

Teoremi e Definizioni di Analisi 1

Fondamenti di Matematica

LISTA 1: Teoremi Fondamentali

1. Sommatorie Notevoli

A) Somma Geometrica

Enunciato:

Per ogni $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Dimostrazione. Sia S_n la somma parziale:

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per $(1 - q)$:

$$(1 - q)S_n = (1 - q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

Svolgendo il prodotto, otteniamo una somma telescopica:

$$(1 - q)S_n = (1 + q + \cdots + q^n) - (q + q^2 + \cdots + q^{n+1})$$

Tutti i termini intermedi si cancellano:

$$(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$$

Poiché $q \neq 1$, possiamo dividere per $(1 - q)$:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \square$$

B) Somma dei primi n interi

Enunciato:

Per ogni $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n .

1. Base ($n = 1$):

$$\sum_{k=1}^1 k = 1, \quad \text{Formula: } \frac{1(1+1)}{2} = 1. \quad (\text{Vera})$$

2. **Passo induttivo:** Ipotesi: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Tesi: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Svolgimento:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1)$$

Usando l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left[\frac{n}{2} + 1 \right] \\ &= (n+1) \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \square \end{aligned}$$

2. Limitatezza delle successioni convergenti

Enunciato:

Sia (a_n) una successione reale.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies (a_n) \text{ è limitata.}$$

Dimostrazione. Poiché $a_n \rightarrow l$, scegliamo $\varepsilon = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \quad |a_n - l| < 1$$

Dalla disuguaglianza triangolare inversa:

$$|a_n| - |l| \leq |a_n - l| < 1 \implies |a_n| < |l| + 1 \quad (\forall n \geq n_0)$$

Consideriamo l'insieme finito dei termini esclusi e il limite della coda:

$$M = \max\{|a_0|, \dots, |a_{n_0-1}|, |l| + 1\}$$

Allora $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

3. Teorema della permanenza delle disuguaglianze

Enunciato:

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A in \mathbb{R} . Siano $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni e supponiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$$

Allora:

$$l > m \implies f(x) > g(x) \quad \text{in un intorno di } x_0.$$

Dimostrazione. Poniamo $\varepsilon = \frac{l-m}{2}$. Poiché $l > m$, si ha che $\varepsilon > 0$. Per la definizione di limite applicata alle due funzioni:

1. Esiste un intorno U_1 di x_0 tale che $\forall x \in U_1 \cap A$ (con $x \neq x_0$):

$$|f(x) - l| < \varepsilon \implies f(x) > l - \varepsilon$$

2. Esiste un intorno U_2 di x_0 tale che $\forall x \in U_2 \cap A$ (con $x \neq x_0$):

$$|g(x) - m| < \varepsilon \implies g(x) < m + \varepsilon$$

Sia $U = U_1 \cap U_2$ (che è ancora un intorno di x_0). Per ogni $x \in U \cap A$ valgono entrambe le disuguaglianze. Sostituendo il valore di $\varepsilon = \frac{l-m}{2}$:

$$f(x) > l - \frac{l-m}{2} = \frac{2l-l+m}{2} = \frac{l+m}{2}$$

$$g(x) < m + \frac{l-m}{2} = \frac{2m+l-m}{2} = \frac{l+m}{2}$$

Mettendo insieme le due cose, per ogni x nell'intorno U :

$$g(x) < \frac{l+m}{2} < f(x) \implies f(x) > g(x) \quad \square$$

4. Teorema del prolungamento delle disuguaglianze (Funzioni)

Enunciato:

Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni con limite finito per $x \rightarrow x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$$

Se esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) \leq g(x)$, allora $l_1 \leq l_2$.

Dimostrazione. (Per assurdo). Supponiamo per assurdo che $l_1 > l_2$. Allora il limite della differenza è positivo:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2 > 0$$

Per il teorema della permanenza (applicato alla funzione differenza $h(x) = f(x) - g(x)$ rispetto allo zero), deve esistere un intorno in cui la funzione differenza è positiva:

$$f(x) - g(x) > 0 \implies f(x) > g(x)$$

Ma questo contraddice l'ipotesi che $f(x) \leq g(x)$ nell'intorno di x_0 . Quindi deve essere necessariamente $l_1 \leq l_2$. \square

5. Teorema dei Carabinieri (Funzioni)

Enunciato:

Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di x_0 tali che: 1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ nell'intorno; 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$. Allora anche $g(x)$ tende allo stesso limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per definizione di limite:

- Esiste un intorno U_1 tale che $\forall x \in U_1 \implies l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.
- Esiste un intorno U_2 tale che $\forall x \in U_2 \implies l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$.

Sia $U = U_1 \cap U_2$. In questo intorno valgono entrambe, e vale anche l'ipotesi di ordinamento. Quindi per ogni $x \in U$ ($x \neq x_0$):

$$l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon$$

Osservando gli estremi rispetto a $g(x)$:

$$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon \iff |g(x) - l| < \varepsilon$$

Questa è esattamente la definizione di limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$. □

6. Teorema degli Zeri (di Bolzano)

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se f assume valori di segno opposto agli estremi, cioè $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per fissare le idee che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Utilizziamo il metodo di bisezione. Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Consideriamo il punto medio $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

- Se $f(c_0) = 0$, abbiamo trovato il punto $c = c_0$ e la tesi è dimostrata.
- Se $f(c_0) \neq 0$, costruiamo un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$:
 - Se $f(c_0) > 0$, scegliamo $[a_0, c_0]$.
 - Se $f(c_0) < 0$, scegliamo $[c_0, b_0]$.

Iterando il procedimento, costruiamo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ (intervalli inscatolati);
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$;
3. $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ per ogni n .

Per il principio degli intervalli inscatolati (essendo l'ampiezza infinitesima), esiste un unico punto c comune a tutti gli intervalli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$$

Per la continuità di f , possiamo passare al limite nelle disuguaglianze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$$

Concludiamo che $f(c) = 0$. □

7. Teorema dei Valori Intermedi

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo m e il suo massimo M nell'intervallo. In altre parole, per ogni y_0 tale che $\min f \leq y_0 \leq \max f$, esiste almeno un $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Dimostrazione. Siano x_m e x_M i punti di minimo e massimo (che esistono per Weierstrass), tali che $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$. Fissiamo un valore y_0 compreso strettamente tra m e M (se y_0 coincide con gli estremi la tesi è ovvia). Consideriamo la funzione ausiliaria:

$$g(x) = f(x) - y_0$$

La funzione g è continua perché differenza di funzioni continue. Valutiamo g nei punti x_m e x_M :

$$g(x_m) = f(x_m) - y_0 = m - y_0 < 0 \quad (\text{poiché } m < y_0)$$

$$g(x_M) = f(x_M) - y_0 = M - y_0 > 0 \quad (\text{poiché } M > y_0)$$

Poiché g assume segni discordi, per il **Teorema degli Zeri** esiste un punto x_0 nell'intervallo compreso tra x_m e x_M tale che $g(x_0) = 0$. Ciò significa $f(x_0) - y_0 = 0 \implies f(x_0) = y_0$. \square

8. Teorema di Weierstrass

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato (compatto). Allora f ammette massimo assoluto e minimo assoluto in $[a, b]$.

