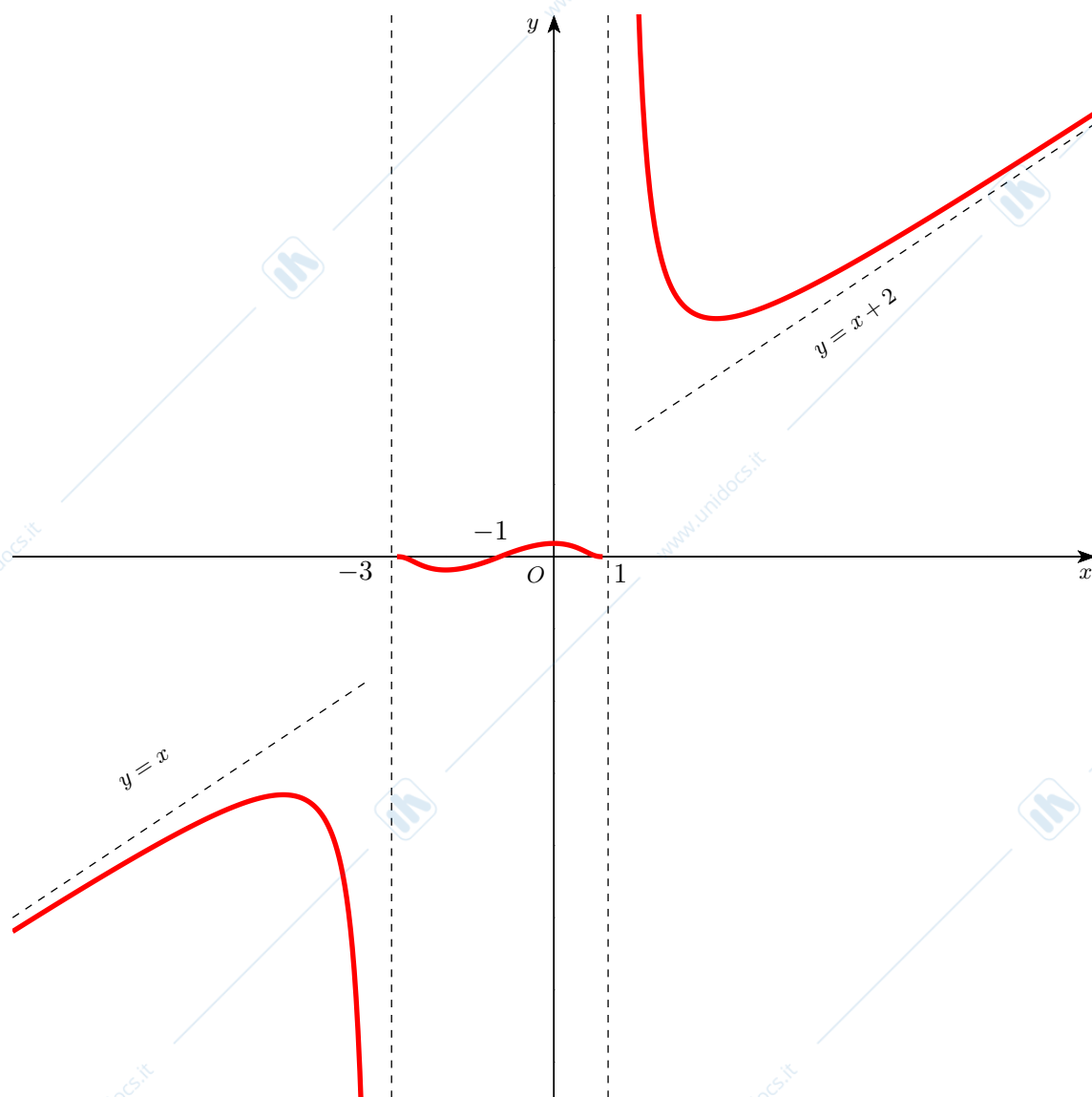
$$f'(x) \geq 0 \iff -1 < x \leq 0 \vee x \geq 3$$

e per  $x \leq -1$

$$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -5 \vee -2 \leq x \leq -1.$$

Ne segue che  $f$  è decrescente strettamente in  $[-5, -3)$ ,  $(-3, -2]$ ,  $[0, 1)$  e in  $(1, 3]$ ; è crescente strettamente in  $(-\infty, -5]$ ,  $[-2, 0]$  e in  $[3, +\infty)$ . In particolare,  $x = -5$  e  $x = 0$  sono punti di massimo relativo mentre  $x = -2$  e  $x = 3$  sono punti di minimo relativo. Infine, per quanto osservato precedentemente la funzione è superiormente e inferiormente illimitata, quindi non ammette punti di massimo o minimo assoluto.

