Teoria degli Insiemi (1)(1)

- 0) Definizione di Insieme. (Collezione)
- 1) Rappresentazione mediante Diagramma.
- 2) Come si indicano Insiemi ed Elementi.
- 3) Rappresentazione degli elementi degli insiemi. (Tabulazione e Caratteristica)
- 4) "L'ordine non conta" - Insiemi uguali e sottoinsiemi.
- 5) L'insieme delle parti
- 6) Operazione di Unione.
- 7) Operazione di Intersezione.
- 8) Op. di Complemento / Differenza.
- 9) Prodotto Cartesiano
- 10) Insieme dei numeri Naturali ($\mathbb{N}$)
- 11) Principio di Induzione Matematica (+ For. di Gauss)
- 12) In. degli interi Relativi ($\mathbb{Z}$)
- 13) In. dei Razionali ($\mathbb{Q}$)

- 14) Densità dei numeri Razionali (+ irrazionalità di $\sqrt{2}$)
- 15) In. dei Reali ($\mathbb{R}$)
- 16) Assiomi della Somma ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
- 17) Assiomi del Prodotto ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
- 18) Assioma della Distributività ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
- 19) Assiomi di Relazione d'ordine ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)
- 20) Assioma di Completezza ($\mathbb{R}$) (Dedekind)
- 21) Definizione di Insieme limitato - Def. di Maggiorante
- 22) Definizione di massimi e minimi.
- 23) Definizione di estremi superiore ed inferiore
- 24) Th. di Esistenza degli estremi inferiore e superiore.
- 25) Paradosso di Russell.

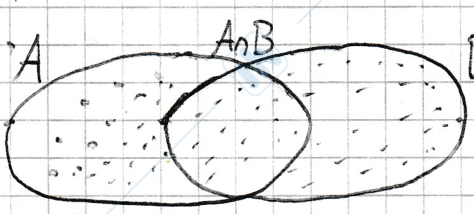
Teoria degli Insiemi

0) Definizione di Insieme

※ D.L. → Per introdurre una qualsiasi teoria matematica, più nello specifico questo corso bisogna dare una definizione assiomatica di insieme: ovvero una "collezione" di elementi che hanno tutti una proprietà in comune.

1) Rappresentazione mediante diagramma.

※ I.G. →



2) Come si indicano insiemi ed elementi?

※ D.L. → - Gli insiemi si indicano con le lettere Maiuscole (A, B, C, ...)
- Gli elementi si indicano con le lettere minuscole (a, b, c ...).

3) Rappresentazione degli elementi degli insiemi.

※ D.L. → ⓐ Gli insiemi con un numero basso di elementi possono essere indicati/rappresentati per

<u>Tabulazione</u> o <u>elencazione</u>, ovvero scrivendo tutti gli elementi tra parentesi graffe, invece (b) gli insiemi che hanno molti elementi devono essere rappresentati per <u>caratteristica</u>, ovvero indicando ~~la tipologia di elemento~~ e la sua caratteristica tra parentesi graffe.

※ D.S. → (a): $A = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$

(b): $B = \{b \mid 2 \leq b \leq 7\}$

* L'ordine degli elementi non conta.

4) Insiemi uguali e sotto-insiemi.

※ D.L. → (a) Se ogni elemento di un insieme è anche elemento di un altro insieme <u>e</u> viceversa allora gli insiemi sono uguali, mentre (b) se ogni elemento di un insieme è anche elemento di un altro insieme <u>ma non</u> viceversa allora il primo è sottoinsieme del secondo.

※ D.S. → (a): $x \in A \vee x \in B \; , \; \forall x \in A \;\; \forall x \in B \Rightarrow A = B$

(b1): $x \in A \vee x \in B \; , \; \forall x \in A \;\; \cancel{\forall x \in B} \Rightarrow A \subseteq B$

(b2): $x \in A \vee x \in B \; , \; \cancel{\forall x \in A} \;\; \forall x \in B \Rightarrow B \subseteq A$

5) L'insieme delle parti.

\# D.L. → Per ogni insieme è possibile descrivere un "insieme delle parti" che risulta costituito da tutte le possibili combinazioni di elementi dell'insieme di partenza.