Dimostrazione. 1. *Limitatezza:* Supponiamo per assurdo che f non sia limitata superiormente. Allora esiste una successione $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) \rightarrow +\infty$. Poiché la successione x_n è limitata, per il teorema di **Bolzano-Weierstrass** esiste una sottosuccessione x_{n_k} convergente a un punto $x_0 \in [a, b]$. Per la continuità di f :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

Ma questo è assurdo, perché $f(x_0)$ è finito mentre avevamo supposto $f(x_{n_k}) \rightarrow +\infty$. Quindi f è limitata. Sia $M = \sup f([a, b])$.

2. *Esistenza del massimo:* Esiste una successione $z_n \in [a, b]$ tale che $f(z_n) \rightarrow M$. Ancora per Bolzano-Weierstrass, estraiamo una sottosuccessione z_{n_k} convergente a un punto $c \in [a, b]$. Per la continuità di f :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_{n_k}) = f(c)$$

Per l'unicità del limite, deve essere $f(c) = M$. Quindi il massimo è assunto. \square

9. Serie Telescopiche e di Mengoli

Definizione:

Una serie $\sum a_n$ si dice telescopica se il termine generale può essere scritto come differenza:
 $a_n = b_n - b_{n+1}$.

Calcolo della somma: Consideriamo la somma parziale n -esima:

$$S_n = \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n+1})$$

I termini intermedi si cancellano a due a due. Rimangono solo il primo e l'ultimo:

$$S_n = b_0 - b_{n+1}$$

La serie converge se esiste finito il limite di b_{n+1} . In tal caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}$$

Esempio (Serie di Mengoli):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Usiamo la scomposizione: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. La somma parziale è $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Passando al limite: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. \square

10. Serie Geometrica

Enunciato:

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ di ragione $q \in \mathbb{R}$:

- Converge a $\frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$;
- Diverge a $+\infty$ se $q \geq 1$;
- È irregolare (indeterminata) se $q \leq -1$.

Dimostrazione. Ricordiamo la formula per la somma parziale n -esima:

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{per } q \neq 1)$$

Calcoliamo il limite di S_n per $n \rightarrow \infty$:

1. **Se $|q| < 1$:** $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$. Quindi $S_n \rightarrow \frac{1}{1-q}$.
2. **Se $q > 1$:** $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$. Il denominatore $1 - q$ è negativo. $S_n \rightarrow +\infty$.
3. **Se $q = 1$:** $S_n = n + 1 \rightarrow +\infty$.
4. **Se $q \leq -1$:** q^{n+1} oscilla. La serie è indeterminata. \square

11. Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Teorema:

Se la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora il termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dimostrazione. Sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ la successione delle somme parziali. Poiché la serie converge, esiste finito il limite $S \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Osserviamo che $a_n = S_n - S_{n-1}$ (per $n \geq 1$). Passando al limite per $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \quad \square$$

12. Regolarità delle serie a termini positivi

Teorema:

Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi (cioè $a_n \geq 0$). Allora la serie non può essere indeterminata: essa può solo **convergere** oppure **divergere a** $+\infty$.

Dimostrazione. Consideriamo la successione delle somme parziali S_n . Poiché $a_n \geq 0$, si ha:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Quindi la successione (S_n) è **monotona crescente**. Per il teorema sul limite delle successioni monotone, il limite di S_n esiste sempre ed coincide con l'estremo superiore (finito o $+\infty$). \square

13. Teorema di Fermat (Punti stazionari)

Enunciato:

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o minimo relativo. Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di **massimo relativo**. Consideriamo il rapporto incrementale:

- Per $x > x_0$ (destra): $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ (num ≤ 0 , den > 0).
- Per $x < x_0$ (sinistra): $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ (num ≤ 0 , den < 0).

Poiché f è derivabile in x_0 , il limite esiste ed è unico. Passando al limite:

$$f'_+(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) \geq 0$$

L'unico numero che è contemporaneamente ≤ 0 e ≥ 0 è lo zero. □

14. Teorema di Rolle

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione. Per Weierstrass f ha massimo M e minimo m .

- Se $M = m$, la funzione è costante, quindi $f'(x) = 0$ ovunque.
- Se $M > m$, poiché $f(a) = f(b)$, almeno uno tra M e m deve essere raggiunto in un punto interno c . Per il Teorema di Fermat, essendo c interno ed estremo, si ha $f'(c) = 0$. □

15. Teorema di Lagrange (del Valor Medio)

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ausiliaria $g(x)$ (differenza tra f e la retta secante):

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right]$$

La funzione g soddisfa le ipotesi di Rolle: 1. Continua e derivabile. 2. $g(a) = 0$ e $g(b) = 0$. Quindi esiste c tale che $g'(c) = 0$. Derivando $g(x)$:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \square$$

16. Teorema degli accrescimenti finiti

Enunciato:

Se f è continua e derivabile in $[a, b]$ e $|f'(x)| \leq M$ per ogni x , allora:

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Dimostrazione. Per Lagrange esiste c tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Passando ai valori assoluti:

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |b - a| \leq M|b - a| \quad \square$$

17. Criterio di costanza

Enunciato:

Se $f'(x) = 0$ per ogni x in un intervallo I , allora f è costante in I .

Dimostrazione. Presi due punti qualsiasi $x_1, x_2 \in I$, applicando Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Poiché $f'(c) = 0$, segue che $f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_2) = f(x_1)$. □

18. Teorema della Media Integrale

Enunciato:

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

Dimostrazione. Per Weierstrass, siano m e M minimo e massimo di f .

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando su $[a, b]$:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a) \implies m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Per il teorema dei valori intermedi, f assume tutti i valori tra m e M , quindi anche il valore medio integrale. □

19. Primo Teorema Fondamentale (Torricelli-Barrow)

Enunciato:

Se f è continua, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Calcoliamo il rapporto incrementale di F :

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Per il teorema della media integrale, questo integrale è uguale a $h \cdot f(c_h)$ dove c_h è un punto compreso tra x e $x + h$. Dividendo per h , il rapporto incrementale vale $f(c_h)$. Se $h \rightarrow 0$, allora $c_h \rightarrow x$. Per la continuità di f , $\lim_{h \rightarrow 0} f(c_h) = f(x)$. □

20. Caratterizzazione delle primitive

Enunciato:

Due primitive F, G della stessa funzione f differiscono per una costante.