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è



e) Ricordando che  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  possiamo concludere che la funzione ammette

un'estensione continua  $\tilde{f}$  sull'intervallo  $[-3, 1]$  definita nel modo seguente:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-3, 1) \\ 0 & x = -3, 1. \end{cases}$$

---

**Esercizio 2.****a) Teorema (della media integrale per le funzioni continue)**

Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora esiste  $x_0 \in [a, b]$  tale che  $f(x_0) = m(f; a, b)$ , dove  $m(f; a, b)$  è la media integrale di  $f$  sull'intervallo  $[a, b]$  definita da

$$m(f; a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

b) La media integrale della funzione nell'intervallo  $[-1, 1]$  è

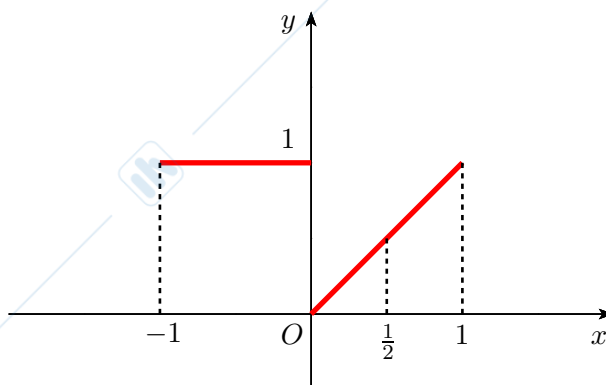
$$m(f; -1, 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché  $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$  e  $x = \frac{3}{4} \in [-1, 1]$ , possiamo concludere che la media integrale di  $f$  su  $[-1, 1]$  è uno dei valori che la funzione assume su questo intervallo.

La media integrale della funzione nell'intervallo  $[-1, \frac{1}{2}]$  è

$$m\left(f; -1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2} - (-1)} \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3} \left( \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right) = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{1}{8} \right) = \frac{3}{4}.$$

Poiché  $f(x) = 1$  per ogni  $x \in [-1, 0]$  e  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$  per ogni  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ , possiamo concludere che non esiste alcun punto  $x \in [-1, \frac{1}{2}]$  in cui  $f$  assume il valore della sua media integrale su questo intervallo.



## 6 Esame del 19 settembre 2017

**Esercizio 1.** (8 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16}.$$

- (a) Identificare il dominio di  $f(x)$ , le eventuali proprietà di simmetria, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.
- (b) Studiare la derivabilità di  $f(x)$  in ciascun punto del suo dominio e calcolarne la derivata.
- (c) Determinare gli intervalli di monotonia e i punti di massimo o minimo, precisando se sono relativi o assoluti.
- (d) Tracciare qualitativamente il grafico di  $f(x)$ .
- (e) Sia  $g(x) = \frac{|x|^n}{x^2 - 16}$  con  $n$  intero. Dire per quali valori di  $n \in \mathbb{Z}$  la funzione  $g(x)$  è derivabile in  $x = 0$ .

---

**Esercizio 2.** (5 punti)

- (a) Supponiamo che una funzione prenda valori di segno opposto in due punti  $a$  e  $b$ . Indicare condizioni sotto le quali il valore 0 appartiene all'immagine della funzione.
- (b) Si consideri la funzione

$$g(x) = \operatorname{sgn}((x-1)(x+3)), \quad \text{dove} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Dire se la funzione  $g$  si annulla sull'intervallo  $[0, 4]$  e dire se, in tale intervallo, essa soddisfa le condizioni date al punto (a).

---

## SVOLGIMENTO

## Esercizio 1.

a)  $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}.$

Osserviamo che  $f(-x) = f(x)$ , quindi  $f$  è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

Inoltre:

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \\ f(0) = 0 \\ f(x) < 0 & \text{se } x \in (-4, 0) \cup (0, 4). \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che le rette  $x = 4$  e  $x = -4$  sono asintoti verticali di  $f$ .

$$\text{Inoltre } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Osserviamo inoltre che:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x(x^2 - 16) + 16x}{x^2 - 16} = x + \frac{16x}{x^2 - 16} = x + o(1) & \text{per } x \rightarrow +\infty \\ f(x) &= \frac{-x(x^2 - 16) - 16x}{x^2 - 16} = -x - \frac{16x}{x^2 - 16} = -x + o(1) & \text{per } x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che la retta  $y = x$  è l'asintoto obliquo destro di  $f$ , mentre la retta  $y = -x$  è l'asintoto obliquo sinistro di  $f$ .

