

1) LIMITI NOTEVOLI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \sin x = x + o(x), \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad e^x = 1 + x + o(x), \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1, \quad \log(x+1) = x + o(x), \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x), \quad \text{per } x \rightarrow 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \quad (\text{se } a > 1) \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad (\text{se } \alpha > 0) \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0 \quad (\text{se } \alpha > 0) \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty \quad (13)$$

2) DERIVATE**2a) REGOLE DI DERIVAZIONE**

$$(f + g)' = f' + g', \quad (14)$$

$$(\alpha f)' = \alpha f', \quad (\text{se } \alpha \in \mathbb{R}) \quad (15)$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (16)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (17)$$

$$Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \quad (18)$$

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{con } y_0 = f(x_0), f'(x_0) \neq 0, (f^{-1} \text{ è la funzione inversa di } f) \quad (19)$$

2b) TABELLA DELLE DERIVATE

f	f'
1	0
x^α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x^{\alpha-1}$
a^x	$a^x \log a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x, \frac{1}{\cos^2 x}$
$\log x $	$\frac{1}{x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

2c) Formule di McLaurin

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n). \quad (20)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n). \quad (21)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}). \quad (22)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}). \quad (23)$$

$$\arctan x = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (24)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) \quad (25)$$

3) INTEGRALI

3a) TABELLA DELLE PRIMITIVE

f	primitive di f
0	C
x^α ($\alpha \neq -1$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\log x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{settcosh} x + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{settsenh} x + C$

3b) FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) dx$$

3c) FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\left(\int f(x) dx \right)_{|x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

4) EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

4i) EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL LINEARI PRIMO ORDINE

Siano a e f due funzioni continue nell'intervallo J . Consideriamo equazione nell'incognita $u \in C^1(J)$

$$u'(x) = a(x)u(x) + f(x), \quad \text{per ogni } x \in J. \quad (26)$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Tutte le soluzioni di (26)

$$u(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} f(x) dx, \quad \text{in } J. \quad (27)$$

In particolare se $f \equiv 0$, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea

$$u' = a(x)u, \quad \text{in } J$$

sono date da

$$u(x) = Ce^{A(x)}, \quad x \in J \quad (28)$$

dove C è una costante arbitraria.

La formula (27) si può anche scrivere

$$u(x) = Ce^{\int_{x_0}^x a(t) dt} + \int_{x_0}^x f(t) \exp\left\{\int_t^x a(s) ds\right\} dt, \quad x \in J, \quad (29)$$

dove C è una costante arbitraria e $x_0 \in J$

4ii) EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

TEOREMA

Sia $f \in C^0(J)$ con J intervallo e siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione

$$u'' + au' + bu = f(x), \quad \text{in } J. \quad (30)$$

Poniamo

$$P(\xi) = \xi^2 + a\xi + b$$

e $\Delta = a^2 - 4b$. Siano ξ_1, ξ_2 le due radici reali o complesse coniugate di

$$P(\xi) = 0. \quad (31)$$

Sia $x_0 \in J$.

(a) Se $\Delta > 0$, allora tutte le soluzioni di (30) sono date da

$$u(x) = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} + \int_{x_0}^x \left(\frac{e^{\xi_1(x-t)} - e^{\xi_2(x-t)}}{\xi_1 - \xi_2} \right) f(t) dt, \quad (32)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(b) Se $\Delta = 0$, allora tutte le soluzioni della (30) sono date da

$$u(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\xi_1 x} + \int_{x_0}^x (x-t) e^{\xi_1(x-t)} f(t) dt, \quad (33)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(c) Se $\Delta < 0$, siano $\xi_1 = \alpha + i\beta$, $\xi_2 = \alpha - i\beta$ le radici complesse coniugate di (31), allora tutte le soluzioni della (30) sono date da

$$u(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} + \frac{1}{\beta} \int_{x_0}^x \left(e^{\alpha(x-t)} \sin \beta(x-t) \right) f(t) dt, \quad (34)$$

dove C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie reali.

(**N.B. In particolare** se $f \equiv 0$ allora tutte le soluzioni di $u'' + au' + bu = 0$ sono date da:

Nel caso (a), $C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x}$; nel caso (b), $(C_1 + C_2 x) e^{\xi_1 x}$; nel caso (c), $(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$, con C_1 e C_2 costanti arbitrarie reali).

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE: Se u_1, u_2 sono soluzioni, rispettivamente di $u'' + au' + bu = f_1(x)$ e di $u'' + au' + bu = f_2(x)$ e λ_1, λ_2 sono due numeri allora $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ è soluzione di $u'' + au' + bu = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

METODI AD HOC

1) Supponiamo che $f(x) = p_m(x)$ con p_m **polinomio di grado m** . Se 0 è una radice di molteplicità s dell'equazione $P(\xi) = 0$ allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m(x)$$

del tipo $\tilde{u} = x^s Q_m(x)$ dove $Q_m(x)$ è un polinomio di grado m . **N.B.** se $b \neq 0$ allora $s = 0$; se $b = 0$ e $a \neq 0$ allora $s = 1$; se $b = 0$ e $a = 0$ allora $s = 2$.

2) Supponiamo che $f(x) = e^{\gamma x} p_m(x)$ con p_m **polinomio di grado m e $\gamma \in \mathbb{R}$** . Se γ è soluzione di $P(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = e^{\gamma x} p_m(x)$$

del tipo $\tilde{u} = e^{\gamma x} x^s Q_m(x)$ dove $Q_m(x)$ è un polinomio di grado m .

N.B. Se γ **non** è soluzione di $P(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se γ è soluzione di $P(\xi) = 0$ ma $\Delta \neq 0$, allora $s = 1$; se γ è soluzione di $P(\xi) = 0$, ma $\Delta = 0$, allora $s = 2$.

3) Supponiamo che $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$ oppure $f(x) = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ con p_m **polinomio di grado m e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$** , con $\beta \neq 0$. Se $\alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\xi) = 0$ di molteplicità s allora si possono cercare soluzioni di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$$

oppure di

$$u'' + au' + bu = p_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

del tipo $\tilde{u} = x^s e^{\alpha x} (Q_m(x) \cos \beta x + Q_m^*(x) \sin \beta x)$ dove $Q_m(x)$ e $Q_m^*(x)$ sono polinomi di grado m .

N.B. Se $\alpha + i\beta$ **non** è soluzione di $P(\xi) = 0$ allora $s = 0$; se $\alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\xi) = 0$, allora $s = 1$.

5) SERIE NUMERICHE

5i) La serie *serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \quad (35)$$

è convergente se e solo se $|r| < 1$. Per $r \geq 1$ è divergente. Per $r \leq -1$ è indeterminata.

Se $|r| < 1$, la somma della serie (35) è $\frac{1}{1-r}$.

5ii) La *serie armonica generalizzata*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

6) INTEGRALI IMPROPRI.

6i) L'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

è convergente se e solo se $\alpha < 1$.

6ii) L'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

è convergente se e solo se $\alpha > 1$.