Dimostrazione. Consideriamo la differenza $H(x) = F(x) - G(x)$. Derivando:

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Per il criterio di costanza, $H(x)$ deve essere costante. Quindi $F(x) - G(x) = c$. \square

21. Secondo Teorema Fondamentale

Enunciato:

$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$ dove G è una primitiva qualunque.

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ la funzione integrale (che è una primitiva). Sappiamo che $F(x) = G(x) + c$. Calcoliamo in a : $F(a) = 0 \implies G(a) + c = 0 \implies c = -G(a)$. Quindi $F(x) = G(x) - G(a)$. Valutando in b :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) = G(b) - G(a) \quad \square$$

LISTA 2: Ulteriori teoremi con dimostrazione

1. Disuguaglianza di Bernoulli

Enunciato:

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n .

- **Base ($n = 0$):** $(1+x)^0 = 1$ e $1+0 = 1$. $1 \geq 1$ (Vera).
- **Passo induttivo:** Ipotesi $(1+x)^n \geq 1+nx$. Moltiplichiamo per $(1+x)$ (positivo):

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

Poiché $nx^2 \geq 0$, otteniamo $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. \square

2. Caratterizzazione degli insiemi contigui

Enunciato:

Due insiemi separati A, B ($A \leq B$) sono contigui se e solo se $\sup A = \inf B$.

Dimostrazione. Sia $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$. Vale sempre $\alpha \leq \beta$.

- (\implies) Se fosse $\alpha < \beta$, avremmo un "salto" $d = \beta - \alpha > 0$. La distanza tra un qualsiasi $a \in A$ e $b \in B$ sarebbe $b - a \geq \beta - \alpha = d$. Questo contraddice la definizione di contiguità (che richiede distanza minore di ogni ε).
- (\impliedby) Se $\alpha = \beta = L$. Per le proprietà di sup e inf, per ogni $\varepsilon > 0$: Esiste $a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon/2$. Esiste $b \in B$ tale che $b < L + \varepsilon/2$. La distanza $b - a < \varepsilon$. \square

3. Unicità del Limite

Teorema:

Se una successione ammette limite, questo è unico.

Dimostrazione. (Per assurdo). Supponiamo esistano due limiti diversi $l_1 \neq l_2$. Scegliamo $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$. Esistono n_1, n_2 tali che per n grande: $|a_n - l_1| < \varepsilon$ e $|a_n - l_2| < \varepsilon$. Per la disuguaglianza triangolare:

$$|l_1 - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Sostituendo ε : $|l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|$, assurdo. \square

4. Limite notevole $\sin(x)/x$

Teorema: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Dimostrazione. Consideriamo $x \in (0, \pi/2)$. Geometricamente (confronto aree triangoli e settore):

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$$

Dividendo per $\frac{1}{2} \sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \implies \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Per $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$. Per il Teorema dei Carabinieri il limite è 1. La funzione è pari, quindi vale anche per $x \rightarrow 0^-$. \square

5. Limiti funzioni monotone

Teorema:

Se f è crescente in (a, b) , allora $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{t < x_0} f(t)$.

Dimostrazione. Sia $L = \sup\{f(t) : t < x_0\}$. Vogliamo mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente $f(x)$ è in $(L - \varepsilon, L]$. 1. $f(x) \leq L$ per definizione di sup. 2. Esiste $y < x_0$ tale che $f(y) > L - \varepsilon$. Essendo f crescente, per ogni $x \in (y, x_0)$ si ha $L - \varepsilon < f(y) \leq f(x) \leq L$. Questa è esattamente la definizione di limite sinistro. \square

6. Teorema sull'esistenza di punti fissi

Enunciato:

Se $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ è continua, esiste x_0 tale che $g(x_0) = x_0$.

Dimostrazione. Consideriamo $f(x) = g(x) - x$. $f(a) = g(a) - a \geq 0$. $f(b) = g(b) - b \leq 0$. Per il Teorema degli Zeri applicato a f , esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero $g(x_0) = x_0$. \square

7. Continuità delle funzioni Lipschitziane

Proposizione: Se f è Lipschitziana, è continua.

Dimostrazione. Sia $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$. Fissiamo x_0 . Vogliamo calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|$$

Per $x \rightarrow x_0$, il termine destro tende a 0. Per i Carabinieri, $|f(x) - f(x_0)| \rightarrow 0$, quindi $f(x) \rightarrow f(x_0)$. \square

8. Continuità delle funzioni composte

Teorema:

Se f è continua in x_0 e g in $y_0 = f(x_0)$, allora $g \circ f$ è continua in x_0 .

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché g è continua, $\exists \eta > 0$ t.c. $|y - y_0| < \eta \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Poiché f è continua, $\exists \delta > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \eta$. Componendo: se $|x - x_0| < \delta$, allora $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. \square

9. Caratterizzazione sequenziale

Teorema:

f è continua in $x_0 \iff \forall x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Dimostrazione. (\implies) Se f è continua, per definizione ε - δ . Se $x_n \rightarrow x_0$, definitivamente entra in δ , quindi $f(x_n)$ entra in ε . (\impliedby) Per assurdo. Se f non fosse continua, esisterebbe ε_0 e una successione x_n convergente a x_0 ma con $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$. Contraddizione. \square

10. Convergenza serie $1/n!$ e $1/n^2$

Dimostrazione A ($1/n!$): Vale $n! \geq 2^{n-1}$ per $n \geq 1$. Quindi $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n}$. La serie è maggiorata da una geometrica convergente (ragione $1/2$).

Dimostrazione B ($1/n^2$): Vale $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ per $n \geq 2$. La serie $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ è una serie di Mengoli telescopica convergente (somma 1). Per il criterio del confronto, anche $\sum 1/n^2$ converge.

11. Criterio del Rapporto

Teorema: Se $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$, la serie converge.

Dimostrazione. Fissiamo q tale che $l < q < 1$. Definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \implies a_{n+1} < qa_n$. Iterando: $a_{n+k} < q^k a_n$. La serie è maggiorata (nella coda) da una serie geometrica di ragione $q < 1$, quindi converge. \square

12. Serie assolutamente convergenti

Teorema: $\sum |a_n|$ converge $\implies \sum a_n$ converge.

Dimostrazione. Vale la disuguaglianza $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$. Poiché $\sum |a_n|$ converge, anche $\sum 2|a_n|$ converge. Per confronto, $\sum (a_n + |a_n|)$ converge. Scrivendo $\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$, la serie è differenza di convergenti. \square

13. Criterio di Riemann

Enunciato: f integrabile $\iff \forall \varepsilon, \exists P : S(P) - s(P) < \varepsilon$.