b)  $f$  è certamente derivabile su  $\text{dom } f \setminus \{0\}$ , perché è composizione di funzioni derivabili. In  $x = 0$  invece è necessario valutare separatamente l'esistenza della derivata di  $f$ . Poiché

$$f(x) = \frac{|x|^3}{x^2 - 16} = \text{sgn}(x) \cdot \frac{x^3}{x^2 - 16},$$

possiamo limitarci a calcolare la derivata per  $x > 0$ . Otteniamo:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x > 0, x \neq 4 \\ -\frac{x^2(x^2 - 48)}{(x^2 - 16)^2} & x < 0, x \neq -4. \end{cases}$$

$f$  è continua in  $x = 0$ , e  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ . Dunque, per il teorema "del tappabuchi",  $f$  è derivabile anche in  $x = 0$ , con  $f'(0) = 0$ .

Ne segue che  $f$  è derivabile su tutto il suo dominio e non ha punti di non derivabilità.

c) Dal calcolo precedente, abbiamo che  $x = 0$  e  $x = \pm 4\sqrt{3}$  sono gli unici punti critici di  $f$ .

Inoltre:

- $f'(x) < 0$  se e solo se  $x \in (-\infty, -4\sqrt{3}) \cup (0, 4) \cup (4, 4\sqrt{3})$ .
- $f'(x) > 0$  se e solo se  $x \in (-4\sqrt{3}, -4) \cup (-4, 0) \cup (4\sqrt{3}, +\infty)$ .

Dai corollari del Teorema di Lagrange segue che:

- $f$  è strettamente decrescente su  $(-\infty, -4\sqrt{3}]$ , su  $[0, 4)$  e su  $(4, 4\sqrt{3}]$ .
- $f$  è strettamente crescente su  $[-4\sqrt{3}, -4)$ , su  $(-4, 0]$  e su  $[4\sqrt{3}, +\infty)$ .