\# D.S. → $A = \{a, b, c\} \Rightarrow P(A) = \{a, b, c, (a,b)(a,c)(b,c) \ldots \ldots (a,b,c)\}$ "$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ con $n = |A|$"

6) Operazione di Unione

\# D.S. → $A \cup B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A = \{a, b\}$; $B = \{c, d\} \Rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d\}$

7) Operazione di Intersezione

\# D.S. → $A \cap B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 20\}$; $B = \{x \mid 10 \leq x \leq 30\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap B = \{x \mid 10 \leq x \leq 20\}$

8) Operazione di Complemento (Differenza)

\# D.S. → $A \setminus B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 20\}$; $B = \{x \mid 10 \leq x \leq 30\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \setminus B = \{x \mid 1 \leq x \leq 10\}$
$B \setminus A = \{x \mid 20 \leq x \leq 30\}$

9) Prodotto Cartesiano

*D.S. : $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
$A = \{a, b\}$; $B = \{c, d\} \Rightarrow A \times B = \{(a,c); (a,d); (b,c); (b;d)\}$

10) Insieme dei numeri Naturali

*D.S. : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$

11) Principio di induzione Matematica

*D.L : Il Principio di Induzione Matematica afferma che: se proprietà $P(n)$ è vera per $n = 1$ (base di induzione), e per $n+1$ (fase induttiva), allora $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

*DIM : $P(n) = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
(1) Mostriamo che $P(n)$ è vera per $n = 1$:
$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = 1$ (è vera)

(2) Mostriamo che $P(n)$ è vera per $n+1$
$P(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \ (1^*) = 1+2+3+\ldots+n+(n+1) \ (2^*)$

$$(1)^* = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$(2)^* = \underbrace{1+2+3+\dots n}_{P(n)} + (n+1) \Rightarrow (2)^* = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad C.V.D.$$

12) Insieme dei numeri interi relativi

※ D.S. $\longrightarrow$ $\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$ $\quad (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z})$

13) Insieme dei numeri Razionali

※ D.S. $\longrightarrow$ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0 \right\}$ $\quad (\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q})$

14) Densité dei numeri Razionali e l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

※ D.L.(1) $\longrightarrow$ In Analisi Matematica è utile poter associare gli elementi di un insieme con i punti di una retta, ma ciò non è possibile con $\mathbb{Q}$, poiché lascierebbe dei "buchi".

※ D.L.(2) $\longrightarrow$ $\sqrt{2}$ non appartiene a $\mathbb{Q}$ poiché non esistono 2 numeri appartenenti a $\mathbb{Z}$ tale che il loro rapporto dia $\sqrt{2}$, $(\nexists\, q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 2)$

$\ast$ D.14 $\rightarrow$ Dimostriamo (Per Assurdo) che: $\nexists q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 2$:
Supponiamo che l'enunciato sia falso, dunque possiamo presupporre che: $\exists q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 2$.
Dunque possiamo dire che: $\exists m, n \in \mathbb{N} \mid \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.
Possiamo infine presupporre che la frazione sia già ridotta ai minimi termini.
$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$, ciò significa che m^2 è pari,
ma: $m \in \mathbb{N}$ (1), $m^2 \in P$ (2) $\Rightarrow m \in P$, quindi m può essere scritto come 2 volte la sua metà: $m = 2k$:

$(2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$, $n \in \mathbb{N}$,
ciò implica che (analogamente a prima) $n \in P$, ovvero che abbia un fattore 2 proprio come m, ma ciò va in contraddizione con il terzo presupposto, il che è assurdo! C.V.D.

15) Insieme dei numeri Reali.