Dimostrazione. (\implies) Se integrabile, $\sup s(P) = \inf S(P) = I$. Esistono partizioni con somme arbitrarie vicine a I . Unendole si ha la tesi. (\impliedby) Sappiamo $s(P) \leq \int_* f \leq \int^* f \leq S(P)$. Quindi $0 \leq \int^* f - \int_* f \leq S(P) - s(P) < \varepsilon$. Dato che ε è arbitrario, l'integrale superiore è uguale all'inferiore. \square

14. Integrabilità delle funzioni monotone

Teorema: f monotona su $[a, b]$ è integrabile.

Dimostrazione. Supponiamo f crescente. Prendiamo una partizione in n intervalli uguali di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$. La differenza tra somme sup e inf è:

$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot h$$

Questa è una somma telescopica che vale:

$$= h(f(b) - f(a)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Scegliendo n abbastanza grande, questa quantità diventa $< \varepsilon$. \square

15. Teorema di Heine-Cantor

Teorema: f continua su compatto \implies uniformemente continua.

Dimostrazione. (Per assurdo). Se non lo fosse, esisterebbe ε_0 e due successioni x_n, y_n con $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Per Bolzano-Weierstrass, x_n ha una sottosuccessione convergente a L . Anche y_n converge a L . Per continuità, $f(x_{n_k}) \rightarrow f(L)$ e $f(y_{n_k}) \rightarrow f(L)$. La differenza tende a 0, contraddicendo l'ipotesi $\geq \varepsilon_0$. \square

16. Integrabilità delle funzioni continue

Teorema: f continua su $[a, b]$ è integrabile.

Dimostrazione. Per Heine-Cantor, f è uniformemente continua. Fissato ε , esiste δ tale che se $|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Scegliamo una partizione con ampiezza minore di δ . In ogni intervallo, $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Allora $S(P) - s(P) < \sum \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_k = \varepsilon$. \square

DEFINIZIONI

1. Funzioni

Siano A e B due insiemi non vuoti e $f : A \rightarrow B$ una funzione.

Funzione Iniettiva:

La funzione f si dice iniettiva se manda elementi distinti in elementi distinti:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Equivalentemente: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

Funzione Suriettiva:

La funzione f si dice suriettiva (o surgettiva) se ogni elemento del codominio è immagine di almeno un elemento del dominio:

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A \text{ tale che } f(x) = y$$

(Ovvero, l'immagine di f coincide con il codominio B).

Funzione Bigettiva (o Biunivoca):

La funzione f si dice bigettiva se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Funzione Composta:

Date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$, la funzione composta $g \circ f : A \rightarrow C$ è definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A$$

Funzione Invertibile e Funzione Inversa:

Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che:

- $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$ (cioè $g \circ f = \text{id}_A$);
- $f(g(y)) = y$ per ogni $y \in B$ (cioè $f \circ g = \text{id}_B$).

Tale funzione g è unica, si chiama funzione inversa di f e si denota con f^{-1} . (Nota: Una funzione è invertibile se e solo se è bigettiva).

2. Induzione e Bernoulli

Principio di Induzione:

Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da un numero naturale $n \in \mathbb{N}$. Se valgono le due condizioni: 1. Base: $P(0)$ è vera; 2. Passo induttivo: $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \implies P(n+1)$; Allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Disuguaglianza di Bernoulli:

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

3. Insiemi numerici: Massimi, Minimi ed Estremi

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto.

Maggioranti e Minoranti:

- Un numero $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se $a \leq M$ per ogni $a \in A$.

- Un numero $m \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $m \leq a$ per ogni $a \in A$.

Insiemi limitati:

- A è limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante.
- A è limitato inferiormente se ammette almeno un minorante.
- A è limitato se lo è sia superiormente che inferiormente.

Massimo e Minimo:

- Il massimo di A ($\max A$) è un maggiorante che appartiene all'insieme A .
- Il minimo di A ($\min A$) è un minorante che appartiene all'insieme A .

Estremo Superiore ($\sup A$):

È il minimo dei maggioranti di A . Se A è limitato superiormente, $\sup A$ è l'unico numero reale L che soddisfa le due proprietà caratteristiche: 1. $a \leq L, \forall a \in A$ (L è un maggiorante); 2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tale che $a > L - \varepsilon$ (è il più piccolo dei maggioranti).

Estremo Inferiore ($\inf A$):

È il massimo dei minoranti di A . Se A è limitato inferiormente, $\inf A$ è l'unico numero reale l tale che: 1. $l \leq a, \forall a \in A$ (l è un minorante); 2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tale che $a < l + \varepsilon$.

4. Completezza e Archimede

Assioma di Completezza di \mathbb{R} (o di Dedekind):

Ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R} che sia limitato superiormente ammette estremo superiore in \mathbb{R} . (Equivalentemente: ogni sottoinsieme non vuoto limitato inferiormente ammette estremo inferiore).

Proprietà di Archimede:

L'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} non è limitato superiormente in \mathbb{R} . In termini operativi:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a > 0, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } na > b$$

5. Insiemi Separati e Contigui

Insiemi Separati:

Due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}$ si dicono separati se:

$$\forall a \in A, \forall b \in B \implies a \leq b$$

(Tutti gli elementi di A stanno "a sinistra" di tutti gli elementi di B).

Elemento Separatore:

Un numero $c \in \mathbb{R}$ si dice elemento separatore per A e B se:

$$a \leq c \leq b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Insiemi Contigui:

Due insiemi A e B separati si dicono contigui se ammettono un solo elemento separatore.

Caratterizzazione della contiguità:

Siano A e B due insiemi separati (con $A \leq B$). Essi sono contigui se e solo se:

$$\sup A = \inf B$$

(In tal caso, il valore comune $S = \sup A = \inf B$ è l'unico elemento separatore).

6. Fattoriale e Binomio di Newton

Fattoriale:

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si definisce $n!$ (leggi "n fattoriale") come:

$$0! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)! \quad (\text{per } n \geq 1)$$

Quindi $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Coefficiente Binomiale:

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$, si definisce:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi scelti da un insieme di n elementi.

Teorema del Binomio (di Newton):

Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

7. Funzioni Limitate ed Estremi

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è limitata superiormente (o inferiormente) se la sua immagine $f(D)$ è un insieme limitato superiormente (o inferiormente). Ovvero, se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in D$.

Massimo e Minimo Assoluto:

- M è il massimo assoluto di f se esiste un punto $x_M \in D$ tale che $f(x_M) = M$ e $f(x) \leq M$ per ogni $x \in D$.
- m è il minimo assoluto di f se esiste un punto $x_m \in D$ tale che $f(x_m) = m$ e $f(x) \geq m$ per ogni $x \in D$.