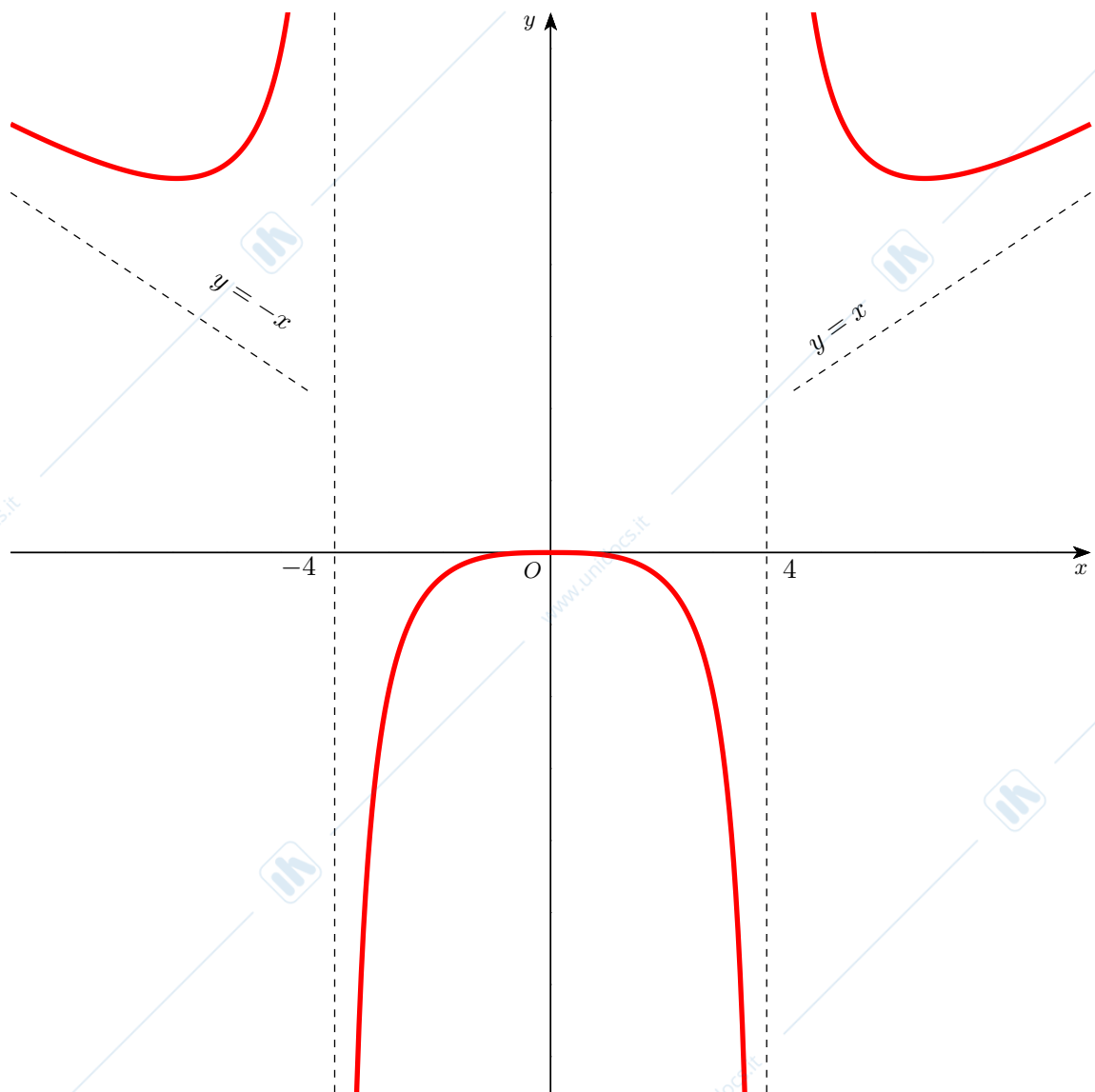
Inoltre

- $x = 0$  è l'unico punto di massimo (locale) di  $f$ .
- $x = 4\sqrt{3}$  e  $x = -4\sqrt{3}$  sono gli unici punti di minimo (locale) di  $f$ .

Poiché  $f(4\sqrt{3}) = f(-4\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 4\sqrt{3}$ , il grafico di  $f$  non attraversa gli asintoti obliqui.

d) Un grafico qualitativo di  $f$  è





e) Per rispondere alla domanda, bisogna considerare separatamente vari casi.

- Per  $n < 0$ ,  $g(x) = \frac{|x|^n}{x^2 - 16}$  non è definita in  $x = 0$ . Pertanto  $g$  non è certamente derivabile in  $x = 0$  se  $n < 0$ .
- Per  $n = 0$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 16}$  è definita e derivabile per ogni  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$ ; in particolare è derivabile in  $x = 0$ .
- Per  $n = 1$ ,  $g(x) = \frac{|x|}{x^2 - 16}$ . In questo caso

$$g'(x) = -\operatorname{sgn} x \frac{x^2 + 16}{(x^2 - 16)^2}, \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 4\}.$$

$g$  è continua in  $x = 0$ , mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\frac{1}{16} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = \frac{1}{16}.$$

Ne segue che  $g$  non è derivabile in  $x = 0$ , che risulta essere un punto angoloso di  $g$ .

- Per  $n \geq 2$ , abbiamo che

$$g'(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \frac{|x|^{n-1}(nx^2 - 16n - 2x^2)}{(x^2 - 16)^2}.$$

Anche in questo caso  $g$  è continua in  $x = 0$ . Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0.$$

Dunque  $g$  è derivabile in  $x = 0$ , con  $g'(0) = 0$ , per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 2$ .

### Esercizio 2.

- a) Possiamo imporre la condizione che la funzione sia continua in  $[a, b]$ . Questa condizione, unita all'ipotesi che la funzione prenda valori di segno opposto in  $a$  e in  $b$  garantisce, per il Teorema degli zeri, che la funzione abbia almeno uno zero in  $[a, b]$ .
- b) La funzione assegnata risulta essere uguale a:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -3 \\ 0 & \text{se } x = -3 \\ -1 & \text{se } -3 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Dunque la funzione è discontinua nell'intervallo  $[0, 4]$ ,  $g(0) = -1 < 0$ ,  $g(4) = 1 > 0$  e ha uno zero in  $x = 1$ . Pertanto non soddisfa le condizioni del punto precedente.

Osserviamo che questo fatto non è sorprendente: il Teorema degli zeri fornisce una condizione sufficiente, ma non necessaria all'esistenza degli zeri. Dunque esistono funzioni, come la  $g$  assegnata in questo esercizio, che sono discontinue, hanno valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo e che hanno degli zeri. Proponiamo un altro esempio, in cui  $f$  è ovunque discontinua e ha infiniti zeri.

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in [0, +\infty) \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

In questo caso  $h$  è ovunque discontinua,  $h(-1) = -1 < 0$  e  $h(1) = 1 > 0$ . I punti irrazionali di  $[-1, 1]$  sono gli zeri (infiniti) di  $h$ .