$\ast$ D.S. $\rightarrow$ $\mathbb{R} = \left\{ m, c_1 c_2 \ldots \;\middle|\; \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \\ c_1, c_2, \ldots \in (0,9) \end{array} \right\}$

16) Assiomi delle Somme (Validi per $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$)

※DS. → (a) Commutatività: $a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
(b) Associatività: $a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
(c) Termine neutro: $\exists!\, 0 \in \mathbb{R} \mid a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
(d) Inverso: $a+(-a)=0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

17) Assiomi del Prodotto (Validi per $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

※D.S. → (a) Commutatività: $a\cdot b=b\cdot a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$
(b) Associatività: $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
(c) Termine neutro: $\exists!\, 1 \in \mathbb{R} \mid a\cdot 1=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
(d) Inverso: $a\cdot \frac{1}{a}=1 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

18) Proprietà Distributiva (Valida per $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

※DS → $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

19) Assiomi di Relazione d'Ordine (Validi per $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$)

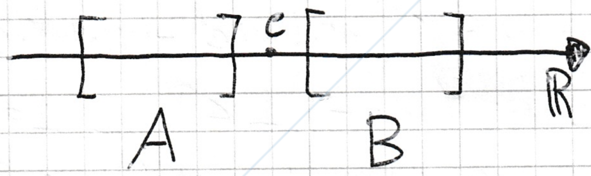
※DS → (a) $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$
(b) $a>b \Rightarrow a+c>b+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

20) Assioma di Completezza (Valido per $\mathbb{R}$)

※DL → Dati 2 insiemi A e $B \subseteq \mathbb{R}$ se ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B, allora un numero $c \in \mathbb{R}$ che è maggiore (o uguale) di ogni elemento di A e minore (o uguale) di ogni elemento di B.

※D.S. → : Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se $a \le b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$
$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \le c \le b \ \forall a \in A \ \forall b \in B$

※I.G. → :



21) Definizione di Insieme limitato (Def. Maggiorante)

※D.L. → : Un insieme si dice limitato* se e solo se esiste un $c \in \mathbb{R}$ che sia maggiore di tutti gli elementi dell'insieme. (In tal senso c è detto "maggiorante) *superiormente

* Analoga definizione se limitato "inferiormente"

※D.S. → : Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ è limitato superiormente $\Longleftrightarrow$
$\exists c \in \mathbb{R} : c \ge a \ \forall a \in A$

22) Definizione di massimi e minimi. (max " ")

*DL. → Dato un Insieme limitato sup. e un suo elemento $\bar{a}$, $\bar{a}$ è detto massimo se e solo se di tutti gli elementi dell'insieme. ($\bar{a}$ è un maggiorante).

*DS: → Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ lim. sup., $\bar{a} \in A$:
$\bar{a}$ è massimo $\Leftrightarrow$ $a \leq \bar{a}$ $\forall a \in A$.

23) Definizione degli estremi superiore ed inferiore. (sup " ").

*DL: → Dato un Insieme limitato sup. e un ~~...~~ elemento $\bar{b}$, $\bar{b}$ è detto estremo sup. se e solo se è maggiore di tutti gli elementi dell'insieme ed è il più piccolo dei maggioranti.

24) Teorema di Esistenza degli estremi superiore ed inferiore.

*DL. → Se un insieme è limitato superiormente allora esso ammette l'estremo superiore $e \in \mathbb{R}$.

*DIM: Chiamo l'insieme limitato sup. A e chiamo l'insieme dei maggioranti B:

$$a<b \quad \forall a\in A \quad \forall b\in B$$

Quindi è possibile applicare l'assioma di continuità:

$$\exists c\in\mathbb{R}: a\le c\le b \quad \forall a\in A \quad \forall b\in B$$

(1) $c\ge a \quad \forall a\in A \Rightarrow$ c è un maggiorante.

(2) $c\le b \quad \forall b\in B \Rightarrow$ c è il più piccolo dei maggioranti.

*Ma questa è proprio la definizione di estremo superiore! C.V.D

25) Paradosso di Russell

*dim: Ogni insieme può appartenere a due "gruppi": ossero (1) a quelli che appartengono a se stessi (e.g. $A\in A$) come l'insieme degli insiemi, oppure (2) quelli che non appartengono a se stessi (e.g. $B\notin B$) come l'insieme delle tazze da tè:

• Allora definiamo un insieme che contenga tutti gli insiemi del secondo tipo:

$$R=\{x \mid x\in X\}$$

(1) Se $R \in R \Rightarrow R \notin R$

(2) Se $R \notin R \Rightarrow R \in R$

Il che è assurdo!