Estremo Superiore ($\sup f$):

È l'estremo superiore dell'insieme immagine. $L = \sup_{x \in D} f(x)$ è caratterizzato da: 1. $f(x) \leq L, \forall x \in D$; 2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in D$ tale che $f(\bar{x}) > L - \varepsilon$.

Estremo Inferiore ($\inf f$):

È l'estremo inferiore dell'insieme immagine. $l = \inf_{x \in D} f(x)$ è caratterizzato da: 1. $f(x) \geq l, \forall x \in D$; 2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{x} \in D$ tale che $f(\bar{x}) < l + \varepsilon$.

8. Funzioni Monotone

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definizioni:

- Crescente (debolmente): $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- Strettamente crescente: $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- Decrescente (debolmente): $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- Strettamente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Proprietà di Composizione:

- La composizione di due funzioni crescenti è crescente.
- La composizione di due funzioni decrescenti è crescente.
- La composizione di una crescente e una decrescente è decrescente.

Proprietà dell'Inversa:

Se f è strettamente monotona, allora è iniettiva e la sua inversa f^{-1} (definita sull'immagine) ha lo stesso tipo di monotonia di f . (Es. l'inversa di una funzione crescente è crescente).

9. Simmetrie e Periodicità**Funzione Pari:**

f si dice pari se il dominio è simmetrico rispetto all'origine e:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

(Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y , es. x^2 , $\cos x$).

Funzione Dispari:

f si dice dispari se il dominio è simmetrico rispetto all'origine e:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$$

(Il grafico è simmetrico rispetto all'origine, es. x^3 , $\sin x$).

Funzione Periodica:

f si dice periodica di periodo $T > 0$ se:

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D$$

(Il grafico si ripete identico ogni intervallo T).

10. Funzioni Elementari (Proprietà chiave)**Potenze (x^α):**

- $n \in \mathbb{N}$ pari: definita su \mathbb{R} , pari, a forma di parabola (x^2).
- $n \in \mathbb{N}$ dispari: definita su \mathbb{R} , dispari, bigettiva su \mathbb{R} (x^3).
- n intero negativo ($x^{-n} = 1/x^n$): definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ (irrazionale): definita solo per $x > 0$ (o $x \geq 0$ se $\alpha > 0$).

Radici ($x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$):

- n pari: definita su $[0, +\infty)$, strettamente crescente, immagine $[0, +\infty)$.
- n dispari: definita su \mathbb{R} , dispari, strettamente crescente, immagine \mathbb{R} .

Esponenziale (a^x) e Logaritmo ($\log_a x$):

Con base $a > 1$:

- a^x : Dominio \mathbb{R} , Immagine $(0, +\infty)$, strettamente crescente, $a^0 = 1$.
- $\log_a x$: Dominio $(0, +\infty)$, Immagine \mathbb{R} , strettamente crescente, $\log_a 1 = 0$.

(Se $0 < a < 1$ sono entrambe strettamente decrescenti).

Trigonometriche:

- $\sin x, \cos x$: Periodiche (2π), limitate in $[-1, 1]$.
- $\tan x$: Periodica (π), non definita in $\pi/2 + k\pi$, suriettiva su \mathbb{R} .
- **Inverse:**
 - $\arcsin x$: Dom $[-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$. Crescente.
 - $\arccos x$: Dom $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Decrescente.
 - $\arctan x$: Dom $\mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$. Crescente.

Iperboliche:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (dispari, crescente su \mathbb{R}).
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (pari, minimo in 0, vale 1).
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ (dispari, limitata tra -1 e 1).

11. Topologia: Aderenza, Accumulazione e Chiusura

Punto di Aderenza:

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di aderenza per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A :

$$U \cap A \neq \emptyset, \quad \forall U \in \mathcal{I}(x_0)$$

(Tutti i punti di A sono di aderenza, così come i punti di accumulazione).

Punto di Accumulazione:

Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice di accumulazione per A se ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A diverso da x_0 :

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall U \in \mathcal{I}(x_0)$$

Chiusura e Insiemi Chiusi:

La chiusura di A (indicata con \bar{A} o $cl(A)$) è l'insieme di tutti i punti di aderenza di A . Un insieme A si dice chiuso se coincide con la sua chiusura ($\bar{A} = A$), ovvero se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

12. Definizione di Limite

Definizione Generale (Topologica):

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per D . Si dice che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (con $l, x_0 \in \mathbb{R}$) se: Per ogni intorno V di l , esiste un intorno U di x_0 tale che:

$$\forall x \in D \cap U, x \neq x_0 \implies f(x) \in V$$

Casi Particolari (Metrica):

- x_0 finito, l finito: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$.
- x_0 finito, $l = \pm\infty$: $\forall M > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$ ($o < -M$).
- $x_0 = \pm\infty, l$ finito: $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 : x > K \implies |f(x) - l| < \varepsilon$.
- $x_0 = \pm\infty, l = \pm\infty$: $\forall M > 0, \exists K > 0 : x > K \implies f(x) > M$.

Limite di una Restrizione:

Se esiste il limite globale l , allora per ogni sottoinsieme $A \subseteq D$ (con x_0 di acc. per A), la restrizione $f|_A$ tende allo stesso limite l .

Criterio di Non Esistenza:

Se esistono due sottoinsiemi (o due successioni/percorsi) per cui la funzione tende a limiti diversi, allora il limite globale non esiste.

Limite Destro e Sinistro:

Sono i limiti delle restrizioni di f rispettivamente agli insiemi $D \cap (x_0, +\infty)$ e $D \cap (-\infty, x_0)$. Il limite globale esiste se e solo se esistono uguali il limite destro e sinistro.

13. Limiti di Successioni**Definizione:**

Una successione (a_n) ha limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ se:

- Convergente ($l \in \mathbb{R}$): $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \implies |a_n - l| < \varepsilon$.
- Divergente $(+\infty)$: $\forall M > 0, \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \implies a_n > M$.

Sottosuccessioni:

Data (a_n) , una sottosuccessione (a_{n_k}) si ottiene prendendo indici n_k strettamente crescenti.

Teorema: Se $a_n \rightarrow l$, allora ogni sua sottosuccessione $a_{n_k} \rightarrow l$.

14. Operazioni coi Limiti e Forme Indeterminate**Algebra dei Limiti (in \mathbb{R}):**

Se $f \rightarrow l_1$ e $g \rightarrow l_2$ (finiti), allora:

- $f + g \rightarrow l_1 + l_2$
- $f \cdot g \rightarrow l_1 \cdot l_2$
- $f/g \rightarrow l_1/l_2$ (se $l_2 \neq 0$)

Estensione a $\bar{\mathbb{R}}$ ($\pm\infty$):

Valgono regole come: $l + (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $l/\infty = 0$.

Forme Indeterminate:

Sono i casi in cui l'algebra dei limiti non dà un risultato immediato e serve un'analisi specifica:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

15. Limiti Monotoni e Numero di Nepero

Funzioni Monotone:

Se f è monotona crescente in (a, b) , allora in ogni punto x_0 esistono finiti i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{(a, x_0)} f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{(x_0, b)} f$$

Agli estremi del dominio il limite esiste (finito o infinito). Non esistono limiti oscillanti.

Successioni Monotone:

Una successione monotona ammette sempre limite.

- Se è limitata, converge.
- Se è illimitata, diverge.

Numero di Nepero e :

La successione $a_n = (1 + 1/n)^n$ è strettamente crescente e limitata superiormente (da 3). Il suo limite è il numero irrazionale e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

16. Confronto Locale e Gerarchie

Limite di Funzione Composta:

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ e g è continua in y_0 , allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

(Se g non è continua, serve l'ipotesi aggiuntiva che $f(x) \neq y_0$ in un intorno di x_0).

Simboli di Landau (o-piccolo e Asintotico):

Siano f, g due funzioni definite vicino a x_0 (con $g(x) \neq 0$).

- Trascurabile ($f = o(g)$): Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- Asintotico ($f \sim g$): Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
- Stesso ordine: Se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Gerarchia degli Infiniti (per $x \rightarrow +\infty$):

Ordinati dal più "lento" al più "veloce" (ciascuno è o-piccolo del successivo):

$$\log_a x \ll x^\alpha \ll b^x \ll x^x$$

(con $\alpha > 0, a > 1, b > 1$).

Gerarchia degli Infinitesimi (per $x \rightarrow 0^+$):

L'ordine si inverte rispetto agli infiniti reciproci. Esempi base: x^n è infinitesimo di ordine superiore a x se $n > 1$.

17. Proprietà delle Funzioni Continue

Algebra delle Funzioni Continue:

Somma, prodotto, quoziente (dove il denom. $\neq 0$) e composizione di funzioni continue generano funzioni continue.

Funzioni Lipschitziane:

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana se $\exists L > 0$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Proprietà: Ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua (e quindi continua). Non vale il viceversa (es. \sqrt{x} su $[0, 1]$).

Prolungamento per Continuità:

Se f è continua in $D \setminus \{x_0\}$ e esiste finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora f è prolungabile con continuità in x_0 ponendo $f(x_0) = l$.

Tipi di Discontinuità (in x_0):

- Eliminabile: Esiste finito il limite l , ma $l \neq f(x_0)$ (o f non definita).
- I specie (Salto): Esistono finiti l_+ e l_- ma $l_+ \neq l_-$.
- II specie: Almeno uno dei limiti l_+, l_- è infinito o non esiste.

Continuità delle Monotone:

Una funzione monotona può avere solo discontinuità di I specie (salti). Se il dominio è un intervallo e l'immagine è un intervallo (cioè assume tutti i valori intermedi), allora è continua.

18. Caratterizzazioni Sequenziali

Limiti:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff$ per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$ (con $x_n \neq x_0$), si ha $f(x_n) \rightarrow l$.

Continuità:

f è continua in $x_0 \iff$ per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$, si ha $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Chiusura di un Insieme:

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso se e solo se per ogni successione convergente (x_n) contenuta in C ($x_n \in C$), il suo limite appartiene a C ($\lim x_n \in C$).

19. Teoremi di Bolzano

Teorema degli Zeri:

Se $f \in C^0([a, b])$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b) : f(c) = 0$. Applicazione: Serve per dimostrare l'esistenza di soluzioni di equazioni $f(x) = 0$ non risolvibili algebricamente.

Teorema dei Valori Intermedi:

Se f è continua su un intervallo I , allora $f(I)$ è un intervallo. Cioè f assume tutti i valori compresi tra il suo inf e il suo sup. Conseguenza: Se una funzione continua su un intervallo non si annulla mai, allora ha segno costante.

20. Compatti e Successioni

Insiemi Compatti (Heine-Borel):

In \mathbb{R} , un insieme K si dice compatto se e solo se è chiuso e limitato. (Es. $[a, b]$ è compatto; (a, b) no; $[0, +\infty)$ no).

Teorema di Bolzano-Weierstrass:

Ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Relazione con i Compatti:

Un insieme K è compatto se e solo se ogni successione a valori in K ammette una sottosuccessione che converge a un punto appartenente a K (Compattezza sequenziale).

21. Massimi e Minimi di Funzioni

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$.

Massimo e Minimo Assoluto (Globale):

- x_0 è punto di massimo assoluto se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D$.
- x_0 è punto di minimo assoluto se $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in D$.

Massimo e Minimo Relativo (Locale):

- x_0 è punto di massimo relativo se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D \cap U$.
- x_0 è punto di minimo relativo se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in D \cap U$.

(Nota: Un punto di estremo assoluto è anche di estremo relativo, ma non viceversa).

22. Successioni per Ricorrenza

Una successione (a_n) è definita per ricorrenza se il termine a_{n+1} è espresso in funzione del termine precedente a_n (o dei precedenti). La definizione richiede: 1. Un punto di partenza (es. $a_0 = \alpha$). 2. Una legge di ricorrenza: $a_{n+1} = f(a_n)$ per $n \geq 0$. Per studiare il limite di queste successioni si usano spesso la monotonia e la ricerca dei punti fissi della funzione f (cioè risolvere $f(l) = l$).

23. Serie Numeriche: Definizioni Generali

Data una successione (a_n) , si definisce serie numerica la somma formale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Si chiama somma parziale n-esima la successione $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

Carattere della Serie:

- Convergente: Se esiste finito il limite $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. (La somma è S).
- Divergente: Se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty$.
- Indeterminata (o Irregolare): Se il limite di S_n non esiste.

Condizione Necessaria per la convergenza:

Se a_n converge, allora il termine generale è infinitesimo ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$). (Non è sufficiente: vedi la serie armonica $1/n$ che diverge anche se $1/n \rightarrow 0$).

Stabilità del carattere:

Il carattere di una serie non cambia se si modificano, aggiungono o tolgono un numero finito di termini. (Nota: la somma S invece cambia).

Proprietà Associativa:

In una serie convergente è possibile associare i termini (mettere parentesi) senza cambiare la somma. Non è vero il viceversa (associare termini può rendere convergente una serie indeterminata, es. serie di Grandi).

Resto n-esimo:

Se la serie converge a S , si definisce resto $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Vale che $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

24. Serie a Termini Positivi ($a_n \geq 0$)

Queste serie non possono essere indeterminate (o convergono o divergono a $+\infty$).

Criteri di Convergenza:

- Confronto: Se $0 \leq a_n \leq b_n$:
 - b_n converge $\implies a_n$ converge.
 - a_n diverge $\implies b_n$ diverge.
- Confronto Asintotico: Se $a_n \sim b_n$ (oppure $\lim a_n/b_n = l \in (0, \infty)$), allora le due serie hanno lo stesso carattere.
- Rapporto: Sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.
 - $l < 1 \implies$ converge.
 - $l > 1 \implies$ diverge.
- Radice: Sia $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.
 - $l < 1 \implies$ converge.
 - $l > 1 \implies$ diverge.
- Condensazione di Cauchy: Se a_n è decrescente, a_n converge $\iff \sum 2^n a_{2^n}$ converge.

Serie Armonica Generalizzata:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$: Converge se $\alpha > 1$, Diverge se $\alpha \leq 1$.

25. Serie a Segno Variabile**Serie a Segno Alternato (Criterio di Leibniz):**

Una serie del tipo $\sum (-1)^n b_n$ (con $b_n \geq 0$) converge se: 1. b_n è decrescente ($b_{n+1} \leq b_n$); 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Convergenza Assoluta:

Una serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se converge la serie dei moduli $\sum |a_n|$. Teorema: Convergenza Assoluta \implies Convergenza Semplice. Inoltre vale la disuguaglianza triangolare generalizzata: $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

26. Derivate

Definizione:

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. La derivata in x_0 è il limite del rapporto incrementale (se esiste finito):

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Significato Geometrico:

$f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare (m) della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. Equazione della retta tangente:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Punti di Non Derivabilità:

- Punto Angoloso: Esistono finiti derivata destra e sinistra ma sono diverse ($f'_+ \neq f'_-$).
- Cuspide: Derivata destra e sinistra sono infinite di segno opposto (es. $+\infty$ e $-\infty$).
- Flesso a tangente verticale: Derivata destra e sinistra sono entrambe $+\infty$ (o entrambe $-\infty$).

Regole di Derivazione:

- Somma: $(f + g)' = f' + g'$
- Prodotto: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- Composta: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- Inversa: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (dove $y = f(x)$).

27. Teoremi del Calcolo Differenziale e Applicazioni

Punti Interni e di Frontiera:

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$:

- $x_0 \in A$ è interno se esiste un intorno U di x_0 interamente contenuto in A .
- x_0 è di frontiera se ogni intorno di x_0 contiene sia punti di A che punti del complementare di A .

Punti Critici (o Stazionari):

Un punto x_0 interno al dominio dove la funzione è derivabile si dice critico (o stazionario) se $f'(x_0) = 0$.

Teorema di Fermat:

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è un punto di estremo locale (massimo o minimo) e f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$. (Quindi i punti di estremo interni vanno cercati tra i punti critici).

Teorema di Rolle:

Se $f \in C^0([a, b])$, derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Teorema di Lagrange (del Valor Medio):

Se $f \in C^0([a, b])$ e derivabile in (a, b) , esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Conseguenze di Lagrange:

- Teorema degli accrescimenti finiti: $|f(b) - f(a)| \leq \sup |f'| \cdot |b - a|$. (Se la derivata è limitata, la funzione è Lipschitziana).
- Criterio di Costanza: $f'(x) = 0$ in un intervallo $\implies f$ è costante.
- Criterio di Monotonia:
 - $f'(x) \geq 0 \implies f$ crescente.
 - $f'(x) > 0 \implies f$ strettamente crescente.
 - $f'(x) \leq 0 \implies f$ decrescente.
- Criterio per estremi locali (Analisi della derivata prima): Se f' cambia segno in x_0 :
 - Da positivo a negativo $\implies x_0$ è massimo locale.
 - Da negativo a positivo $\implies x_0$ è minimo locale.
- Criterio di derivabilità (limite della derivata): Se f è continua in x_0 e esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$, allora f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = L$. (Se il limite è ∞ , si ha un punto a tangente verticale).

28. Asintoti e Derivate Successive**Asintoti:**

- Verticale: La retta $x = x_0$ è asintoto se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.
- Orizzontale: La retta $y = l$ è asintoto se $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.
- Obliquo: La retta $y = mx + q$ (con $m \neq 0$) è asintoto per $x \rightarrow \pm\infty$ se $\lim(f(x) - (mx + q)) = 0$. Formule:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Derivate di ordine superiore:

La derivata seconda f'' è la derivata di f' . La derivata n -esima $f^{(n)}$ si ottiene derivando n volte.

29. Funzioni Convesse

Definizione:

Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $t \in [0, 1]$, vale:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

(Geometricamente: il grafico della funzione sta sotto la corda che congiunge due punti qualsiasi del grafico). Si dice concava se vale la disuguaglianza opposta (oppure se $-f$ è convessa).

Proprietà:

- Continuità: Una funzione convessa su un intervallo aperto è continua.
- Criterio del I ordine (Tangente): Se f è derivabile, è convessa se e solo se il grafico sta sopra ogni retta tangente:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in I$$

Oppure, equivalentemente, se la derivata prima f' è crescente.

- Criterio del II ordine: Se f è due volte derivabile, è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni x .

Punti di Flesso:

Un punto x_0 è di flesso se la funzione cambia concavità (da convessa a concava o viceversa) attraversando la tangente.

- Condizione necessaria (se f'' esiste): $f''(x_0) = 0$.
- Condizione sufficiente: f'' cambia segno in x_0 .

30. Teoremi di Cauchy e De L'Hôpital

Teorema di Cauchy:

Siano f, g continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , con $g'(x) \neq 0$. Esiste $c \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teoremi di De L'Hôpital:

Regola per risolvere forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Siano f, g derivabili in un intorno di x_0 (escluso x_0) con $g'(x) \neq 0$. Se: 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$); 2. Esiste il limite del rapporto delle derivate: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$; Allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e vale L :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

31. Formula di Taylor

Polinomio di Taylor:

Sia f derivabile n volte in x_0 . Il polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 è:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Formula di Taylor con resto di Peano:

Permette di approssimare la funzione vicino a x_0 come il polinomio più un errore infinitesimo di ordine superiore:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Algebra degli o-piccolo: Utile per i calcoli dei limiti con Taylor.

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $c \cdot o(x^n) = o(x^n)$
- $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{n+m})$
- $o(o(x^n)) = o(x^n)$
- $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

32. Applicazioni di Taylor

Calcolo dei Limiti:

Lo sviluppo di Taylor è lo strumento principale per risolvere le forme indeterminate nei limiti quando i limiti notevoli non bastano (ad esempio quando c'è una "cancellazione" dei termini di ordine inferiore).

Principio di Sostituzione:

Nel calcolo di un limite per $x \rightarrow x_0$, è possibile sostituire un'espressione $f(x)$ con il suo polinomio di Taylor $T_n(x)$ (più o-piccolo), purché l'ordine n sia sufficiente a non annullare completamente il termine (evitando di perdere precisione).

Relazione Asintotica:

Una funzione $f(x)$ è asintotica al primo termine non nullo del suo sviluppo di Taylor. Se $f(x) = a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^k)$ con $a_k \neq 0$, allora:

$$f(x) \sim a_k(x - x_0)^k \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

(Questo determina l'ordine di infinitesimo della funzione).

33. Integrale di Riemann: Definizione

Partizioni e Somme:

Dato un intervallo $[a, b]$, una partizione P è un insieme finito di punti $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Sia f limitata. Per ogni intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ definiamo:

$$m_k = \inf_{I_k} f, \quad M_k = \sup_{I_k} f$$

- Somma Inferiore: $s(P, f) = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$.
- Somma Superiore: $S(P, f) = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$.

Relazione di Finezza:

Una partizione P' è più fine di P se $P \subset P'$ (contiene tutti i punti di P più altri).
Proprietà: Se $P \subset P'$, allora $s(P) \leq s(P') \leq S(P') \leq S(P)$.

Definizione di Integrabilità:

f si dice integrabile secondo Riemann se l'estremo superiore delle somme inferiori coincide con l'estremo inferiore delle somme superiori:

$$\sup_P s(P, f) = \inf_P S(P, f) = I$$

Il valore comune I è l'Integrale definito $\int_a^b f(x) dx$. (Geometricamente rappresenta l'area con segno sottesa al grafico).

Esempi:

- Funzioni costanti: Sono sempre integrabili. Area = base \times altezza.
- Funzione di Dirichlet: Vale 1 su \mathbb{Q} e 0 su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Non è integrabile secondo Riemann (ogni somma superiore è $b - a$, ogni somma inferiore è 0).

Addittività sull'intervallo:

Se $c \in (a, b)$, allora $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

34. Classi di Integrabilità e Proprietà

Funzioni Integrabili:

- Monotone: Ogni funzione monotona su un chiuso limitato è integrabile.
- Continue: Ogni funzione continua su un compatto $[a, b]$ è integrabile.
- Discontinue: Una funzione limitata con un numero finito di punti di discontinuità è integrabile.

Teorema di Heine-Cantor:

Se f è continua su un intervallo compatto (chiuso e limitato), allora è uniformemente continua. (Fondamentale per dimostrare l'integrabilità delle funzioni continue).

Proprietà dell'Integrale: Siano f, g integrabili su $[a, b]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Linearità: $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Monotonia: Se $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b]$, allora $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Valore Assoluto: $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.
- Prodotto: Il prodotto di funzioni integrabili è integrabile.

35. Teoremi Fondamentali del Calcolo

Media Integrale:

Per f continua, esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Funzione Integrale:

Fissato un punto base a , si definisce $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

I Teorema Fondamentale (di Torricelli-Barrow):

Se f è continua, la funzione integrale $F(x)$ è derivabile e la sua derivata è l'integranda stessa:

$$F'(x) = f(x)$$

(Cioè F è una primitiva di f).

Primitive:

Una funzione G è primitiva di f se $G'(x) = f(x)$. Due primitive differiscono sempre per una costante ($G_1 - G_2 = c$). L'integrale indefinito $\int f(x) dx$ è l'insieme di tutte le primitive.

II Teorema Fondamentale (Formula di Newton-Leibniz):

Se G è una qualsiasi primitiva di f continua su $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

36. Metodi di Integrazione

Integrazione per Parti:

Deriva dalla regola del prodotto delle derivate.

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Integrazione per Sostituzione:

Deriva dalla regola della catena. Ponendo $x = \varphi(t)$ (con φ invertibile e derivabile):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Simmetrie (Integrali su intervalli simmetrici $[-a, a]$):

- Se f è dispari ($f(-x) = -f(x)$): $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Se f è pari ($f(-x) = f(x)$): $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

37. Integrazione di Funzioni Razionali

Metodo dei Fratti Semplici:

Per calcolare $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (dove P, Q sono polinomi): 1. Grado: Se $\deg(P) \geq \deg(Q)$, si effettua la divisione tra polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad (\text{con } \deg(R) < \deg(Q))$$

La parte polinomiale $S(x)$ è immediata. 2. Fattorizzazione: Si scompone $Q(x)$ in fattori irriducibili (di primo grado o di secondo grado con $\Delta < 0$). 3. Scomposizione: Si scrive la frazione come somma di termini semplici (costanti da determinare A, B, \dots):

- Per ogni fattore $(x - a)$ (radice reale semplice): termine $\frac{A}{x-a}$.
- Per ogni fattore $(x - a)^k$ (radice reale multipla): somma $\frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$.
- Per ogni fattore $(x^2 + bx + c)$ (radice complessa): termine $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$.

4. Integrazione: I termini lineari danno logaritmi ($\ln|x - a|$) o potenze inverse; i termini quadratici danno logaritmi e arcotangenti.

Funzioni Riconducibili a Razionali:

Molte funzioni trascendenti si integrano tramite sostituzioni che le trasformano in razionali:

- e^x : sostituzione $t = e^x$.
- Radicali $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$: sostituzione $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$.
- Trigonometriche (in $\sin x, \cos x$): sostituzione parametrica $t = \tan(x/2)$ (formule di Wernecke).

38. Integrali Impropri (o Generalizzati)

Definizioni:

L'integrale di Riemann si estende a intervalli illimitati o funzioni illimitate tramite l'operazione di limite.

- Intervallo illimitato ($[a, +\infty)$):

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$$

- Funzione illimitata in b (su $[a, b)$):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

- Doppiaimamente improprio (es. $(-\infty, +\infty)$): Si spezza l'integrale in un punto c arbitrario. Deve convergere separatamente su entrambe le parti.

Integrale Fondamentale $\frac{1}{x^p}$:

- A infinito ($\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$): Converge se $p > 1$, Diverge se $p \leq 1$.
- Vicino a zero ($\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$): Converge se $p < 1$, Diverge se $p \geq 1$.

Proprietà:

Valgono la linearità e l'additività. Se $f(x) \geq 0$, l'integrale improprio o converge o diverge a $+\infty$ (non può essere indeterminato).

Criteri di Convergenza (per $f \geq 0$):

- Confronto: Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$:
 $-g$ converge $\implies f$ converge.

– f diverge $\implies g$ diverge.

- **Confronto Asintotico:** Se $f(x) \sim g(x)$ (per $x \rightarrow x_0$ critico), allora gli integrali hanno lo stesso carattere. (Si usa spesso il confronto con $1/x^p$).

Convergenza Assoluta:

Se converge $\int |f(x)| dx$, allora converge anche $\int f(x) dx$. (Vale $|\int f| \leq \int |f|$).

Criterio Integrale per le Serie:

Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva, continua e decrescente. Sia $a_n = f(n)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ hanno lo stesso carattere (convergono o divergono insieme).